L.V. KANTOROVICH

ANALYSE FONCTIONNELLE

1

OPÉRATEURS ET FONCTIONNELLES LINÉAIRES

L. KANTOROVITCH, G. AKILOV

ANALYSE FONCTIONNELLE

Tome 1

Opérateurs et fonctionnelles linéaires

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 7

Chapitre premier. ESPACES MÉTRIQUES ET TOPOLOGIQUES . . 11

§ 1. Généralités sur les ensembles. Ensembles ordonnés 11
§ 2. Espaces topologiques 15
§ 3. Espaces métriques 27
§ 4. Complétude et séparabilité. Ensembles de première et deuxième catégories 31
§ 5. Compacité dans les espaces métriques 39
§ 6. Espaces mesurés 47

Chapitre II. ESPACES VECTORIELS 68

§ 1. Définitions fondamentales 68
§ 2. Opérateurs et fonctionnelles linéaires 73
§ 3. Ensembles convexes et semi-normes 77
§ 4. Théorème de Hahn-Banach 80

Chapitre III. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES 86

§ 1. Définitions générales 86
§ 2. Espaces localement convexes 97
§ 3. Dualité 107

Chapitre IV. ESPACES NORMÉS 118

§ 1. Définitions fondamentales et propriétés élémentaires des espaces normés 118
§ 2. Inégalités auxiliaires 129
§ 3. Espaces normés de fonctions mesurables et de suites 134
§ 4. Autres espaces normés de fonctions 153
§ 5. Espace de Hilbert 158

Chapitre V. OPÉRATEURS ET FONCTIONNELLES LINÉAIRES 175

§ 1. Espace des opérateurs et espace dual 175
§ 2. Quelques fonctionnelles et opérateurs dans des espaces concrets . . 179
§ 3. Fonctionnelles et opérateurs linéaires dans un espace hilbertien . 193
§ 4. Anneau des opérateurs 201
§ 5. Méthode des approximations successives 210

§ 6. Anneau d'opérateurs dans un espace hilbertien 222
§ 7. Topologie faible et espaces réflexifs 234
§ 8. Prolongement des opérateurs linéaires 241

Chapitre VI. REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONNELLES 248

§ 1. Représentation intégrale des fonctionnelles sur des espaces de fonctions mesurables 248
§ 2. Les espaces $L^p(T, \Sigma, \mu)$ 255
§ 3. Forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $C(K)$ . . . 260

Chapitre VII. SUITES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES 268

§ 1. Théorèmes fondamentaux 262
§ 2. Quelques applications à la théorie des fonctions 278

Chapitre VIII. TOPOLOGIE FAIBLE DANS UN ESPACE DE BANACH 285

§ 1. Ensembles faiblement bornés 285
§ 2. Théorie d'Eberlein-Smulian 287
§ 3. Convergence faible dans des espaces concrets 291
§ 4. Un problème de déplacement de la masse et l'espace normé engendré par lui 298

Chapitre IX. OPÉRATEURS ADJOINTS ET COMPACTS 32

§ 1. Ensembles compacts dans des espaces normés 320
§ 2. Opérateurs compacts 328
§ 3. Opérateurs adjoints 331
§ 4. Opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace hilbertien . . . 337
§ 5. Représentation intégrale d'un opérateur auto-adjoint 345

Chapitre X. ESPACES NORMÉS ORDONNÉS 366

§ 1. Lattis vectoriels 367
§ 2. Fonctionnelles et opérateurs linéaires 374
§ 3. Lattis normés 385
§ 4. *KB*-espaces 390
§ 5. Ensembles convexes fermés pour la convergence en mesure 401

Chapitre XI. OPÉRATEURS INTÉGRAUX 406

§ 1. Représentation intégrale des opérateurs 406
§ 2. Opérateurs dans les espaces de suites 424
§ 3. Opérateurs intégraux dans les espaces fonctionnels 432
§ 4. Théorèmes d'immersion de Sobolev 444

Bibliographie. Ouvrages d'analyse fonctionnelle 465
Bibliographie. Ouvrages utilisés 471
Index des matières 480
Index des symboles 485
Index des abréviations 490

AVANT-PROPOS

L'analyse fonctionnelle, une discipline relativement jeune, est la plus marquante manifestation du tournant radical qui s'est opéré en mathématiques, un tournant qui par sa portée est comparable à celui qu'a entraîné l'introduction de la variable réelle (XVIIe siècle), d'où naîtra le calcul différentiel et intégral.

Ce tournant s'est traduit tout d'abord par une modification de l'approche des divers problèmes d'analyse mathématique. L'étude individuelle des fonctions et des relations et équations qui les lient a fait place à une étude globale de ces objets, c'est-à-dire à une étude des espaces fonctionnels et de leurs transformations (opérations fonctionnelles). Ainsi, un opérateur différentiel ou une transformation intégrale sont envisagés non pas pour une fonction, mais pour toute une classe, cette étude portant sur l'image de cette classe de fonctions par ces transformations, la continuité des opérations dans tel ou tel sens, etc.

L'analyse fonctionnelle se caractérise par la forme abstraite générale d'étude de problèmes d'analyse, qui permet de grouper et d'envisager simultanément des problèmes, dont l'affinité est loin d'être évidente. Ainsi, l'étude des équations fonctionnelles $F(x) = y$, où x et y sont des éléments appartenant à des domaines plus ou moins arbitraires, permet de grouper des problèmes aussi distincts que la résolution des équations différentielles, des équations intégrales, des problèmes aux limites, des systèmes infinis d'équations algébriques ou des problèmes des moments. Le passage de fonctions isolées aux espaces de fonctions, même si parfois il est difficile à discerner, est aussi important que le fut le passage des équations et relations algébriques à des quantités variables et à une dépendance fonctionnelle.

Ce nouveau point de vue n'est pas le résultat d'un simple désir de généralisation. Le besoin de gravir les marches de l'abstraction est dû à l'apparition de nouveaux problèmes posés par l'essor naturel de l'analyse, tels la complétude d'un système, la solubilité des problèmes aux limites dans une classe déterminée de fonctions,

l'étude simultanée de toute une classe de problèmes, par exemple, lors de l'étude de la dépendance de la solution d'un problème aux limites par rapport au second membre de l'équation ou aux conditions aux limites. Les méthodes de l'analyse fonctionnelle se sont avérées les plus fécondes pour l'étude de ces problèmes. Il est remarquable que dans nombre de cas cette approche commune a permis de mettre en exergue des lois et relations plus générales, plus concrètes et plus profondes, dans la mesure où les aspects de moindre importance ont été négligés.

L'analyse fonctionnelle a été préparée par des études embrassant de nombreux domaines de l'analyse mathématique: calcul des variations, équations intégrales, théorie des fonctions orthogonales, théorie des approximations de Tchébychev, problème des moments, et nécessitant l'application d'une nouvelle méthode. Certains problèmes d'analyse fonctionnelle plongent leurs racines dans ces domaines mêmes, telle la notion de fonctionnelle en calcul des variations. D'autre part, le développement des disciplines liées à la théorie des ensembles: topologie, théorie des fonctions d'une variable réelle, algèbre abstraite, ont fourni l'appareil indispensable à la mise en œuvre de cette nouvelle orientation dans une forme abstraite. En particulier, la théorie des espaces abstraits a été vitale pour l'analyse fonctionnelle.

L'analyse fonctionnelle s'est érigée en discipline depuis la construction systématique de la théorie des opérateurs dans les espaces unitaires de dimension infinie (par Hilbert et autres), et le développement de la théorie générale des espaces vectoriels normés (1918-1923) dans les travaux du mathématicien hongrois F. Riesz et surtout du mathématicien polonais S. Banach.

L'analyse fonctionnelle est aujourd'hui le langage universel des mathématiques. Aucune étude sérieuse que ce soit en théorie des fonctions, en équations différentielles, en physique mathématique, en analyse numérique, en économie mathématique ou en théorie de la commande n'est concevable sans une large sollicitation des résultats et méthodes de l'analyse fonctionnelle. Ceci explique d'une part son essor impétueux en tant que science mathématique, et d'autre part le rôle croissant que ses méthodes assument dans les applications.

L'ouvrage en deux tomes que nous proposons n'a pas l'ambition de couvrir tous les domaines de l'analyse fonctionnelle et son champ d'applications. L'exposé se fonde sur les espaces vectoriels topologiques conformément à la logique du développement de l'analyse fonctionnelle. L'ouvrage traite de la théorie des espaces normés, de la théorie des opérateurs et des équations fonctionnelles. Les opérateurs et équations non linéaires tiennent une place aussi importante que les équations et opérateurs linéaires. Une grande attention a été attachée à des opérateurs et espaces fonctionnels concrets.

On étudie en particulier les espaces de fonctions différentiables de plusieurs variables, introduits par S. Sobolev. Ces questions sont reliées à l'étude générale des opérateurs intégraux.

La deuxième édition de cet ouvrage à partir de laquelle a été faite la présente traduction a été considérablement remaniée par rapport à la première. L'exposé est fondé non plus sur les espaces normés mais sur les espaces vectoriels topologiques. Un chapitre supplémentaire est consacré aux espaces (vectoriels) ordonnés. La place traditionnelle faite aux applications de l'analyse fonctionnelle est une caractéristique essentielle de cet ouvrage qui a inspiré de nombreux travaux aussi bien en U.R.S.S. que dans d'autres pays. Certains problèmes d'analyse liés aux applications de l'analyse fonctionnelle à l'économie mathématique et à la théorie de la gestion sont abordés pour la première fois quoique d'une manière assez peu approfondie.

Le chapitre I est introductif. On y expose les fondements de la théorie des espaces topologiques et métriques et des espaces abstraits mesurés. De nombreux résultats sont exhibés sans démonstration. On suppose au lecteur la connaissance d'éléments de la théorie des fonctions d'une variable réelle et de la topologie de l'espace euclidien de dimension n. Les problèmes spéciaux et délicats de la théorie et les applications (en petits caractères) peuvent être omis en première lecture. Le lecteur s'intéressant spécialement aux applications de l'analyse fonctionnelle peut également sauter d'autres chapitres plus abstraits se rapportant aux espaces topologiques et vectoriels topologiques ou, si les éléments de la théorie des espaces normés lui sont familiers, passer directement aux chapitres correspondants consacrés aux applications.

Les auteurs tiennent à remercier toutes les personnes qui ont pris une part active à la préparation de la seconde édition russe. En premier lieu A. Boukhvalov qui, outre qu'il est rédacteur de ce livre, est l'auteur du chapitre X sur les espaces normés ordonnés, ainsi que du paragraphe 3 du chapitre IV, du paragraphe 1 du chapitre VI et du paragraphe 1 du chapitre XI. V. Démianov, A. Roubinov qui ont amélioré l'exposé de la méthode de plus forte pente (chapitre XV, tome 2) et écrit les §§ 4 et 5. I. Daougavet qui a complété et apporté des corrections aux chapitres XIV, XV et XVIII du tome 2. V. Ilyne qui a grandement amélioré les §§ 3 et 4 du chapitre XI et en particulier la démonstration du lemme 2 et du théorème 1 (§ 3, chapitre XI, tome 1). G. Rubinstein qui a écrit le § 8 du chapitre IX (tome 1). Enfin B. Voulikh, Y. Abramovitch, A. Verchik, S. Kisliakov, S. Koutatéladzé, G. Lozanovski, A. Mekler, B. Poliak et V. Havine pour leurs précieuses remarques.

La bibliographie est divisée en deux parties. Les chiffres romains qui suivent les noms d'auteurs renvoient à la première partie.

Cet ouvrage de deux tomes est composé de 18 chapitres, divisés en paragraphes, les paragraphes en numéros, et de deux annexes. La référence XI.4.2, par exemple, renvoie au chapitre XI, paragraphe 4, numéro 2. Le théorème XI.1.2 représente le théorème 2 du paragraphe 1 du chapitre XI. Dans le cas d'une référence à l'intérieur d'un paragraphe, on n'indique ni le numéro du chapitre ni celui du paragraphe.

L. Kantorovitch, G. Akilov

CHAPITRE PREMIER

ESPACES MÉTRIQUES ET TOPOLOGIQUES

La notion d'espace, c'est-à-dire un ensemble entre les éléments duquel sont définies axiomatiquement certaines relations, joue un rôle très important en mathématique. On dit alors que cet ensemble est muni de la structure de l'espace considéré. Le principal objet de ce chapitre sera l'étude des espaces topologiques et métriques, c'est-à-dire des ensembles pour les éléments desquels est définie la notion de voisinage. Les espaces topologiques ont été introduits par Hausdorff en 1910 (cf. Hausdorff), les espaces métriques un peu avant par Fréchet [1].

§ 1. Généralités sur les ensembles. Ensembles ordonnés

1.1. On rappelle quelques notions fondamentales de la théorie générale des ensembles et les notations *) généralement utilisées. On adoptera le point de vue non formel, c'est-à-dire on considérera que la notion d'*ensemble* ou de *collection* est intuitivement claire et ne nécessite pas de définition rigoureuse. On appellera éléments d'un ensemble les objets dont il est constitué.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Soient A, B des ensembles. $a \in A$ signifie que l'élément a appartient à l'ensemble A ; $a \notin A$, que a n'appartient pas à A. On dit que l'ensemble A est *sous-ensemble* de l'ensemble B et l'on note $A \subset B$ (ou $B \supset A$) si chaque élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, on dit que A et B sont *égaux* et l'on note $A = B$. L'ensemble *vide* (c'est-à-dire un ensemble ne renfermant aucun élément) est désigné par le symbole $\varnothing$. Si (P) est une assertion valable pour les éléments de A, le sous-ensemble composé de tous les $a \in A$, pour lesquels (P) est réalisée, se note $\{a \in A : (P)\, a\}$ ou plus brièvement $\{a : (P)\, a\}$.

---

*) Les fondements de la théorie générale des ensembles ont été jetés par le mathématicien allemand G. Cantor à la deuxième moitié du XIXe siècle.

Soient A, B des ensembles. Si à chaque élément $a \in A$ on associe un élément unique $f(a) \in B$ d'après une loi bien déterminée, on dit qu'est définie une *application* f de l'ensemble A dans l'ensemble B et l'on note $f: A \to B$. On définit l'*image* $f(X)$ de tout ensemble $X \subset A: f(X) = \{b \in B: \exists a \in X$ tel que $b = f(a)\}$, et l'*image réciproque* $f^{-1}(Y)$ de tout ensemble $Y \subset B: f^{-1}(Y) = \{a \in A: f(a) \in Y\}$. Une application $f: A \to B$ est *injective* si $f(a_1) = f(a_2)$, a_1, $a_2 \in A$, entraîne $a_1 = a_2$; *surjective* si $f(A) = B$; *bijective* si injective et surjective. Si f est une bijection, l'application $g: B \to A$ définie par la relation $g(f(a)) = a$, $a \in A$, est dite *application inverse* de f et se note f^{-1}.

Définissons maintenant les principales opérations de la théorie des ensembles. Si à chaque élément α d'un ensemble non vide A est associé un ensemble, on dit qu'est donnée une *famille* d'ensembles $\{X_\alpha\}$ ($\alpha \in$ A). On appelle *réunion* d'une famille d'ensembles $\{X_\alpha\}$ l'ensemble $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ composé de tous les éléments x tels que $x \in X_\alpha$ au moins pour un $\alpha \in$ A. On appelle *intersection* d'une famille d'ensembles $\{X_\alpha\}$ l'ensemble $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ constitué de tous les éléments x tels que $x \in X_\alpha$, $\forall \alpha \in$ A. On appelle *produit direct* d'une famille d'ensembles $\{X_\alpha\}$ l'ensemble $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ de toutes les applications f: A $\to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ telles que $f(\alpha) \in X_\alpha$, $\forall \alpha \in$ A. Si A est composé des nombres entiers 1, 2, . . ., n, pour désigner respectivement la réunion, l'intersection et le produit direct on écrira

$$\bigcup_{k=1}^{n} X_k = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} X_k = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

A remarquer qu'il est possible d'identifier le produit fini $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ avec l'ensemble de toutes les collections ordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_k \in X_k$.

Si A est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, on écrira respectivement

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Deux ensembles A, B sont *disjoints* si $A \cap B = \varnothing$. On dit que les ensembles X_α ($\alpha \in$ A) sont *deux à deux disjoints* si $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \varnothing$ pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$. On appelle *partition* d'un ensemble T une famille

d'ensembles deux à deux disjoints $\{X_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) telle que $T = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$.

On appelle *différence* de deux ensembles A et B, et l'on note $A \setminus B$, le sous-ensemble de l'ensemble A composé de tous les $a \in B$. Cette définition n'implique pas que $B \subset A$. Si $B \subset A$, on dit que l'ensemble $A \setminus B$ est le *complémentaire* de l'ensemble B (relativement à l'ensemble A). On appelle *différence symétrique* des ensembles A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Si $A \subset X$, la *fonction caractéristique* χ_A de l'ensemble A est définie par la formule

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

1.2. Un ensemble X est *ordonné* *) si pour certains couples de ses éléments x et y est définie une relation *d'ordre* $x \geqslant y$ (x est supérieur ou égal à y), telle que :

1) $x \geqslant x$, $\forall x \in X$ (réflexivité) ;
2) $x \geqslant y$ et $y \geqslant z$ impliquent $x \geqslant z$ (transitivité) ;
3) $x \geqslant y$ et $y \geqslant x$ impliquent $x = y$ (antisymétrie).

L'écriture $x \leqslant y$ signifie que $y \geqslant x$; $x > y$ que $x \geqslant y$ et $x \neq y$; $x \geqslant y, z$ que $x \geqslant y$ et $x \geqslant z$. L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un ensemble ordonné dont deux éléments quelconques sont liés par la relation $\leqslant$ (sont comparables). L'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$, ordonné par l'inclusion (c'est-à-dire $A \geqslant B \Leftrightarrow A \supset B$ **)), contient également des éléments non comparables.

Soit X un ensemble ordonné. Un sous-ensemble $A \subset X$ est *majoré* si existe $x \in X$ tel que $a \leqslant x$, $\forall a \in A$; x est appelé *majorant* de A. On définit de même un sous-ensemble *minoré* et un *minorant*. Un sous-ensemble $A \subset X$ est *borné* s'il est à la fois majoré et minoré. Un élément x de $A \subset X$ est

1) *maximum* si $x \geqslant a$, $\forall a \in A$;
2) *maximal* si $x \leqslant a$ pour $a \in A$ entraîne $x = a$. On remarquera que tout élément maximum sera maximal, mais qu'en général la réciproque n'est pas vraie. On définit de façon analogue *élément minimum* et *élément minimal*. Si A est sous-ensemble majoré de X, son plus petit majorant (s'il existe) est appelé *suprémum* (ou *borne supérieure*) de A et noté sup A. Si A est un sous-ensemble minoré

---

*) On utilise souvent le terme ensemble partiellement ordonné pour souligner que la relation « supérieur ou égal » ne s'étend pas à tous les couples d'éléments de cet ensemble.

**) Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie « est équivalent », le symbole $\Rightarrow$ « entraîne », « implique ».

de X, son plus grand minorant (s'il existe) est appelé *infimum* (ou *borne inférieure*) de l'ensemble A et noté $\inf A$. Si les éléments de l'ensemble A sont affectés d'indices quelconques, $A = \{x_\beta\}$ ($\beta \in B$), au lieu de $\sup A$ et $\inf A$ on écrit respectivement

$$\sup_{\beta \in B} x_\beta \text{ ou } \sup x_\beta \text{ et } \inf_{\beta \in B} x_\beta \text{ ou } \inf x_\beta.$$

Si l'ensemble A est composé d'un nombre fini d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, au lieu de $\sup A$ et $\inf A$ on écrit respectivement :

$$\sup_{k=1}^{n} x_k \text{ ou } x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \text{ et } \inf_{k=1}^{n} x_k \text{ ou } x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$$

On notera que dans le deuxième exemple de ce point, la borne supérieure est visiblement la réunion d'ensembles, la borne inférieure, l'intersection.

Un ensemble ordonné X est *totalement ordonné* (ou encore est une *chaîne*) si pour des éléments x, y quelconques de X on a $x \geqslant y$ ou $x \leqslant y$, c'est-à-dire tous les éléments sont comparables.

La proposition suivante qui est équivalente à l'axiome de choix et au principe de l'induction transfinie, est souvent utile dans de nombreux problèmes (on pourra en trouver une démonstration par exemple dans Dunford et Schwartz [I] (théorème I.2.7) et dans Kelley).

LEMME DE ZORN. *Si tout sous-ensemble totalement ordonné d'un ensemble ~~totalement~~ ordonné X est majoré, alors X admet au moins un élément maximal.*

Pour étudier les espaces topologiques et ensuite les espaces vectoriels topologiques, on aura besoin de la notion de suite généralisée. Soient X un ensemble, A un ensemble *filtrant supérieurement*, c'est-à-dire un ensemble tel que pour tout couple $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha \geqslant \alpha_1$ et $\alpha \geqslant \alpha_2$. L'application $\alpha \to x_\alpha$ de l'ensemble A dans X est appelée *suite généralisée* et se note $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) ou simplement $\{x_\alpha\}$. Si $A = \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels ordonné de la manière habituelle, alors $\{x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) est une suite ordinaire. On indiciera les suites généralisées avec des lettres grecques : $\{x_\alpha\}$, $\{x_\beta\}$, $\{x_\gamma\}$, et les suites ordinaires avec des lettres latines : $\{x_n\}$, $\{x_m\}$, $\{x_k\}$.

Un exemple non trivial de suite généralisée est l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{N}$, ordonné par l'inclusion.

La notion de sous-suite ou suite partielle s'étend à la suite généralisée de la manière suivante. Une suite $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) est *suite partielle* d'une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) si pour tout $\alpha \in A$ il existe un indice $\beta(\alpha) \in B$, tel que pour tout $\beta' \in B$ vérifiant l'inégalité $\beta' \geqslant \beta(\alpha)$ il existe $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, vérifiant l'égalité

$x_{\alpha'} = y_{\beta'}$. A signaler qu'une suite admet toujours des suites partielles généralisées qui ne sont pas elles-mêmes des suites.

Dans ce chapitre nous aurons affaire à divers exemples d'ensembles ordonnés. Le sujet exposé dans ce paragraphe est approfondi dans Bourbaki [II] et Kelley; on en trouvera des notions élémentaires dans Voulikh [III], Kolmogorov et Fomine, Natanson [II]. L'ouvrage de Birkhoff étudie en détail les diverses classes d'ensembles ordonnés.

§ 2. Espaces topologiques

2.1. Il existe plusieurs procédés pour munir un ensemble d'une structure d'espace topologique. L'un des plus commodes et des plus couramment utilisés consiste à exhiber une collection d'ouverts de cet espace.

Un ensemble X est un *espace topologique* si l'on peut en extraire un système $\mathfrak{G}$ de sous-ensembles dit *ouverts* vérifiant les trois conditions suivantes (axiomes de l'espace topologique):

1) l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble X appartiennent à $\mathfrak{G}$;

2) $G_\xi \in \mathfrak{G}\ (\xi \in \Xi) \Rightarrow \bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathfrak{G}$, c'est-à-dire la réunion d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert;

3) $G_1, G_2 \in \mathfrak{G} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$, c'est-à-dire l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Si l'ensemble X se transforme en espace topologique on dit que X *est muni d'une topologie.*

Deux espaces topologiques X_1 et X_2 sont *homéomorphes* si entre leurs éléments on peut établir une correspondance biunivoque associant aux ouverts de X_1 des ouverts de X_2. Du point de vue de la théorie des espaces topologiques, on pourra de toute évidence identifier des espaces homéomorphes.

Supposons qu'on ait muni un ensemble X d'une topologie de deux manières différentes. Soient X_1 et X_2 les deux espaces topologiques obtenus (ces espaces coïncident par la composition de leurs éléments). Désignons respectivement par $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ les systèmes des ouverts de X_1 et X_2. On dit que la topologie de X_1 est *plus forte* que la topologie de X_2 (ou la topologie de X_2 est *plus faible* que la topologie de X_1) si $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$ et l'on note $\tau(X_1) \geqslant \tau(X_2)$ (ou $\tau(X_2) \leqslant \tau(X_1)$).

Soient X un espace topologique, $\mathfrak{G}$ un système d'ouverts dans X. Soit par ailleurs $X_0 \subset X$ un ensemble quelconque. On vérifie aisément que le système $\mathfrak{G}$ constitué des ensembles de la forme $G \cap X_0$ $(G \in \mathfrak{G})$ satisfait aux axiomes de l'espace topologique (par rapport à X_0); donc X_0 est un espace topologique. On dit que la topologie de X_0 est induite par celle de X et que X_0 est un *sous-espace* de l'espace topologique X.

2.2. Une partie F d'un espace topologique $\mathbf{X}$ est un ensemble *fermé* si son complémentaire $G = \mathbf{X} \setminus F$ est ouvert. Le système $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles fermés dans $\mathbf{X}$ possède les propriétés suivantes:

1) $\varnothing, \mathbf{X} \in \mathfrak{F}$;

2) $F_\xi \in \mathfrak{F}\ (\xi \in \Xi) \Rightarrow \bigcap_{\xi \in \Xi} F_\xi \in \mathfrak{F}$, c'est-à-dire l'intersection d'un nombre quelconque de fermés est un fermé;

3) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$, c'est-à-dire l'union d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Vu que le système $\mathfrak{F}$ définit de façon unique le système $\mathfrak{G}$ d'ensembles ouverts, on peut munir $\mathbf{X}$ d'une topologie en se donnant d'abord un système $\mathfrak{F}$ vérifiant les trois conditions indiquées et en appelant les ensembles de $\mathfrak{F}$ ensembles fermés. Les ensembles ouverts se définissent alors comme les complémentaires des ensembles fermés.

Si $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ est un fermé, en munissant $\mathbf{X}_0$ de la topologie induite par celle de l'espace $\mathbf{X}$, on constate que le système $\mathfrak{F}_0$ des fermés de l'espace $\mathbf{X}_0$ est constitué des fermés de $\mathbf{X}$ entièrement contenus dans $\mathbf{X}_0$.

2.3. Soit $\mathbf{X}$ un espace topologique. Un point $x \in \mathbf{X}$ est un point *intérieur* d'un ensemble E de $\mathbf{X}$ si existe un ouvert G de $\mathbf{X}$, tel que $x \in G \subset E$. On appelle *voisinage* d'un point $x \in \mathbf{X}$ un ensemble $V \subset \mathbf{X}$ pour lequel le point x est intérieur. Un système $\mathfrak{B}_x$ de voisinages d'un point x est *fondamental* ou est une *base de voisinages* du point x si pour tout voisinage V du point x il existe un voisinage $V_x \in \mathfrak{B}_x$ tel que $V_x \subset V$. L'ensemble $\mathfrak{B}$ des bases $\mathfrak{B}_x$ de voisinages de tous les points de l'espace est appelé *base de l'espace*. La base de l'espace possède les propriétés suivantes:

1) $V \in \mathfrak{B}_x \Rightarrow x \in V$;

2) si $V_1, V_2 \in \mathfrak{B}_x$, il existe $V \in \mathfrak{B}_x$ tel que $V \subset V_1 \cap V_2$;

3) pour tout voisinage $V_x \in \mathfrak{B}_x$ il existe $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ tel que $V'_x \subset V_x$ et de plus pour tout $y \in V'_x$ il existe $V_y \in \mathfrak{B}_y$ tel que $V_y \subset V_x$.

Expliquons la dernière propriété. Comme V_x est un voisinage de x, il existe un ouvert $G \subset V_x$ contenant x. L'ensemble G étant un voisinage de x, il existe $V'_x \in \mathfrak{B}_x$ tel que $V'_x \subset G$ et *a fortiori* $V'_x \subset V_x$. Si $y \in V'_x$, alors $y \in G$, et l'ensemble G, qui est ouvert, est voisinage du point y, par suite il existe $V_y \subset G$ $(V_y \in \mathfrak{B}_y)$. A plus forte raison $V_y \subset V_x$.

Les propriétés 1) à 3) caractérisent la base de l'espace. On a notamment le

THÉORÈME 1. *Supposons qu'à chaque point x d'un ensemble $\mathbf{X}$ est lié un système $\mathfrak{B}_x$ de sous-ensembles de $\mathbf{X}$, tels que soient vérifiées les conditions* 1) *à* 3). *On dira qu'un ensemble $G \subset \mathbf{X}$ est ouvert si pour tout $x \in G$ existe $V \subset G$ $(V \in \mathfrak{B}_x)$. Le système d'ensembles ouverts vérifie les axiomes de l'espace topologique, et dans l'espace topologique ainsi obtenu chaque système $\mathfrak{B}_x$ est une base de voisinages du point x.*

DÉMONSTRATION. La validité des axiomes de l'espace topologique découle manifestement des conditions 1) et 2). Vérifions que pour tout $x \in X$ le système $\mathfrak{B}_x$ est un système fondamental de voisinages du point x. Soit $V \in \mathfrak{B}_x$. Considérons l'ensemble G composé de tous les points $y \in V$ tels qu'existe $V_y \subset V$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Montrons que G est un ouvert. Prenons un point quelconque $z \in G$. Il existe un ensemble $V_z \in \mathfrak{B}_z$ tel que $V_z \subset V$. D'après la condition 3) il existe $V'_z \in \mathfrak{B}_z$ tel que $V'_z \subset V_z$ et pour tout $y \in V'_z$ il existe $V_y \subset V_z$ ($V_y \in \mathfrak{B}_y$). Ce qui veut dire que $y \in G$ et $V'_z \subset G$, c'est-à-dire G est un ouvert et par suite V est un voisinage de x. Il reste à vérifier que $\mathfrak{B}_x$ est un système fondamental de voisinages. Soit U un voisinage quelconque de x. Il existe un ouvert $G \subset U$ contenant le point x. Par définition, on peut trouver donc $V_x \in \mathfrak{B}_x$ tel que $V_x \subset G$ et *a fortiori* $V_x \subset U$.

Le théorème prouvé permet d'introduire une topologie en exhibant des systèmes fondamentaux de voisinages pour chaque point de l'espace. Il se trouve que cette méthode est en principe la plus commode, car pour voisinages on peut prendre généralement des ensembles possédant une structure relativement simple. Par exemple, on peut définir une topologie dans l'espace euclidien avec l'ensemble de toutes les boules (on vérifie sans peine qu'elles forment une base). Traduisons en termes de base les notions fondamentales introduites dans l'espace topologique.

Soient données dans un ensemble X deux bases *): $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$) et $\{\mathfrak{U}_x\}$ ($x \in X$). Chacune d'elles définit une topologie dans X en vertu du théorème 1. Notons X_1 et X_2 les espaces topologiques construits respectivement d'après la première et la deuxième base.

Pour que la topologie de X_1 soit plus faible que celle de X_2 il est nécessaire et suffisant que pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathfrak{B}_x$ il existe un voisinage $U \in \mathfrak{U}_x$ contenu dans V.

La démonstration peu compliquée de ce fait est laissée au soin du lecteur.

De la proposition formulée il résulte que deux bases définissent une même topologie si et seulement si, outre la condition indiquée, est réalisée la condition symétrique: $\forall x \in X$ et $\forall U \in \mathfrak{U}_x$ il existe $V \in \mathfrak{B}_x$ contenu dans U. On dit alors que les bases sont *équivalentes*.

Si X_0 est une partie d'un espace topologique X muni d'une base $\{\mathfrak{B}_x\}$ ($x \in X$), on peut définir la topologie induite dans X_0 à partir de la base $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ ($x \in X_0$), où $\mathfrak{B}_x^{(0)}$ est composée de tous les ensembles de la forme $V \cap X_0$ ($V \in \mathfrak{B}_x$). Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la collection $\{\mathfrak{B}_x^{(0)}\}$ construite vérifie les conditions du théorème 1 et que la topologie définie par cette base est confondue avec la topologie induite.

---

*) Dans la suite par base de X on entendra une collection d'ensembles vérifiant les conditions 1) à 3).

2.4. Avant d'indiquer les conditions de fermeture d'un ensemble en termes de voisinages nous allons introduire une notion importante. Un point x d'un espace topologique X est *point d'adhérence* d'un ensemble $E \subset X$ si l'intersection $V \cap E$ n'est pas vide quel que soit le voisinage V de x. Si de plus cette intersection ne se réduit jamais au seul point x, le point x est appelé *point limite* de l'ensemble E (ou *point d'accumulation*).

Dans la définition du point d'adhérence (resp. du point limite) on peut ne pas tenir compte de tous les voisinages du point x, mais seulement de ceux qui figurent dans un système fondamental de voisinages de ce point.

L'ensemble de tous les points d'adhérence d'un ensemble donné E s'appelle *adhérence* de l'ensemble E et se note $\overline{E}$. On établit sans peine les propriétés suivantes de l'adhérence :

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
2) $E \subset \overline{E}$;
3) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \overline{E}_1 \subset \overline{E}_2$;
4) $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$;
5) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

Vérifions les deux dernières propriétés qui sont les moins évidentes. Soit $E = E_1 \cup E_2$. Comme $E_i \subset E$, alors $\overline{E}_i \subset \overline{E}$ $(i = 1, 2)$; d'où $\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \subset \overline{E}$. Inversement, si $x \in \overline{E}$, en supposant que $x \notin \overline{E}_1$ on trouve un voisinage V_0 du point x tel que $V_0 \cap E_1 = \varnothing$. Soit V un voisinage quelconque du point x. On peut admettre que $V \subset V_0$ (le cas échéant on considère l'intersection $V \cap V_0$). Comme $V \cap E \neq \varnothing$, on doit avoir $V \cap E_2 \neq \varnothing$ et par suite $x \in \overline{E}_2 \subset \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$.

Pour vérifier la dernière propriété il faut simplement montrer que $\overline{\overline{E}} \subset \overline{E}$. Soit $x \in \overline{\overline{E}}$. Considérons un voisinage quelconque V du point x. On peut admettre que V est un ouvert et par conséquent est un voisinage de tous ses points. L'intersection $V \cap \overline{E} \neq \varnothing$. Soit $y \in V \cap \overline{E}$. Comme $y \in \overline{E}$ et que V est un voisinage du point y, alors $V \cap E \neq \varnothing$, ce qui exprime que $x \in \overline{E}$.

Un ensemble $F \subset X$ est fermé si et seulement si $\overline{F} = F$. En effet, si $x \notin F = \overline{F}$ il existe un voisinage V de x qui ne rencontre pas F. Cela signifie que l'ensemble $G = X \setminus F$ est ouvert et par conséquent F est fermé. *Mutatis mutandis* on démontre la réciproque.

Signalons le fait évident que l'adhérence de l'ensemble E est la réunion de E et de tous ses points limites, donc on peut définir un ensemble fermé comme un ensemble contenant tous ses points limites.

Soit $E \subset X$. On désigne par $\mathring{E}$ et on appelle *intérieur* de E l'ensemble de tous les points intérieurs de E. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathring{E}$ est le plus grand des ouverts de E.

Soit X un espace topologique. Un ensemble $E \subset X$ est par définition *dense* dans une partie $X_0 \subset X$ si $\bar{E} \supset X_0$. Si $\bar{E} = X$, on dit que E est *partout dense*. Un ensemble $E \subset X$ n'est *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence est vide (il est équivalent de dire, si $X \setminus \bar{E}$ est partout dense). Un ensemble $E \subset X$ s'appelle *ensemble de première catégorie* si E peut être représenté comme la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles nulle part denses. Dans X, un ensemble E qui n'est pas ensemble de première catégorie s'appelle *ensemble de deuxième catégorie*.

Un espace topologique X est dit *séparable* s'il contient un ensemble dénombrable partout dense. Nous développerons cette notion plus bas.

2.5. Soient X et Y des espaces topologiques. Une application f: $X \to Y$ est par définition *continue* si l'image réciproque de chaque ouvert est un ouvert. L'application $f: X \to Y$ est dite *continue en un point* $x \in X$ si l'image réciproque d'un voisinage quelconque du point $f(x)$ est voisinage du point x (il est évident que cette définition ne change pas si au lieu d'un voisinage quelconque de $f(x)$ on considère un voisinage d'une base de voisinages du point $f(x)$). Le théorème suivant exprime des conditions équivalentes à la continuité.

THÉORÈME 2. *Soient* X *et* Y *des espaces topologiques*, f *une application de* X *dans* Y. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *l'application* f *est continue*;

2) *l'image réciproque de chaque fermé est un fermé*;

3) *l'application* f *est continue en chaque point* $x \in X$;

4) *pour tout point* $x \in X$ *et tout voisinage* U *du point* $f(x)$ *il existe un voisinage* V *du point* x *tel que* $f(V) \subset U$.

DÉMONSTRATION. Les propositions 1) et 2) sont équivalentes en vertu de la relation $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$, $\forall B \subset Y$. L'équivalence de 3) et de 4) est évidente. Comme 3) découle visiblement de 1) il nous reste à prouver que 3) entraîne 1). Soit G une partie ouverte de Y. Prouvons que $f^{-1}(G)$ est un ouvert. Si $x \in f^{-1}(G)$ il existe $y \in G$ tel que $y = f(x)$. Vu que G est voisinage du point y, l'ensemble $f^{-1}(G)$ est voisinage de x par définition de la continuité en x. Donc, x est point intérieur et l'ensemble $f^{-1}(G)$, un ouvert.

Soit f une bijection de X sur Y. Si les applications f et f^{-1} sont continues, on dit que l'application f est un *homéomorphisme*. Il est évident que les espaces X et Y sont homéomorphes si et seulement si existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre.

2.6. Dans la suite il nous sera souvent commode de décrire la topologie d'un espace et de nombreuses notions topologiques en termes de convergence de suites généralisées (convergence au sens de Moore-Smith).

Une suite $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) d'éléments d'un espace topologique X *converge* vers $x \in X$ si pour tout voisinage V de x il existe $\alpha_V \in A$ tel que $x_\alpha \in V$ pour $\alpha \geqslant \alpha_V$. Ce qu'on note : $x_\alpha \underset{A}{\to} x$ ou $x = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$ (dans la suite nous omettrons souvent d'écrire l'ensemble des indices). Le point x s'appelle *limite* de la suite $\{x_\alpha\}$.

Voici quelques propriétés des suites convergentes.

PROPRIÉTÉ 1. *Si* $x_\alpha \underset{A}{\to} x$ *et* $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) *est une sous-suite de* $\{x_\alpha\}$, *alors* $y_\beta \underset{B}{\to} x$.

PROPRIÉTÉ 2. *Soit* $E \subset X$. *Pour que* $x \in \bar{E}$ *il est nécessaire et suffisant qu'existe une suite généralisée* $\{x_\alpha\}$ *telle que* $x_\alpha \to x$ *et* $x_\alpha \in E$.

En effet, si une telle suite existe, alors quel que soit le voisinage V du point x, l'intersection $V \cap E \neq \varnothing$, puisqu'elle contient des éléments de cette suite. Donc, $x \in \bar{E}$.

Supposons maintenant que $x \in \bar{E}$; $\mathfrak{B}_x$ est un système fondamental de voisinages du point x. Pour U, $V \in \mathfrak{B}_x$, on admettra que $U \leqslant V$ si $U \supset V$. Il est clair qu'ainsi ordonné le système $\mathfrak{B}_x$ est une suite généralisée. Choisissons un point x_U dans l'intersection $U \cap E$ qui n'est pas vide, puisque par hypothèse $x \in \bar{E}$. En procédant de même pour chaque $U \in \mathfrak{B}_x$ on obtient une suite généralisée $\{x_U\}$ ($U \in \mathfrak{B}_x$) convergeant vers le point x.

D'où la

PROPRIÉTÉ 3. *Pour qu'un ensemble* F *soit fermé dans* X, *il faut et il suffit que pour toute suite généralisée* $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) *telle que* $x_\alpha \to x$ *et* $x_\alpha \in F$ ($\alpha \in A$) *l'on ait* $x \in F$.

Les espaces topologiques vérifiant seulement les trois axiomes de l'espace topologique peuvent admettre une structure des plus compliquées ou au contraire tellement primitive qu'ils sont impropres à l'étude par les méthodes de la topologie. C'est le cas notamment de l'espace composé de deux ouverts en tout : la partie vide $\varnothing$ et cet espace lui-même.

Pour cette raison, on introduit généralement des axiomes supplémentaires qui distinguent des classes plus étroites d'espaces topologiques, par exemple, l'axiome de séparation de Hausdorff suivant qui assure l'importante propriété de l'unicité de la limite d'une suite généralisée.

Un espace topologique X est *séparé* (on dit encore *espace de Hausdorff*) si pour un couple quelconque x, $y \in X$ il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.

PROPRIÉTÉ 4. *Pour que chaque suite généralisée convergente admette une seule limite il est nécessaire et suffisant que l'espace* X *soit séparé.*

L'unicité de la limite sous l'hypothèse que l'espace X est séparé découle immédiatement de la définition de cette limite.

Prouvons la condition suffisante. Supposons que l'espace X n'est pas séparé. Il existe alors un couple de points distincts x, $y \in X$, tels que quels que soient les voisinages U et V des points x et y l'intersection $U \cap V \neq \varnothing$. Notons A la collection des couples (U, V), où U est un voisinage du point x, et V un voisinage du point y. Si $\alpha' = (U', V')$ et $\alpha'' = (U'', V'')$ sont des éléments de A, on admettra que $\alpha' \leqslant \alpha''$ dans le cas où $U' \supset U''$, $V' \supset V''$ simultanément. Soit $\alpha = (U, V) \in A$. Puisque $U \cap V \neq \varnothing$ on peut choisir $x_\alpha \in U \cap V$. Alors $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$ et partant $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} y$. Vérifions par exemple la première relation. Pour tout voisinage U_0 du point x il existe $x_\alpha \in U_0$. On peut admettre que $\alpha_0 = (U_0, V_0)$, où V_0 est un voisinage du point y. Vu que $\alpha = (U, V) \geqslant \alpha_0$ signifie en particulier que $U \subset U_0$, il vient que $x_\alpha \in U \subset U_0$, c'est-à-dire $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$.

La notion de convergence nous permet de formuler la condition de continuité d'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y de la manière suivante.

PROPRIÉTÉ 5. *Pour que f soit continue il est nécessaire et suffisant que pour tout $x \in X$ et toute suite généralisée $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ telle que $x_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} x$ l'on ait $f(x_\alpha) \underset{A}{\longrightarrow} f(x)$.*

Démontrons la condition suffisante. Soit $\Phi \subset Y$ un fermé et $F = f^{-1}(\Phi)$. Considérons une suite $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ d'éléments de l'ensemble F, convergeant vers $x \in X$. Par hypothèse $f(x_\alpha) \underset{A}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(x_\alpha) \in \Phi$ $(\alpha \in A)$, donc $f(x) \in \Phi$; par suite $x \in F$. L'ensemble F est donc fermé et l'application f continue.

Supposons que f est une application continue. Considérons un point quelconque $x \in X$ et une suite $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ convergeant vers x. Soit U un voisinage du point $y = f(x)$. Il existe un voisinage V du point x tel que $f(V) \subset U$. Par ailleurs, il existe un $\alpha_V \in A$ tel que $x_\alpha \in V$ pour $\alpha \geqslant \alpha_V$. Pour ces mêmes α on a $f(x_\alpha) \in U$, d'où il résulte que $f(x_\alpha) \underset{A}{\longrightarrow} f(x)$ *).

PROPRIÉTÉ 6. *Si l'espace X est tel que chacun de ses points possède un système fondamental dénombrable de voisinages, alors dans les propriétés 2) à 5) on peut remplacer les suites généralisées par des suites ordinaires.*

En effet, supposons que $\mathfrak{B}_x = \{V_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ est une base de voisinages du point x. Posons $U_n = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$. Si la suite $\{x_\alpha\} \underset{A}{\longrightarrow} x$, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ choisissons $\alpha_n \in A$ tel

*) Si cette condition est réalisée pour un point donné x, alors, de la démonstration, il suit que l'application f est continue en ce point.

que $y_n = x_{\alpha_n} \in U$. Alors $y_n \to x$. A l'aide de cette suite on déduit sans peine à partir des propriétés 2) à 5) des propriétés analogues pour les suites.

La propriété 3 de convergence des suites généralisées permet d'introduire une topologie à partir d'une convergence donnée *a priori*. Plus exactement, soient définies dans un ensemble X une convergence, c'est-à-dire une classe de suites généralisées dites convergentes, et une limite (que nous supposerons unique pour la simplicité) pour chaque suite. On admettra par ailleurs que la convergence possède la propriété 1. Un ensemble $F \subset X$ est *fermé* s'il contient la limite de toute suite convergente de ses éléments. Il est immédiat de vérifier que le système d'ensembles fermés ainsi définis satisfait aux conditions 1) à 3) de 2.2, de sorte que X est bien un espace topologique et en tant que tel on peut le munir d'une convergence comme on le fait ordinairement pour un espace topologique. On remarquera que la convergence *a priori* et la convergence topologique qu'elle induit sont généralement distinctes.

2.7. La notion d'espace compact introduite au début des années 1920 par P. Alexandrov et P. Urysohn est l'une des plus importantes notions de topologie générale.

Un espace topologique X est *compact* (ou *bicompact*) si quelle que soit $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), famille d'ouverts recouvrant l'espace X, c'est-à-dire telle que

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi = X,$$

il existe un nombre fini d'ensembles $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \ldots, G_{\xi_n}$, recouvrant également l'espace X.

On dira qu'une famille d'ensembles $\{A_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) forme un *système centré* si l'intersection d'un nombre fini quelconque d'ensembles de cette famille n'est pas vide.

Etant donné qu'affirmer que la famille d'ensembles $\{G_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) forme un recouvrement de l'espace X équivaut à affirmer que l'intersection des complémentaires F_ξ des ensembles G_ξ est vide, il suit que l'espace X est compact si et seulement si l'intersection de chaque système centré d'ensembles fermés n'est pas vide.

Soit $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) une suite généralisée quelconque d'éléments d'un espace topologique X. On dira que la suite $\{x_\alpha\}$ *rencontre souvent* une partie $E \subset X$ si pour tout $\alpha \in A$ il existe un indice $\alpha' \in A$ tel que $\alpha' \geqslant \alpha$ et $x_{\alpha'} \in E$. Un point $x \in X$ est *point limite* de la suite $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) si $\{x_\alpha\}$ rencontre souvent chaque voisinage du point x (à ne pas confondre avec les points limites de l'ensemble $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$!). Une suite généralisée peut posséder un ou plusieurs points limites, ou pas un seul. Par exemple la suite $x_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$) n'admet pas de point limite dans $\mathbb{R}$. Cependant si l'on range d'une façon arbitraire tous les nombres rationnels en suite, alors tout

nombre réel sera point limite de cette suite. Si une suite généralisée converge vers un point, celui-ci en sera un point limite (unique dans le cas d'un espace séparé).

LEMME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point x d'un espace topologique* X *soit point limite d'une suite* $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ *est qu'il existe une sous-suite* $\{y_\beta\}$ $(\beta \in B)$ *convergeant vers* x.

DÉMONSTRATION. Soient x point limite de la suite $\{x_\alpha\}$, $\mathfrak{B}_x$ la famille de tous les voisinages du point x. Considérons l'ensemble B des couples (α, U) tels que $\alpha \in A$, $U \in \mathfrak{B}_x$ et $x_\alpha \in U$. Si nous ordonnons B de la manière suivante: $(\alpha, U) \geqslant (\alpha_1, U)$ si et seulement si $\alpha \geqslant \alpha_1$ et $U \subset U_1$, alors B est filtrant supérieurement. En effet, si (α, U), $(\alpha_1, U_1) \in B$, il existe $U_2 \in \mathfrak{B}_x$ tel que $U_2 \subset U \cap U_1$. Comme A est filtrant supérieurement, il existe $\alpha_0 \geqslant \alpha, \alpha_1$. Puisque $\{x_\alpha\}$ rencontre souvent U_2, il existe $\alpha_2 \geqslant \alpha_0$ et de plus $x_{\alpha_2} \in U_2$. Alors $(\alpha_2, U_2) \geqslant (\alpha, U), (\alpha_1, U_1)$.

Posons $y_{(\alpha, U)} = x_\alpha$, où $(\alpha, U) \in B$. Alors $\{y_{(\alpha, U)}\}$ $((\alpha, U) \in B)$ est une sous-suite de la suite $\{x_\alpha\}$. En effet, pour un $\alpha \in A$ quelconque prenons (α, U), où le voisinage $U \in \mathfrak{B}_x$ vérifie $x_\alpha \in U$ (par exemple $U = X$). Par suite, si $(\alpha_1, U_1) \geqslant (\alpha, U)$, alors $\alpha_1 \geqslant \alpha$ et $y_{(\alpha_1, U)} = x_{\alpha_1}$. Montrons que la suite $\{y_{(\alpha, U)}\}$ est convergente vers x. Prenons $U \in \mathfrak{B}_x$. Puisque x est point limite pour $\{x_\alpha\}$, il existe $\alpha \in A$ tel que $x_\alpha \in U$. Si $(\alpha_1, U_1) \geqslant (\alpha, U)$, alors $y_{(\alpha_1, U_1)} = x_{\alpha_1} \in U_1 \subset U$, ce qui prouve la convergence.

Inversement, supposons que la sous-suite $y_\beta \to x$. Pour tout $\alpha \in A$ il existe un $\beta(\alpha) \in B$ tel que pour tous les $\beta \geqslant \beta(\alpha)$ l'on a $y_\beta = x_{\alpha'}$, avec $\alpha' \geqslant \alpha$. Si U est un voisinage quelconque du point x, il existe $\beta_0 \in B$ tel que pour $\beta \geqslant \beta_0$ l'on a $y_\beta \in U$. Prenons $\beta \geqslant \beta(\alpha), \beta_0$. Il existe alors $\alpha' \geqslant \alpha$ pour lequel $x_{\alpha'} = y_\beta \in U$, ce qui prouve que x est point limite de la suite $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$.

LEMME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique* X *soit compact est que chaque suite généralisée de* X *possède un point limite.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une suite quelconque dans un espace topologique compact X. L'ensemble A étant filtrant supérieurement, la famille d'ensembles $B_\alpha = \{x_{\alpha'} : \alpha' \geqslant \alpha\}$ est centrée, et *a fortiori* la famille de leurs adhérences $\overline{B}_\alpha$. Alors en vertu de la compacité de X, l'intersection de tous les $\overline{B}_\alpha$ contient un point x. Montrons que ce point x est point limite de la suite $\{x_\alpha\}$.

Désignons par $\mathfrak{B}_x$ la famille de tous les voisinages du point x. Il faut vérifier que pour tout voisinage $U \in \mathfrak{B}_x$ et tout $\alpha \in A$ il existe $\alpha_1 \in A$ tel que $\alpha_1 \geqslant \alpha$ et $x_{\alpha_1} \in U$. En effet, la relation $x \in \overline{B}_\alpha$ étant réalisée pour tout $\alpha \in A$, il résulte que pour $U \in \mathfrak{B}_x$ existe $\alpha_1 \geqslant \alpha$ pour lequel $x_{\alpha_1} \in U$.

Prouvons maintenant la réciproque. Soit X un espace topologique dans lequel chaque suite généralisée possède un point limite. Pour prouver la compacité de X nous allons vérifier que l'intersection de toute famille centrée $\mathfrak{F}_0$ de sous-ensembles fermés de X n'est pas vide. Soit A la famille de toutes les intersections finies des éléments de $\mathfrak{F}_0$.

De toute évidence il suffit de montrer que l'intersection de tous les ensembles de A n'est pas vide. La famille $\mathfrak{F}_0$ étant centrée, si nous ordonnons A par l'inclusion ($\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ si $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \supset \alpha_2$), alors A est filtrant supérieurement. Si pour tout $\alpha \in A$ on prend un élément quelconque $x_\alpha \in \alpha$, on obtient la suite $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$). Par hypothèse, cette suite admet x pour point limite. Considérons un ensemble quelconque $\alpha \in A$ et montrons que x est point d'adhérence de α d'où il suivra que $x \in \alpha$ puisque α est fermé. Comme α est arbitraire, le point x appartiendra à l'intersection de tous les ensembles de A et cette intersection ne sera donc pas vide.

Ainsi donc, prenons un voisinage quelconque U du point x. Il existe alors $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha$, pour lequel $x_{\alpha'} \in U$ d'où $x_{\alpha'} \in \alpha' \subset \alpha$ et $x_{\alpha'} \in U \cap \alpha$, ce qui prouve que le point x est point d'adhérence de l'ensemble α.

COROLLAIRE. *Si dans un espace compact* X *une suite* $\{x_\alpha\}$ *possède un point limite* x *unique, alors* $x_\alpha \to x$.

DÉMONSTRATION. Si $\{x_\alpha\}$ ne converge pas vers x, il existe un voisinage U du point x tel que l'ensemble $\{x_\alpha : x_\alpha \notin U\}$ est une sous-suite de $\{x_\alpha\}$ qui, en vertu du lemme 2, doit posséder un point limite. Or, ce point ne peut être x.

Les lemmes 1 et 2 entraînent le

THÉORÈME 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique* X *soit compact est que chaque suite généralisée de* X *renferme une sous-suite convergeant vers un point de* X.

Un espace séparé compact est appelé *compact*.

Un ensemble E d'un espace topologique X est un *compact* si traité comme un espace topologique (avec une topologie induite par la topologie de l'espace X) il est compact. Etant donné que les ouverts de E sont de la forme $G \cap E$, où G est un ouvert de X, on peut formuler la définition de la compacité de l'ensemble E comme suit : quel que soit le système $\{G_\xi\}$ d'ouverts (dans X) recouvrant E, c'est-à-dire un système tel que $\bigcup_\xi G_\xi \supset E$, il existe un nombre fini d'ensembles $G_{\xi_1}, G_{\xi_2}, \ldots, G_{\xi_n}$ recouvrant également E.

THÉORÈME 4. *Si* X *est un espace séparé, tout ensemble compact* $E \subset X$ *est fermé.*

DÉMONSTRATION. Supposons que l'ensemble E possède un point d'adhérence $x_0 \notin E$. Pour chaque $x \in E$ trouvons des voisinages ouverts disjoints V_x du point x et $V_{x_0}^{(x)}$ du point x_0. Il est clair que le système $\{V_x\}$ $(x \in E)$ recouvre l'ensemble E, et par conséquent il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ tels que

$$G = \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \supset E.$$

L'intersection

$$V_0 = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_0}^{(x_k)}$$

est de toute évidence voisinage du point x_0. Cependant, $V_0 \cap E \subset \subset V_0 \cap G = \varnothing$, ce qui contredit le fait que x_0 est point d'adhérence de l'ensemble E.

REMARQUE. Si X est un espace compact et E un fermé de X, alors E est compact.

En effet, les fermés de E seront fermés dans X. Donc, si $\{F_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ est un système centré de fermés dans E, son intersection n'est pas vide et est contenue dans E.

On dira qu'un ensemble E d'un espace topologique X est *relativement compact* si son adhérence est compacte. Il est clair que tout ensemble d'un espace compact est relativement compact.

Soient X un espace compact, f une application continue de X dans un espace topologique Y. On a le

THÉORÈME 5. *L'ensemble f (X) est compact dans l'espace* Y.

DÉMONSTRATION. Posons $A = f(\mathrm{X})$ et soit $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ un système d'ouverts recouvrant A. Supposons que $G'_\xi = f^{-1}(G_\xi)$. Les ensembles G'_ξ $(\xi \in \Xi)$ sont ouverts et de plus $\bigcup_{\xi \in \Xi} G'_\xi = \mathrm{X}$. Donc, il existe des indices $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tels que $\bigcup_{k=1}^{n} G'_{\xi_k} = \mathrm{X}$. Or, $\bigcup_{k=1}^{n} G_{\xi_k} \supset A$. Ce qui prouve le théorème.

COROLLAIRE 1. *Si E est un ensemble compact de* X, *alors f (E) est un ensemble compact de* Y.

Le théorème 4 nous donne le

COROLLAIRE 2. *Si* Y *est un espace séparé, alors l'image f (E) d'un compact $E \subset$* X *est fermée.*

COROLLAIRE 3. *Si l'espace* X *est compact,* Y *séparé et f une bijection continue de* X *sur* Y, *alors l'application inverse f^{-1} est continue, c'est-à-dire f est un homéomorphisme.*

En effet, tout ensemble fermé $F \subset X$ est compact. L'image réciproque de cet ensemble par l'application f^{-1} est $f(F)$, un ensemble fermé en vertu du corollaire 2. L'image réciproque de tout fermé étant un fermé, l'application f^{-1} est continue.

Signalons par ailleurs la propriété importante suivante des fonctions continues sur un compact, généralisant le théorème de Weierstrass pour les fonctions d'une variable réelle.

THÉORÈME 6. *Toute fonction réelle continue f définie sur un compact X présente son suprémum et son infimum sur* X.

DÉMONSTRATION. Nous la ferons pour le suprémum. Soit $M = \sup \{f(x) : x \in X\}$. Le nombre M est fini en vertu du théorème 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geqslant M - 1/n\}.$$

Il est clair que les ensembles F_n sont fermés et non vides. On a de plus, $F_n \subset F_m$ pour $n \geqslant m$. Donc, $\{F_n\}$ est un système centré de fermés et $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, alors $f(x) \geqslant M$, d'où $f(x) = M$, c'est-à-dire la fonction f prend sa valeur maximale au point x.

Nous aurons encore besoin de deux propriétés étroitement liées à la notion de compacité. Soit X un espace topologique. Un ensemble $E \subset X$ est appelé *séquentiellement compact* si toute suite de E contient une suite convergeant vers un point de E (comparer avec le théorème 3). Un ensemble $E \subset X$ est *relativement séquentiellement compact* si toute suite de E contient une suite partielle convergeant vers un point de X. On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *dénombrablement compact* si toute suite de E possède un point limite $x \in E$ (comparer avec le lemme 2). On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *relativement dénombrablement compact* si toute suite de E admet un point limite $x \in X$. On notera que d'une façon générale la compacité n'entraîne pas la compacité séquentielle et inversement. Si un ensemble est compact, il est de toute évidence dénombrablement compact. On examinera plus bas des relations entre les notions introduites dans divers cas particuliers.

2.8. Soit $\{X_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une famille d'espaces topologiques; considérons le produit direct $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (voir § 1). Munissons X d'une topologie en prenant pour base de voisinages d'un point $f \in X$ tout ensemble de la forme $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, où chaque ensemble U_α est le voisinage d'un point $f(\alpha)$ de l'espace X_α; ceci étant, U_α est distinct de X_α au plus pour un nombre fini d'indices $\alpha \in A$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la collection d'ensembles introduite est bien une base. On démontre sans peine que la suite $\{f_\beta\}$ $(\beta \in B)$

dans X convergera vers le point $f \in X$ si et seulement si $f_\beta(\alpha) \underset{B}{\longrightarrow} f(\alpha)$ dans l'espace topologique X_α pour chaque α. Donc, la convergence de la suite $\{f_\beta\}$ d'éléments de l'espace X est une convergence en coordonnées, c'est-à-dire une convergence de chaque « coordonnée » $f_\beta(\alpha)$ vers la « coordonnée » correspondante du point limite f de l'espace X_α.

Pour la suite, nous aurons besoin du théorème de Tikhonov suivant dont on pourra trouver la démonstration, par exemple, dans le livre de Kelley (chapitre 5, théorème 13).

THÉORÈME 7. *Si* X_α *est un espace compact pour tout* $\alpha \in A$, *alors l'espace* $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *est compact.*

Les sujets exposés dans ce paragraphe sont traités de manière plus approfondie dans Bourbaki [V] et Kelley.

Remarque terminologique. Puisque nous aurons à considérer simultanément plusieurs topologies sur un même espace X, nous conviendrons des abréviations suivantes afin d'éviter toute confusion. Si τ est une topologie dans l'espace X, les termes τ-adhérence, ensemble τ-compact, etc., désigneront respectivement adhérence pour la topologie τ, ensemble compact pour la topologie τ, etc.

§ 3. Espaces métriques

3.1. Les espaces métriques constituent une importante classe d'espaces topologiques. Un ensemble X est un *espace métrique* si à tout couple d'éléments $x, y \in X$ est associé un nombre réel $\rho(x, y)$, *distance* de x à y, vérifiant les conditions:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ pour tout $z \in X$ (inégalité triangulaire).

La fonction $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ s'appelle *métrique*. Comme exemples simples d'espaces métriques citons l'espace euclidien à n dimensions $\mathbf{R}^n$ *), un segment de droite, le cercle sous réserve que pour distance l'on prenne la longueur du plus petit arc reliant deux points.

Soit X un espace métrique de métrique ρ. On appelle *boule ouverte* de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre le point $x_0 \in X$, l'ensemble

$$K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

On appelle *boule fermée* (dans la suite on dira simplement *boule*) de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre $x_0 \in X$, l'ensemble

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}.$$

*) Par $\mathbf{R}^n$ on désignera l'espace réel à n dimensions et par $\mathbf{C}^n$ l'espace complexe.

THÉORÈME 1. *La collection d'ensembles* $K_{1/n}(x)$ $(x \in \mathbb{N},\ x \in X)$ *vérifie les conditions* 1) *à* 3) *du* n° 2.3, *c'est-à-dire forme une base dans l'ensemble* X.

DÉMONSTRATION. La condition 1) est immédiate, puisque $\rho(x, x) = 0$. Si $n, m \in \mathbb{N}$ et $p = \max(n, m)$, alors $K_{1/p}(x) \subset K_{1/n}(x) \cap K_{1/m}(x)$. Donc, la condition 2) est réalisée. Si $V_x = K_{1/n}(x)$, on pose $V'_x = K_{1/(2n)}(x)$, d'où $V'_x \subset V_x$. En outre, si $y \in V'_x$ et $V_y = K_{1/(2n)}(y)$, alors $V_y \subset V_x$, puisque en vertu de l'inégalité triangulaire pour tout $z \in V_y$ on a $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < 1/(2n) + 1/(2n) = 1/n$. La condition 3) est donc réalisée.

La construction du théorème 2.1 transforme canoniquement l'espace métrique X en espace topologique muni d'une base de boules ouvertes. Le théorème 1 montre également que chaque point de X admet une base dénombrable. Donc, pour décrire une topologie dans X, il suffit de se limiter aux suites convergentes (cf. 2.6, propriété 6). A noter que dans l'espace topologique obtenu, $x_n \to x$ si et seulement si $\rho(x_n, x) \to 0$.

Un espace topologique dont la topologie est engendrée par une métrique est dit *métrisable* (tout espace topologique n'est pas forcément métrisable ; nous verrons plus loin des exemples de tel espace). A signaler qu'une même topologie peut être engendrée par différentes métriques.

THÉORÈME 2. 1) $\rho(x, y)$ *est une fonction continue en ses arguments, c'est-à-dire si* $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, *alors* $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$.

2) *Un espace métrique est séparé* (*donc, toute suite convergente ne possède qu'une limite*).

DÉMONSTRATION. 1) L'inégalité triangulaire entraîne la relation

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leqslant \rho(y, y') + \rho(x, x').$$

En permutant x, y et x', y', on obtient une inégalité de signe contraire, d'où

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x, x') + \rho(y, y'). \tag{1}$$

Ceci nous donne

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0.$$

2) Si $x \neq x_0$, alors $\varepsilon = \rho(x, x_0)/2 > 0$, et de l'inégalité du triangle il résulte que les boules ouvertes $K_\varepsilon(x)$ et $K_\varepsilon(x_0)$ sont disjointes.

Plus bas, on aura besoin de la notion de distance d'un point à un ensemble $E \subset X$. Comme dans le cas d'un espace euclidien on entendra par distance la quantité

$$\rho(x_0, E) = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x).$$

On voit sans peine que $\rho(x_0, E) = 0$ équivaut à $x_0 \in \overline{E}$.

Soit X_0 une partie d'un espace métrique X. La distance étant définie pour chaque couple d'éléments de l'ensemble X elle l'est par conséquent dans X_0. Il est clair que sont réalisés les axiomes 1) à 3) de l'espace métrique, si bien que X_0 est naturellement un espace métrique. On dit que la métrique de X_0 est *induite* par la métrique de l'espace X ou que l'espace X_0 est un *sous-espace* de l'espace métrique X.

Supposons qu'entre les éléments de deux espaces métriques X et Y on puisse établir une correspondance biunivoque telle que les distances entre les couples correspondants d'éléments des espaces X et Y soient égales. De tels espaces sont dits *isométriques*. Il est clair que toutes les relations métriques valables dans un des espaces isométriques le sont également dans l'autre, donc de tels espaces ne se distingueront que par la nature de leurs éléments et non par les propriétés *essentielles* de ces espaces, c'est-à-dire celles liées à la distance. Cette circonstance nous permet d'*identifier* les espaces isométriques.

3.2. Voici quelques exemples plus complexes d'espaces métriques. Dans cet ouvrage, on étudie essentiellement des espaces dont les éléments sont des fonctions. Ici et dans la suite lorsqu'on introduira un espace X dont les éléments sont des fonctions numériques, sauf mention du contraire on entendra simultanément deux espaces : l'espace réel X de toutes les fonctions réelles vérifiant les conditions données et l'espace complexe X de toutes les fonctions complexes vérifiant les mêmes conditions. En principe, on ne fera aucune distinction dans la notation de ces espaces. Si une proposition ne mentionne pas l'espace envisagé c'est que cette proposition est valable dans les deux cas.

1) Soit K un compact. L'espace $\mathbf{C}(K)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues sur K, dans lequel la distance entre les fonctions x et y est définie comme suit :

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

On omettra la vérification des conditions 1) à 3) car elle ne présente aucune difficulté. Etant donné qu'une fonction continue sur un compact atteint son maximum (cf. théorème 2.6), on peut écrire aussi

$$\rho(x, y) = \max_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

La convergence de la suite $\{x_n\}$ d'éléments de l'espace $\mathbf{C}(K)$ vers le point x_0 équivaut à la convergence uniforme de la suite de fonctions $x_n(t)$ vers la fonction $x_0(t)$. En effet, si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre N tel que $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, c'est que pour les mêmes n

$$\sup_{t \in K} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon,$$

de sorte que pour tous les $t \in K$ on a

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon \quad (n \geqslant N),$$

d'où suit la convergence uniforme.

La réciproque est évidente : la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue entraîne la convergence des éléments correspondants de l'espace $\mathbf{C}(K)$. Si $K = [a, b]$, on écrit $\mathbf{C}[a, b]$.

2) L'espace s est l'ensemble de toutes les suites numériques dans lequel la distance de la suite $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ à $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots)$ est définie par la formule

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

La vérification des axiomes 1) et 2) de l'espace métrique ne présente aucune difficulté. La condition 3) découle de ce que la fonction $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ est croissante pour $\lambda \geqslant 0$, et par conséquent on a l'inégalité

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}. \tag{2}$$

Si la suite $\{x_n\}$ $(x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots), n = 1, 2, \ldots)$ converge vers l'élément $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}, \ldots)$ cela signifie que

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

c'est-à-dire la convergence d'une suite de points dans s est une convergence en coordonnées (chaque coordonnée du point x_n converge vers la coordonnée correspondante du point limite x_0).

En effet, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} \leqslant \rho(x_n, x_0) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

pour $x_n \to x_0$ entraîne $\xi_k^{(n)} \to \xi_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Au contraire, si la condition (3) est réalisée, le passage à la limite terme à terme est licite, puisque la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|}{1 + |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}|} = \rho(x_n, x_0)$$

est uniformément convergente en n (elle est majorée par la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$), et comme chaque terme de la série tend vers 0 il vient $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

D'où il suit que l'espace s est un produit topologique d'une famille dénombrable de droites.

Citons encore l'espace $C^{(l)}[a, b]$ (pour éviter de le confondre avec l'espace des nombres complexes C^n on mettra l'indice entre parenthèses) dont les éléments sont des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ et possédant sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre l compris. On peut définir la distance entre $x, y \in C^{(l)}[a, b]$ comme suit:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|$$

$$(x^{(0)}(t) = x(t), \quad y^{(0)}(t) = y(t)).$$

La convergence dans $C^{(l)}[a, b]$ signifie la convergence uniforme aussi bien de la suite des fonctions que de celle de leurs dérivées k-ièmes $(1 \leqslant k \leqslant l)$.

On peut envisager aussi l'espace $C^{(l)}(D)$ composé de fonctions continues avec toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre l compris, dans un domaine D d'un espace multidimensionnel (cf. IV, 4.4).

Signalons que, si l'on munit $C(K)$ de la relation d'ordre: $x \geqslant y$ si et seulement si $x(t) \geqslant y(t)$ pour tout $t \in K$, et dans s on convient que $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \geqslant y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ si et seulement si $\xi_k \geqslant \eta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $C(K)$ et s seront des ensembles ordonnés (mais pas totalement ordonnés).

§ 4. Complétude et séparabilité. Ensembles de première et deuxième catégories *)

Les axiomes de l'espace métrique entraînent une série d'autres propriétés de la distance et de la limite, analogues aux propriétés classiques des nombres réels; par exemple, si $x_n^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n$, $x_n \to x_0$, on a la suite $x_n^{(k_n)} \to x_0$. Cependant, certaines propositions importantes sur la limite, valables pour un ensemble de nombres réels, ne peuvent être déduites à partir des axiomes de l'espace métrique et généralement ne sont pas vérifiées dans un espace métrique quelconque. Il semble donc naturel de distinguer parmi les espaces métriques des classes d'espaces dans lesquelles la métrique satisfait à des conditions supplémentaires généralisant les autres propriétés fondamentales de la distance et de la convergence dans l'espace des réels.

4.1. La plus importante de ces propriétés est la complétude. S'agissant des nombres réels, le principe de complétude peut être

*) Les ensembles de première et deuxième catégories ont été introduits par R. Baire.

énoncé sous diverses formes (principe de Dedekind, l'existence d'une borne d'un ensemble borné, etc.), mais l'une d'elles seulement — le critère de convergence de Cauchy — ne fait pas intervenir dans l'énoncé des notions autres que les notions métriques. Nous adopterons le critère général de Cauchy pour définition de la complétude d'un espace métrique quelconque. Plus exactement, soit la définition suivante.

On dit qu'une suite $\{x_n\}$ de points d'un espace métrique X est *suite de Cauchy* *) si $\rho(x_m, x_n) \to 0$ $(m, n \to \infty)$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε pour lequel $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour $m, n \geqslant N_\varepsilon$.

On dit qu'un espace métrique X est *complet* si chaque suite de Cauchy $\{x_n\}$ est convergente, c'est-à-dire il existe un point $x_0 \in X$ tel que $x_n \to x_0$.

Il est évident que dans tout espace métrique chaque suite convergente est suite de Cauchy.

Donc, dans un espace complet on a le

CRITÈRE DE CONVERGENCE DE CAUCHY : *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{x_n\}$ soit convergente est qu'elle soit de Cauchy.*

La propriété de complétude reste en vigueur lorsqu'on passe de l'espace X à l'un de ses sous-espaces fermés X_0. En effet, si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy de X_0, en vertu de la complétude de l'espace X il existe $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. L'espace X_0 étant fermé, on a $x_0 \in X_0$, c'est-à-dire la suite $\{x_n\}$ est convergente dans X_0.

Il est aisé de voir que, si l'espace X_0 n'est pas fermé, notre assertion n'est plus valable. Il suffit par exemple de prendre pour X l'espace des réels et pour X_0 l'espace des nombres rationnels de X.

Le lemme suivant facilite souvent la vérification de la complétude d'un espace métrique.

LEMME 1. *Si une suite de Cauchy $\{x_n\}$ contient une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ convergeant en x, alors $x_n \to x$.*

DÉMONSTRATION. $\{x_n\}$ étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour $n, m \geqslant N$. Pour $n_k \geqslant N$, on a

$$\rho(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon. \tag{1}$$

Vu que $x_{n_k} \to x$, le passage à la limite dans (1) donne $\rho(x_n, x) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $x_n \to x$.

4.2. On se propose de vérifier que tous les espaces métriques mentionnés dans le § 3 sont complets.

*) Ou *suite convergeant en soi* ou encore *suite fondamentale.*

1) L'ESPACE $\mathbf{C}(K)$. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbf{C}(K)$. Si $\varepsilon > 0$, alors pour m et n ($m, n \geqslant N_\varepsilon$) assez grands on a

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{t \in K} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

Donc

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in K. \tag{2}$$

Si l'on fixe $t \in K$, on constate que la suite numérique $\{x_n(t)\}$ est une suite de Cauchy et par conséquent existe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$, que nous noterons $x_0(t)$. Il reste encore à prouver que x_0 appartient à $\mathbf{C}(K)$ et que x_n converge vers x_0 pour la métrique de cet espace. Dans (2), le passage à la limite pour $m \to \infty$ donne

$$|x_0(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où il résulte que la suite de fonctions $\{x_n(t)\}$ converge uniformément vers une fonction $x_0(t)$, ce qui entraîne la continuité de la fonction $x_0(t)$ et la convergence de la suite $\{x_n\}$ vers x_0 dans l'espace $\mathbf{C}(K)$.

On vérifie de façon analogue la complétude de l'espace $\mathbf{C}^{(l)}$.

2) L'ESPACE s. La complétude de l'espace s s'établit de façon très simple. Si $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots)$ est une suite de Cauchy, en utilisant une inégalité de type (4) § 3, on s'assure sans peine que chacune des suites numériques $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots$, est également de Cauchy, et de ce fait il existe la limite $\xi_k^{(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \ldots$). En supposant que $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}, \ldots)$, on constate que $x_n \to x_0$ dans s (puisque la convergence dans s est une convergence en coordonnées).

4.3. De même que l'ensemble des nombres rationnels est inclus dans celui des réels, de même un espace métrique quelconque peut être inclus dans un espace métrique complet.

On appelle *complétion* d'un espace X le plus petit espace métrique complet contenant l'espace X. (Le terme « plus petit » est compris au sens que la complétion est contenue dans tout autre espace complet renfermant X. On rappelle que les espaces isométriques sont identifiés (voir 3.1).)

THÉORÈME 1. *Tout espace métrique admet une complétion.*

DÉMONSTRATION *). Soit X un espace métrique. On dira que deux suites de Cauchy $\{x_n\}$ et $\{x_n'\}$ sont *équivalentes* si $\rho(x_n, x_n') \to 0$. Il est clair que, si l'une des suites équivalentes est convergente,

*) Cf. Hausdorff. En fait la démonstration est calquée sur le processus de Cantor-Méray d'introduction des réels.

l'autre l'est également vers le même point. En effet, si par exemple $x_n \to x$, alors

$$\rho(x'_n, x) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x_n, x) \to 0,$$

donc $x'_n \to x$.

Partitionnons l'ensemble de toutes les suites de Cauchy en classes de suites équivalentes. Soit Ξ l'ensemble de toutes ces classes. Il est évident que deux suites équivalentes à une troisième sont équivalentes, donc une suite ne peut appartenir à deux classes différentes.

Soient ξ et η des classes de Ξ. Choisissons de façon arbitraire une suite $\{x_n\}$ dans la classe ξ et une suite $\{y_n\}$ dans la classe η. L'inégalité (1) § 3 donne

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n).$$

Les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ étant de Cauchy, le second membre tend vers 0, et la série numérique $\{\rho(x_n, y_n)\}$ est convergente. Posons

$$\rho(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

$\rho(\xi, \eta)$ est définie de façon unique par les classes ξ et η. En effet, si une suite $\{x'_n\}$ est équivalente à $\{x_n\}$ et $\{y'_n\}$ à $\{y_n\}$, en passant à la limite dans l'inégalité

$$|\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n),$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Vérifions maintenant que $\rho(\xi, \eta)$ satisfait aux axiomes 1) à 3) de l'espace métrique.

Pour vérifier la condition 1) il faut prouver que $\rho(\xi, \eta) = 0$ entraîne $\xi = \eta$. En conservant les notations précédentes, on voit que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

c'est-à-dire les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont équivalentes, et les classes ξ et η sont alors confondues.

La condition 2) est évidente.

La condition 3) s'obtient par passage à la limite à partir de l'inégalité

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(y_n, z_n).$$

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ sont des suites appartenant respectivement aux classes ξ, η, ζ.

Donc, l'ensemble Ξ des classes de suites équivalentes est un espace métrique.

Montrons que l'espace initial X peut être considéré comme un sous-espace de Ξ.

Prenons un point $x \in X$ et désignons par $\xi_x \in \Xi$ la classe des suites contenant la suite $(x, x, \ldots, x, \ldots)$, c'est-à-dire la classe des suites convergeant en x. De toute évidence, $\xi_x = \xi_y$ équivaut à $x = y$. D'autre part, $\rho(\xi_x, \xi_y) = \rho(x, y)$, ce qui est le plus facile à établir si l'on considère les suites $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ et $(y, y, \ldots, y, \ldots)$ comme représentants des classes ξ_x et ξ_y.

De ce qui précède il est clair qu'en identifiant l'élément $x \in X$ à la classe $\xi_x \in \Xi$, nous plongeons X isométriquement dans l'espace métrique Ξ.

Dorénavant, on peut considérer X comme un sous-espace de l'espace Ξ et se servir de l'ancienne notation x pour les éléments de ξ_x. Signalons encore le fait suivant. Soit $\{x_n\}$ une suite déterminante de la classe ξ. On a alors $\xi_{x_n} = x_n \to \xi$ (dans Ξ). En effet, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour $n, m \geqslant N_\varepsilon$, mais alors $\rho(x_n, \xi) = \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_\varepsilon$, d'où il est clair que $x_n \to \xi$ (dans Ξ). D'après ce qui vient d'être démontré, pour tout $\xi \in \Xi$ on peut trouver $x \in X$ tel que $\rho(x, \xi) < \varepsilon$ (pour x on peut prendre un x_n quelconque, avec $n \geqslant N_\varepsilon$).

Prouvons maintenant que l'espace Ξ est complet. Soit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$ une suite fondamentale de classes. Soit une suite $\varepsilon_n \to 0$. D'après ce qu'on a démontré plus haut, pour chaque n existe $x^{(n)} \in X$, tel que $\rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) < \varepsilon_n$. De l'inégalité

$$\rho(x^{(n)}, x^{(m)}) \leqslant \rho(x^{(n)}, \xi^{(n)}) + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \\ + \rho(\xi^{(m)}, x^{(m)}) < \varepsilon_n + \varepsilon_m + \rho(\xi^{(n)}, \xi^{(m)})$$

il est clair que la suite $\{x^{(n)}\}$ est de Cauchy. Elle définit donc une classe ξ, de telle sorte que $\rho(x^{(n)}, \xi) \to 0$. Mais

$$\rho(\xi^{(n)}, \xi) \leqslant \rho(\xi^{(n)}, x^{(n)}) + \rho(x^{(n)}, \xi) < \varepsilon_n + \rho(x^{(n)}, \xi),$$

d'où $\xi^{(n)} \to \xi$ dans Ξ, ce qui prouve que l'espace est complet.

Si H est un autre espace complet renfermant X, alors en identifiant les éléments de H qui sont limites de suites fondamentales de points de X avec les classes de suites équivalentes, il vient, en vertu de la complétude de H, que $\Xi \subset H$.

Nous avons donc construit la complétion de l'ensemble X.

4.4. Nous allons étudier les propriétés de la densité et de la séparabilité, introduites au 2.4 pour des espaces topologiques quelconques.

Soit X un espace métrique. Il est évident qu'un ensemble $E \subset X$ est dense dans une partie $X_0 \subset X$ si pour tout $x \in X_0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $z \in E$ satisfaisant $\rho(x, z) < \varepsilon$, ou ce qui revient au même, pour tout $x \in X_0$ existe une suite $\{x_n\} \subset E$ telle que $x_n \to x$.

On voit sans peine que tout espace X est un ensemble dense dans sa complétion.

En effet si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ est une suite de la classe $\xi \in \Xi$, alors comme on l'a montré en prouvant le théorème 1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, d'où suit notre assertion.

On rappelle qu'un espace métrique X est *séparable*, s'il contient une partie dense dénombrable.

Si un espace métrique X_0 *est sous-espace d'un espace métrique séparable* X, *il est lui-même séparable.*

Soient X_0 une partie de l'espace X et $D = \{x_k\}$ un ensemble dénombrable dense dans X. Considérons une suite numérique $\varepsilon_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$) et pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ cherchons dans X_0 un élément z_{kn} tel que

$$\rho(x_k, z_{kn}) < \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n.$$

Soient $x \in X_0$ et $\varepsilon > 0$; il existe un élément $x_k \in D$ tel que $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Si l'on prend n assez grand pour que $\varepsilon_n < \varepsilon$, on obtient

$$\rho(x, z_{kn}) \leqslant \rho(x, x_k) + \rho(x_k, z_{kn}) < \varepsilon + \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \rho(x_k, x) + \varepsilon_n < 3\varepsilon,$$

d'où il suit que l'ensemble $D_0 = \{z_{kn}\}$ est dense dans X_0.

4.5. *Les espaces* $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$, $\mathbf{C}^{(l)}$, s *sont séparables* *). Pour $\mathbf{R}^n$ cette affirmation est évidente. Pour ensemble dense dénombrable on peut prendre par exemple l'ensemble des points à coordonnées rationnelles.

Pour ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{C}[a, b]$ on peut prendre l'ensemble de tous les polynômes algébriques à coefficients rationnels. En effet, le théorème classique de Weierstrass (cf. IV, 4.1) dit que toute fonction continue peut être uniformément (c'est-à-dire dans la distance de $\mathbf{C}[a, b]$) approximée par un polynôme avec n'importe quelle précision donnée à l'avance. Par ailleurs, il est clair que par une variation aussi petite que l'on veut du polynôme on peut en rendre rationnels tous les coefficients. Donc, pour toute fonction continue $x(t)$, il existe un polynôme à coefficients rationnels, aussi proche que l'on veut de $x(t)$ pour la métrique de $\mathbf{C}[a, b]$.

Dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$, pour ensemble dénombrable dense, on peut prendre également l'ensemble de toutes les fonctions linéaires par morceaux dont les graphes sont des lignes polygonales ayant leurs sommets en des points rationnels.

---

*) Nous donnons la démonstration seulement dans le cas d'espaces réels; le cas complexe se ramène facilement au cas réel.

On laisse au soin du lecteur la démonstration de la séparabilité de l'espace $\mathbf{C}^{(l)}[a, b]$.

Un ensemble dénombrable dense dans l'espace s est l'ensemble $\mathbf{r}_0$ de toutes les suites de nombres rationnels à nombre fini de termes non nuls. En effet, si dans la suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n, \ldots)$ déterminant l'élément x de s, on remplace par des zéros tous les termes de rang $\geqslant n+1$, on obtient la suite $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n, 0, \ldots) = [x]_n$, qui en tant qu'élément de l'espace s présente un écart $< 1/2^n$ par rapport à la précédente.

La convergence dans s étant une convergence en coordonnées, on peut de toute évidence approcher aussi près que l'on veut la suite obtenue (en tant qu'élément de s) par une suite d'éléments de $\mathbf{r}_0$.

4.6. *Tout espace métrique n'est pas séparable.* Pour construire un exemple d'espace *non séparable* nous allons considérer un ensemble infini T et l'ensemble $\mathbf{l}^\infty(T)$ de toutes les fonctions réelles bornées définies sur T. Si pour $x, y \in \mathbf{l}^\infty(T)$ on pose

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|,$$

alors on fait de $\mathbf{l}^\infty(T)$ un espace métrique complet dans lequel la convergence est la convergence uniforme de la suite correspondante de fonctions.

Ces assertions se vérifient comme pour l'espace $\mathbf{C}(K)$. Prouvons que l'espace $\mathbf{l}^\infty(T)$ n'est pas séparable.

Soit l'ensemble $M_0 \subset \mathbf{l}^\infty(T)$ de toutes les fonctions caractéristiques, c'est-à-dire des fonctions prenant seulement la valeur zéro et un. Cet ensemble n'est pas dénombrable *). Soit D un ensemble dense dans $\mathbf{l}^\infty(T)$. A chaque $x \in M_0$ associons $z \in D$ tel que

$$\rho(x, z) < 1/2.$$

A deux éléments x et x' distincts de M_0 sont associés deux éléments z et z' distincts de D. En effet, si

$$\rho(x, z) < 1/2 \quad \text{et} \quad \rho(x', z) < 1/2,$$

on aurait

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x, z) + \rho(x', z) < 1,$$

alors qu'on doit avoir

$$\rho(x, x') = 1.$$

Donc, l'ensemble non dénombrable M_0 est mis en correspondance biunivoque avec une partie de l'ensemble D. Par suite, D n'est pas dénombrable.

4.7. Il est aisé de voir qu'une partie E d'un espace métrique X n'est *nulle part dense* si elle n'est dense dans aucune boule, c'est-à-dire

*) Natanson [II], chapitre I, § 4, théorème 8.

si pour une boule $K_\varepsilon(x)$ quelconque il existe une boule $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset \subset K_\varepsilon(x)$ qui ne contient aucun point de E (cf. 2.4).

Un exemple d'ensemble nulle part dense dans un espace euclidien à deux dimensions (un plan) est l'ensemble des points d'une droite. L'ensemble des points dont les deux coordonnées sont rationnelles est un ensemble de première catégorie : c'est la somme d'un ensemble dénombrable d'ensembles ponctuels. Cet ensemble est dense dans $\mathbf{R}^2$ bien qu'il soit de première catégorie.

La réponse au problème de l'existence d'ensembles de deuxième catégorie est fournie par le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Un espace métrique complet* X *est un ensemble de deuxième catégorie (dans soi).*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire que X est un ensemble de première catégorie, de sorte que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, où E_k ne sont nulle part denses. E_1 n'étant nulle part dense, il existe une boule $K_{\varepsilon_1}(x_1)$ ne contenant pas de points de l'ensemble E_1. L'ensemble E_2 n'étant nulle part dense, la boule $K_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ contient une boule $K_{\varepsilon_2}(x_2)$ ne renfermant pas de points de E_2. Ceci étant, on peut considérer que $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1/2$.

En poursuivant ce raisonnement, on obtient une suite de boules $\{K_{\varepsilon_n}(x_n)\}$ telles que

$$K_{\varepsilon_n}(x_n) \subset K_{\frac{\varepsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}), \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap E_n = \varnothing,$$

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

La boule $K_{\varepsilon_n/2}(x_n)$ contenant toutes les boules suivantes, on aura

$$\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon_n/2. \tag{3}$$

Comme de toute évidence $\varepsilon_n \to 0$, la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy et par suite, la complétude de l'espace X entraîne l'existence de $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

En passant à la limite dans (3) (pour $p \to \infty$), on obtient

$$\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon_n/2 < \varepsilon_n,$$

de sorte que $x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$ et par suite $x \notin E_n$ pour aucun $n = 1, 2, \ldots$ Par ailleurs, $x \in X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donc x est contenu au moins dans un E_n.

REMARQUE. En modifiant un peu la démonstration, on obtient un résultat plus puissant, savoir que dans un espace complet, tout ouvert non vide est de deuxième catégorie.

COROLLAIRE. *Dans un espace complet, le complémentaire d'un ensemble de première catégorie est toujours un ensemble de deuxième catégorie.*

Les ensembles de cette nature sont appelés *résidus*. Signalons le fait suivant: l'intersection d'un ensemble dénombrable de résidus est un résidu. En effet, si A_k sont des résidus, alors $A_k = X \setminus E_k$, où E_k sont des ensembles de première catégorie. Vu que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ et que de toute évidence $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ est de première catégorie, alors il s'ensuit que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ est un résidu.

Il est clair également qu'un ouvert dense dans un espace métrique complet est un résidu, puisque de toute évidence son complémentaire n'est nulle part dense.

On laisse au lecteur le soin de s'assurer à titre d'exercice que l'ensemble des nombres réels dont la décomposition en fraction k-adique ne contient, à partir d'un certain rang, plus un chiffre choisi, est un ensemble de première catégorie dans l'espace des réels, et d'en déduire qu'il existe des nombres dont la décomposition en fraction k-adique (pour tous les k) contient chaque chiffre significatif une infinité de fois (l'ensemble de tels nombres est un résidu).

§ 5. Compacité dans les espaces métriques

5.1. Dans 2.7, nous avons introduit les notions de compacité et de compacité séquentielle et nous avons signalé que ces notions n'étaient pas en général identiques. Cependant, il apparaît important de distinguer les classes d'ensembles où ces notions sont confondues. Nous allons montrer que tel est le cas dans la classe des espaces métriques. Du reste, la condition de métrisabilité n'est pas nécessaire (voir chapitre VIII).

LEMME 1. *Un point x d'un espace métrique X est limite d'une suite $\{x_n\}$ si et seulement si existe une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ convergeant vers x.*

DÉMONSTRATION. Soit x limite de la suite $\{x_n\}$. Notons U_n la boule $K_{1/n}(x)$. Considérons un point quelconque $x_{n_1} \in U_1$. Supposons qu'on ait construit $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, où $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ et $x_{n_i} \in U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Le point x étant point limite, il existe $m > n_k$ pour lequel $x_m \in U_{k+1}$. Posons $n_{k+1} = m$. Alors la suite partielle construite $x_{n_k} \to x$. La réciproque découle du lemme 2.1.

La condition de compacité d'un espace est une condition assez forte qui distingue une classe relativement étroite d'espaces, notamment plus étroite que celle des espaces complets et séparables. On a le

THÉORÈME 1. *Un espace métrique compact est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique compact X. En vertu du lemme 2.2, la suite $\{x_n\}$ possède un point limite x. D'après le lemme 1, il existe une suite partielle $x_{n_k} \to x$. Donc, en vertu du lemme 4.1, il vient que $x_n \to x$.

Introduisons la définition importante suivante.

Soient $\varepsilon > 0$ un nombre positif donné, M un ensemble de l'espace métrique X. On dit que l'ensemble M est un *ε-réseau* pour un ensemble $E \subset X$ si pour chaque point $x \in E$, il existe dans M un point z tel que $\rho(x, z) < \varepsilon$.

THÉORÈME 2. *Soit* X *un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

1) X *est compact*;

2) X *est séquentiellement compact*;

3) X *est dénombrablement compact*;

4) X *est complet et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe dans* X *un ε-réseau fini* (*pour* X).

DÉMONSTRATION. 2) $\Rightarrow$ 3) est vraie dans tout espace topologique; 3) $\Rightarrow$ 2) en vertu du lemme 1; 1) $\Rightarrow$ 3) dans tout espace topologique (voir lemme 2 du § 2). Prouvons maintenant que 2) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 4). On démontre la complétude de X comme le théorème 1. Supposons que la condition 4) n'est pas réalisée, c'est-à-dire supposons que pour un $\varepsilon > 0$ il n'existe pas de ε-réseau fini. Prenons un point quelconque $x_1 \in X$. L'ensemble constitué du seul point x_1 ne forme pas d'ε-réseau pour X, donc il existe $x_2 \in X$ tel que $\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$. L'ensemble $\{x_1, x_2\}$ ne peut pas non plus être ε-réseau pour X. Par suite, il existe $x_3 \in X$, et de plus $\rho(x_i, x_3) \geqslant \varepsilon$ ($i = 1, 2$). En poursuivant ce raisonnement on arrive à une suite $\{x_n\}$ de points de X, telle que $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$ ($m \neq n$, $m, n = 1, 2, \ldots$). Il est évident que de cette suite l'on ne peut extraire aucune suite partielle convergente, ce qui contredit la compacité séquentielle de X.

4) $\Rightarrow$ 2). Supposons que la condition 4) est réalisée. Prenons une suite quelconque $\{x_n\}$ d'éléments de X et montrons qu'on peut en extraire une suite partielle convergente. A cet effet donnons-nous une suite numérique $\varepsilon_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$) et considérons le ε_1-réseau qui existe par hypothèse. Si l'on construit des boules de rayons ε_1 centrées aux points du ε_1-réseau, chaque point de X sera contenu au moins dans l'une de ces boules. Comme les boules sont en nombre fini, l'une d'elle contiendra une infinité d'éléments de la suite $\{x_n\}$. Désignons cette dernière par $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Prenons ensuite un ε_2-réseau et considérons les boules de rayon ε_2 centrées en ses points. Comme précédemment l'une de ces boules contiendra une infinité

d'éléments de la suite $\{x_n\}$, appartenant à $K_{\varepsilon_1}(z_1)$. Supposons que c'est la boule $K_{\varepsilon_2}(z_2)$. En poursuivant cette procédure on obtient une suite de boules $K_{\varepsilon_1}(z_1)$, $K_{\varepsilon_2}(z_2)$, . . ., $K_{\varepsilon_n}(z_n)$, . . . telles que l'intersection d'un nombre fini d'entre elles renfermera une infinité de points de cette suite. On peut donc choisir

$$x_{n_1} \in K_{\varepsilon_1}(z_1), \quad x_{n_2} \in K_{\varepsilon_2}(z_2) \cap K_{\varepsilon_1}(z_1) \quad (n_2 > n_1)$$

et d'une façon générale

$$x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k} K_{\varepsilon_i}(z_i) \quad (n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1).$$

Les éléments x_{n_k} et x_{n_l} appartenant à la boule $K_{\varepsilon_k}(z_k)$ $(k \leqslant l)$, il vient

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(x_{n_l}, z_k) < 2\varepsilon_k.$$

Donc la suite $\{x_{n_k}\}$ est de Cauchy et, par suite de la complétude de l'espace X, converge vers un élément $x_0 \in X$. Ceci démontre la compacité séquentielle de X.

Nous avons prouvé que 2) $\Longleftrightarrow$ 4). Déduisons maintenant 1) à partir de 2) et 4), ce qui achèvera la démonstration du théorème 2.

Signalons tout d'abord qu'un espace possédant la propriété 4) est séparable. En effet, si $\varepsilon_k \to 0$ et M_k $(k \in \mathbb{N})$ est un ε_k-réseau fini, alors $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ sera visiblement un ensemble dénombrable dense dans l'espace donné *).

Lemme 2. *Soient* X *un espace séparable métrique quelconque,* $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *un système d'ouverts recouvrant l'espace* X. *On peut alors extraire du système* $\{G_\xi\}$ *un recouvrement dénombrable de l'espace* X.

Démonstration. Appelons D un ensemble dénombrable dense dans X et considérons toutes les boules de rayons rationnels centrées en les points de D. L'ensemble de ces boules est visiblement dénombrable. Numérotons les boules indiquées: $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ Pour chaque $x \in X$ et $\xi \in \Xi$ il existe de toute évidence une boule $S_{n(x,\xi)}$ telle que

$$x \in S_{n(x,\xi)} \subset G_\xi. \tag{1}$$

*) Eu égard à ces raisonnements, nous voudrions attirer l'attention sur la différence existant entre les notions d'espace compact et d'espace séparable. Dans un espace séparable on a vu qu'il existait un ensemble dénombrable avec les éléments duquel il était possible d'approcher aussi près que l'on veut tout élément de cet espace. Dans un espace compact on a également cette possibilité en construisant un ensemble M, réunion d'ε_k-réseaux. Cependant ici, avec un ε-réseau, c'est-à-dire un nombre fini d'éléments, on peut simultanément approcher chaque élément de l'espace, ce qui en général n'est pas possible dans un espace séparable.

Lorsque x parcourt X, et ξ, Ξ, les indices $n(x, \xi)$ parcourent un ensemble dénombrable $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, et de plus les boules $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}, \ldots$ recouvrent l'espace X. Pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ choisissons $\xi_k \in \Xi$ tel que $n(x_k, \xi_k) = n_k$ pour un $x_k \in X$. En vertu de (1)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\xi_k} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n(x_k, \xi_k)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k} = X.$$

Achevons la démonstration du théorème 2. Supposons encore que X est séquentiellement compact. Considérons un recouvrement $\{G_\xi\}$ de l'espace X par des ouverts. L'espace X étant séparable, en vertu du lemme 2 on peut considérer que le recouvrement $\{G_\xi\}$ est dénombrable, c'est-à-dire ξ parcourt l'ensemble des entiers naturels. Supposons que les ensembles

$$F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^{n} G_\xi$$

ne sont vides pour aucun $n \in \mathbb{N}$. Prenons un point x_n dans l'ensemble F_n. De la suite $\{x_n\}$ on peut extraire une suite partielle convergente $\{x_{n_k}\}$. Supposons par exemple que $x_{n_k} \to x$. Du fait que pour $n_k \geqslant n$ on a $x_{n_k} \in F_n$ et que F_n est fermé, il vient que $x \in F_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Autrement dit

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = X \setminus \bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi,$$

ce qui est impossible puisque $\bigcup_{\xi=1}^{\infty} G_\xi = X$.

Donc, pour un n on aura $X = \bigcup_{\xi=1}^{n} G_\xi$ et l'espace X est compact. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Nous avons incidemment établi le

COROLLAIRE 1. *Un espace métrique compact est séparable.*

COROLLAIRE 2. *Soit E un ensemble d'un espace métrique* X. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *E est relativement compact*;
2) *E est relativement séquentiellement compact*;
3) *E est relativement dénombrablement compact.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2) en vertu du théorème 2; 2) $\Rightarrow$ 3) est évident; prouvons que 3) $\Rightarrow$ 1). En vertu du théorème 2, il suffit de montrer que l'adhérence $\overline{E}$ est dénombrablement compacte. Soit

$\{x_n\}$ une suite de $\bar{E}$. Pour chaque n prenons $y_n \in E$ tel que $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. E étant relativement dénombrablement compact, la suite $\{y_n\}$ admet un point limite $x \in \bar{E}$. De toute évidence, x est aussi limite de $\{x_n\}$.

LEMME 3. *Soit E un ensemble d'un espace métrique* X. *Si dans* X *existe un ε-réseau fini pour E, alors il existe un (2ε)-réseau fini dans E.*

DÉMONSTRATION. Soit $M \subset X$ un ε-réseau fini pour E. Pour chaque $x \in M$, fixons $y_x \in E$ tel que $\rho(x, y_x) < \varepsilon$ (si un tel y_x existe). L'ensemble $M_1 = \{y_x : x \in M\} \subset E$ est alors un (2ε)-réseau fini.

Le théorème 2 et le lemme 3 nous donnent un important critère de compacité de Hausdorff.

THÉORÈME 3 (Hausdorff). *Pour qu'un ensemble E soit relativement compact dans un espace métrique* X *il est nécessaire, et si* X *est complet, suffisant, que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe dans* X *un ε-réseau fini pour E.*

REMARQUE. Pour que E soit relativement compact il suffit aussi (si X est complet) qu'existe un ε-réseau relativement compact pour tout $\varepsilon > 0$.

En effet, pour ce ε-réseau relativement compact il existera un ε-réseau fini qui, de toute évidence, sera un (2ε)-réseau pour l'ensemble initial, ce qui établit sa compacité relative.

5.2. Etudions maintenant les conditions de compacité d'espaces concrets. Le théorème classique de Bolzano-Weierstrass affirme qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de $\mathbf{R}^n$ (ou de $\mathbf{C}^n$) soit compact est qu'il soit borné et fermé.

Indiquons maintenant les conditions de compacité d'un ensemble de l'espace s. Il est aisé de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $E \subset$ s soit relativement compact dans s est que l'ensemble numérique des k-ièmes coordonnées des points de E soit borné pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$|\xi_k| \leqslant l_k \quad \text{pour} \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots) \in E.$$

En d'autres termes, l'ensemble E est contenu dans un parallélépipède de s.

La condition nécessaire est évidente, car si nous prenons une suite d'éléments dont, pour fixer les idées, la première coordonnée croît indéfiniment, il est manifeste qu'on ne peut en extraire une suite partielle convergente (en coordonnées).

Pour prouver la condition suffisante nous allons construire un ε-réseau pour E. Prenons k aussi grand pour que $1/2^k < \varepsilon$ et considérons l'ensemble H des points de la forme $[x]_k = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)$, où $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots) \in E$. L'ensemble H est relativement compact (comme ensemble borné dans

un espace de dimension k). H est aussi ε-réseau pour E, puisque de toute évidence

$$\rho(x, [x]_k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|} \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \varepsilon;$$

$[x]_k$ représente toujours la suite $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)$.

L'existence d'un ε-réseau relativement compact, on l'a signalé plus haut, est suffisante pour que E soit relativement compact.

Remarque. La compacité du parallélépipède dans s entraîne le fait suivant. D'une collection de suites bornées par un même nombre, on peut toujours extraire une suite convergente en coordonnées, c'est-à-dire une suite $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, telle qu'existent simultanément les limites

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dans la suite, nous utiliserons souvent cette circonstance.

Définissons maintenant les conditions de compacité d'un ensemble dans l'espace C (K), où K est un compact métrique de métrique r.

Théorème 4 (Arzelá-Ascoli). *Pour qu'un ensemble E de fonctions continues soit relativement compact dans* C (K), *il faut et il suffit que soient réalisées les conditions suivantes*:

1) *les fonctions de E sont bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire il existe une constante M telle que*

$$|x(t)| \leqslant M \qquad (x \in E, t \in K);$$

2) *les fonctions de E sont équicontinues, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $r(t, t') < \delta$ entraîne $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ pour tous les $x \in E$.*

Démonstration. *Condition nécessaire.* Supposons que E est relativement compact dans C (K). Le théorème 2 affirme l'existence d'un ε-réseau fini pour l'ensemble E. Supposons que ce réseau est constitué par les fonctions continues $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Etant donné que chacune de ces fonctions est bornée et que pour un $x \in E$ il existe x_k tel que $\rho(x, x_k) < \varepsilon$, il vient

$$|x(t)| \leqslant |x_k(t)| + |x(t) - x_k(t)| \leqslant \max_{t\in K} |x_k(t)| + \\ + \rho(x, x_k) < \max_{t\in K} |x_k(t)| + \varepsilon,$$

et par suite la condition 1) est réalisée si pour constante M on prend la somme de ε et du suprémum commun des fonctions $|x_k(t)|$ $(k = 1, \ldots, n;\ t \in K)$.

D'autre part, pour chaque fonction x_k il existe un δ_k tel que

$$|x_k(t') - x_k(t)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad r(t', t) < \delta_k.$$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Prenons une fonction quelconque x de E. Supposons que x_k est l'élément pour lequel $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Alors

$$|x(t') - x(t)| \leqslant |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t)| + \\ + |x_k(t) - x(t)| \leqslant \rho(x, x_k) + |x_k(t') - x_k(t)| + \\ + \rho(x, x_k) < 2\varepsilon + |x_k(t') - x_k(t)|.$$

Si $r(t, t') < \delta$, le deuxième terme sera inférieur à ε et l'on aura alors

$$|x(t') - x(t)| < 3\varepsilon.$$

Donc, les fonctions de E sont équicontinues.

Condition suffisante. $C(K)$ étant un sous-espace fermé de l'espace $l^\infty(K)$ de toutes les fonctions bornées sur K, il suffit de prouver que E est relativement compact dans $l^\infty(K)$. L'espace $l^\infty(K)$ étant complet, d'après la remarque qui suit le théorème 3 il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble E possède un ε-réseau relativement compact. Pour $\varepsilon > 0$ prenons $\delta > 0$ à partir de la condition d'équicontinuité de E. Vu que K est un compact métrique, en vertu du théorème de Hausdorff il existe un $\delta/3$-réseau $\{t_k\}_{k=1}^n$ pour K. Posons

$$C_1 = K_{\delta/3}(t_1),$$
$$C_2 = K_{\delta/3}(t_2) \setminus C_1, \ \ldots, \ C_n = K_{\delta/3}(t_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k.$$

Comme $K = \bigcup_{k=1}^{n} K_{\delta/3}(t_k)$, alors $K = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, et de plus $C_k \cap C_m = \varnothing$ pour $k \neq m$, et pour tout k si $t, t' \in C_k$, alors $r(t, t') < 2\delta/3$. Donc, en vertu du choix de δ, si $t, t' \in C_k$, alors $|x(t) - x(t')| < \varepsilon$ pour tous les $x \in E$. Soit x_k la fonction caractéristique de l'ensemble C_k, c'est-à-dire $x_k(t) = 1$ si $t \in C_k$, et $x_k(t) = 0$ si $t \notin C_k$. Considérons l'ensemble H des fonctions de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k(t)$, où λ_k sont tels que $|\lambda_k| \leqslant M$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. L'ensemble H est compact dans $l^\infty(K)$, puisque la convergence d'une suite de telles fonctions équivaut à la convergence des suites de nombres λ_k correspondants.

Notre démonstration s'achèvera lorsqu'on aura prouvé que H est (2ε)-réseau pour E. Soit $x \in E$. Figeons un point t_k dans chaque ensemble C_k. (Si $C_k = \varnothing$, on l'omet). La fonction $y(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\, x_k(t)$

appartient à H, puisque $|x(t_k)| \leqslant M$ en vertu de la condition 1). Prenons un point quelconque $t \in K$. Comme $K = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, t appartient à un ensemble C_m. On a alors

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - x(t_m)| < \varepsilon,$$

puisque $\rho_k(t, t_m) < 2\delta/3 < \delta$ d'après la construction de C_m et la condition 2).

t étant arbitraire, on obtient

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in k} |x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon,$$

ce qui veut dire que H est (2ε)-réseau pour E.

Illustrons le théorème qu'on vient de prouver par des exemples.

Considérons sur l'intervalle $[0, \pi]$ l'ensemble des fonctions $E = \{\sin nt\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. E est borné. Cependant, du fait que $\sin n \frac{\pi}{2n} = 1$, la deuxième condition, c'est-à-dire l'équicontinuité, est violée. L'ensemble E n'est pas compact dans $\mathbf{C}[0, 2\pi]$.

Soit maintenant un ensemble E de fonctions vérifiant la *condition de Hölder*

$$|x(t') - x(t)| \leqslant M |t' - t|^{\alpha} \quad (x \in E,\ t' \in [a, b];\ \ 0 < \alpha \leqslant 1)^{*)}.$$

Si les fonctions de E sont bornées dans leur ensemble, E est compact. En effet, $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$ assure l'équicontinuité des fonctions de E, et, par conséquent, les deux conditions du théorème d'Arzelá-Ascoli sont satisfaites.

De façon plus générale : soit E un ensemble borné de fonctions continues, et supposons qu'existe une fonction $\omega(\delta)$ telle que $\omega(\delta) \to 0$ pour $\delta \to 0$, et de plus le module de continuité $\omega(x; \delta)$ **) de toute fonction $x \in E$ vérifie l'inégalité $\omega(x; \delta) \leqslant \omega(\delta)$; alors E est compact dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$.

On laisse au lecteur le soin de formuler le critère de compacité d'un ensemble dans l'espace $\mathbf{C}^{(l)}[a, b]$.

---

*) Pour $\alpha = 1$ on obtient la *condition de Lipchitz*

$$|x(t') - x(t)| \leqslant M |t' - t|.$$

On dit souvent d'une fonction vérifiant la condition de Hölder qu'elle vérifie la *condition de Lipchitz dans le rapport* α. La classe de ces fonctions est notée Lip α.

**) On rappelle que le *module de continuité* d'une fonction $x \in \mathbf{C}[a, b]$ est la quantité

$$\omega(x; \delta) = \max_{\substack{a \leqslant t,\ t' \leqslant b, \\ |t'-t| \leqslant \delta}} |x(t') - x(t)| \quad (0 < \delta \leqslant b - a).$$

§ 6. Espaces mesurés

6.1. La définition classique de Riemann a permis de définir l'intégrale sur une classe de fonctions un peu plus large que celle des fonctions continues sur un intervalle fermé borné. Les besoins de l'analyse (en premier lieu la théorie des séries trigonométriques) ont conduit H. Lebesgue à introduire en 1902 la notion de mesure et la notion d'intégrales de fonctions sur un intervalle fermé borné, plus générale que celle de l'intégrale de Riemann. Les généralisations réalisées par I. Radon, M. Fréchet, C. Caratheodory ont abouti à l'élaboration de la théorie de la mesure sur un ensemble arbitraire et à la construction de l'intégrale par rapport à cette mesure. Les espaces mesurés abstraits se sont avérés très féconds en analyse, en théorie des équations, ainsi qu'en théorie des probabilités où ils ont permis à A. Kolmogorov de développer l'approche axiomatique moderne de cette discipline (1932).

Dans ce paragraphe on énoncera sans les démontrer les principaux faits de la théorie de la mesure et de l'intégrale. On exige cependant du lecteur la connaissance au moins de l'intégrale de H. Lebesgue sur un intervalle fermé borné (cf. Natanson [II]). Le lecteur qui s'intéresse essentiellement aux applications de l'analyse fonctionnelle exposées dans le tome 2 peut considérer un espace abstrait mesuré comme un domaine de $\mathbf{R}^n$ ou comme un intervalle fermé borné d'une droite munie de la mesure de Lebesgue. Les notions exposées dans ce paragraphe sont développées de manière approfondie dans les ouvrages suivants: Akilov, Makarov et Havine; Bourbaki [VII]; Voulikh [III]; Dunford, Schwartz [I]; Zaanen [II]; Kolmogorov et Fomine; Halmos; Chilov et Hurewicz. Notre exposé est proche de celui de Voulikh [III].

6.2. Soit T un ensemble quelconque. On dit qu'un ensemble non vide Σ de parties de T est une *algèbre* s'il possède les propriétés suivantes:

1) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$;
2) $A \in \Sigma \Rightarrow T \setminus A \in \Sigma$.

De la définition on déduit sans peine qu'une algèbre contient deux ensembles quelconques A et B avec leur intersection $A \cap B$ et leur différence $A \setminus B$. Par récurrence on établit qu'une algèbre est stable pour la réunion et l'intersection d'un nombre fini d'ensembles. A noter également que $\varnothing \in \Sigma$ et $T \in \Sigma$.

Un ensemble non vide Σ de parties de T est une *σ-algèbre* ou une *tribu* si Σ est une algèbre stable pour la réunion non seulement d'un nombre fini mais aussi d'un nombre dénombrable d'ensembles, c'est-à-dire si

$$3) \qquad A_n \in \Sigma \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Il est évident qu'une tribu est stable pour une intersection dénombrable d'ensembles.

Soient $\overline{\mathbb{R}} =]-\infty, +\infty]$, Σ une algèbre de parties de T. On dit qu'une fonction $\varphi: \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une *fonction additive d'ensemble* si pour toute collection finie d'ensembles deux à deux disjoints $A_n \in \Sigma$ on a

$$\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \varphi(A_n). \tag{1}$$

On suppose toujours que $\varphi(\varnothing) = 0$. On dira que φ est *positive* et l'on écrira $\varphi \geqslant 0$ si $\varphi(A) \geqslant 0$ pour tout $A \in \Sigma$.

On dit qu'une fonction additive d'ensemble $\varphi: \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ définie sur une tribu est *σ-additive* si l'égalité (1) est réalisée aussi pour toute collection dénombrable d'ensembles A_n deux à deux disjoints.

On appelle *mesure* sur une tribu Σ une fonction d'ensemble μ positive σ-additive, définie sur Σ.

On dit qu'une mesure μ est *finie* si $\mu(T) < \infty$, et *σ-finie* si l'ensemble T est représenté sous la forme d'une réunion d'un ensemble dénombrable d'ensembles $A_n \in \Sigma$, tels que $\mu(A_n) < \infty$. On dit qu'une mesure μ est *complète* si $A \subset B \in \Sigma$, $\mu(B) = 0$ entraînent $A \in \Sigma$ (et bien sûr $\mu(A) = 0$). On peut « compléter » une mesure quelconque μ. En effet, désignons par Σ^* l'ensemble de tous les ensembles de la forme $A \cup N$, où $A \in \Sigma$ et $N \subset B \in \Sigma$, $\mu(B) = 0$. Σ^* est une tribu, et de plus, si le domaine de définition de μ est élargi à Σ^*, en posant $\mu(A \cup N) = \mu(A)$, la fonction prolongée sera une mesure sur Σ^*.

Cette construction nous montre qu'on peut généralement considérer que la mesure μ est complète.

On dira que le triplet (T, Σ, μ) est un *espace mesuré* *) si T est un ensemble, Σ est une tribu de ses parties, μ une mesure complète sur Σ, et de plus:

1) si l'ensemble $A \subset T$ est tel que pour tout ensemble $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, on a $A \cap B \in \Sigma$, alors $A \in \Sigma$;

2) la mesure μ est localement finie, c'est-à-dire pour tout $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, il existe $B \in \Sigma$ tel que $B \subset A$ et $0 < \mu(B) < \infty$.

Ces conditions ne sont pas restrictives. En effet, on peut satisfaire à la condition 1) en élargissant la tribu Σ par l'adjonction d'ensembles A vérifiant 1). Si la condition 2) n'est pas réalisée pour un ensemble A, avec $\mu(A) = +\infty$, on redéfinit la mesure de l'ensemble A en posant $\mu(A) = 0$.

A noter que les conditions 1) et 2) sont automatiquement réalisées pour une mesure σ-finie. Désignons par $\Sigma(\mu)$ l'ensemble de

*) En général on n'impose aucune restriction sur Σ et μ dans la définition d'un espace mesuré, mais ceci conduit souvent à des pathologies (surtout dans le cas d'une mesure non σ-finie).

toutes les parties de Σ possédant une mesure finie. De 1) et 2) on déduit la propriété suivante pour (T, Σ, μ):

si $A \subset T$ est tel que pour tout $B \in \Sigma$ (μ) on a $A \cap B \in \Sigma$ et $\mu(A \cap B) = 0$, alors $A \in \Sigma$ et $\mu(A) = 0$.

6.3. Soient Σ une algèbre de parties d'un ensemble T, $\varphi: \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive d'ensemble. On appelle respectivement *variation positive*, *négative* et *totale* d'une fonction φ les fonctions suivantes

$$\varphi_+(A) = \sup_{B \subset A,\, B \in \Sigma} \varphi(B), \qquad \varphi_-(A) = \sup_{B \subset A,\, B \in \Sigma} \{-\varphi(B)\},$$
$$|\varphi|(A) = \varphi_+(A) + \varphi_-(A) \qquad (A \in \Sigma).$$

Les fonctions φ_+, φ_- et $|\varphi|$ sont des fonctions d'ensemble additives positives. La variation totale de la fonction φ peut être définie également par

$$|\varphi|(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(A_i)|,$$

où le suprémum est pris sur toutes les partitions possibles de l'ensemble A en un nombre fini d'ensembles deux à deux disjoints $A_i \in \Sigma$. Si $\varphi(A)$ est finie pour $A \in \Sigma$, alors

$$|\varphi|(A) = \sup_{\substack{B_1,\, B_2 \subset A \\ B_1,\, B_2 \in \Sigma}} \{\varphi(B_1) - \varphi(B_2)\}.$$

THÉORÈME 1. *Toute fonction d'ensemble φ additive finie, définie sur une algèbre Σ admet la décomposition de Jordan*

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-.$$

On remarquera que, si Σ est une tribu et la fonction φ est σ-additive, ses variations φ_+, φ_- et $|\varphi|$ sont aussi σ-additives. Les fonctions σ-additives sont justiciables du théorème plus fort suivant.

THÉORÈME 2 (de décomposition de Hahn). *Soit φ une fonction σ-additive d'ensemble sur une tribu Σ. Il existe $A_0 \in \Sigma$ tel que $\varphi(A) \geqslant 0$ si $A \in \Sigma$, $A \subset A_0$, et $\varphi(A) \leqslant 0$ si $A \in \Sigma$, $A \subset T \setminus A_0$.*

On remarquera que sous l'hypothèse du théorème 2, pour tout $A \in \Sigma$ on a $\varphi_+(A) = \varphi(A \cap A_0)$, $\varphi_-(A) = -\varphi(A \cap (T \setminus A_0))$.

6.4. Soient T un ensemble, Σ une tribu de ses parties. On dira que les ensembles de Σ sont *mesurables*. On dit qu'une fonction réelle $x(t)$ définie sur T est *mesurable* relativement à la tribu Σ si pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$ sont mesurables ses *ensembles de Lebesgue*

$$\begin{aligned} &\{t \in T: x(t) > a\}, \quad \{t \in T: x(t) < a\}, \\ &\{t \in T: x(t) \geqslant a\}, \quad \{t \in T: x(t) \leqslant a\}. \end{aligned} \tag{2}$$

On appelle *fonction à valeurs finies mesurable relativement à* Σ ou Σ-*mesurable* une fonction de la forme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{A_i}(t),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \Sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, les ensembles A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ étant deux à deux disjoints.

On dira qu'une suite de fonctions $x_n(t)$ sur T *est croissante* $(x_n \uparrow)$ si $x_n(t) \leqslant x_m(t)$ $(t \in T)$, pour $m \geqslant n$. On écrira $x_n \uparrow x$ si la suite $\{x_n\}$ est croissante et $x_n(t) \to x(t)$ pour tout $t \in T$.

THÉORÈME 3. *Pour toute fonction x bornée Σ-mesurable, il existe une suite $\{x_n\}$ de fonctions mesurables à valeurs finies, convergeant uniformément vers x sur T. Si $x(t) \geqslant 0$ $(t \in T)$, on peut considérer en outre que $x_n \uparrow x$, $x_n(t) \geqslant 0$ $(t \in T,\ n \in \mathbb{N})$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $x(t) \geqslant 0$ $(t \in T)$. Soit $M = \sup_{t \in T} x(t)$. Pour $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$ et $i = 0, 1, \ldots, n-1$ posons

$$A_i^n = \{t \in T\colon iM/n < x(t) \leqslant (i+1)M/n\}.$$

De toute évidence $A_i^n \in \Sigma$. Considérons la fonction à valeurs finies

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{iM}{n} \chi_{A_i^n}(t).$$

Il est aisé de voir que $x_n \uparrow$. En effet, si $m \geqslant n$ et $t \in T$, on a ou bien $x(t) = 0$ et alors $x_n(t) = x_m(t) = 0$, ou bien t appartient à un ensemble A_i^m et alors $A_i^m \subset A_j^n$, puisque m et n sont des puissances de 2 et par suite $i \geqslant j$. Donc $x_m(t) = iM/m \geqslant jM/n = x_n(t)$.

Si $t \in A_i^n$,

$$|x(t) - x_n(t)| = |x(t) - iM/n| \leqslant M/n,$$

d'où

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant M/n, \quad \forall\, t \in T.$$

Donc, la suite $\{x_n\}$ converge vers x uniformément. Si la fonction x est arbitraire, en supposant $x_+(t) = \max(x(t), 0)$ et $x_-(t) = \max(-x(t), 0)$ il vient que x_+ et x_- sont des fonctions bornées mesurables positives et $x = x_+ - x_-$. On achève la démonstration du théorème en appliquant à x_+ et x_- le résultat prouvé.

COROLLAIRE. *Pour toute fonction mesurable x il existe une suite $\{x_n\}$ de fonctions mesurables à valeurs finies, telle que $x_n(t) \to x(t)$ et $|x_n(t)| \leqslant |x(t)|$ pour tous les $t \in T$. Si $x(t) \geqslant 0$ $(t \in T)$ on peut admettre que $x_n \uparrow x$, $x_n(t) \geqslant 0$ $(t \in T,\ n \in \mathbb{N})$.*

DÉMONSTRATION. Considérons les fonctions $[x]_n$ $(n \in \mathbb{N})$ définies par

$$[x]_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si} \quad |x(t)| \leqslant n, \\ 0 & \text{si} \quad |x(t)| > n. \end{cases}$$

Les fonctions $[x]_n$ sont mesurables et bornées, donc si $x(t) \geqslant 0$ $(t \in T)$ alors, en vertu du théorème 3, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction mesurable à valeurs finies $y_n(t)$ telle que $|[x]_n(t) - y_n(t)| < 1/n$, $0 \leqslant y_n(t) \leqslant [x]_n(t)$ pour tous les $t \in T$. La suite de fonctions

$$x_n(t) = \max_{k=1}^{n} y_k(t)$$

est bien la suite cherchée. Dans le cas général posons $x = x_+ - x_-$ comme dans la démonstration du théorème 3. Si $0 \leqslant x'_n \uparrow x_+$ et $0 \leqslant y'_n \uparrow x_-$, où x'_n, y'_n sont des fonctions à valeurs finies, alors $x_n(t) = x'_n(t) - y'_n(t)$ est la suite cherchée.

La notion d'*intégrale* est très importante en théorie des fonctions mesurables. Soient données une tribu Σ de parties d'un ensemble T et une fonction σ-additive finie φ sur Σ. Alors de l'ensemble de toutes les fonctions mesurables on peut extraire une classe de fonctions dites *sommables* (par rapport à la fonction φ) auxquelles est associé un nombre fini appelé *intégrale* (de Radon) *). L'intégrale d'une fonction $x(t)$ (sur un ensemble T) est désignée de l'une des manières suivantes:

$$\int_T x(t)\, d\varphi(t), \qquad \int_T x(t)\, d\varphi, \qquad \int_T x\, d\varphi.$$

De façon analogue on peut considérer une intégrale sur un ensemble quelconque $A \in \Sigma$.

Voici les plus importantes propriétés de l'intégrale.

1) Linéarité **)

$$\int_A (\lambda x + \mu y)\, d\varphi = \lambda \int_A x\, d\varphi + \mu \int_A y\, d\varphi \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}).$$

2) $$\int_A x\, d\varphi = \int_A x\, d\varphi_+ - \int_A x\, d\varphi_-, \quad \left| \int_A x\, d\varphi \right| \leqslant \int |x|\, d|\varphi|.$$

3) Si φ est une mesure et $x(t) \geqslant 0$ $(t \in A)$, alors $\int_A x\, d\varphi \geqslant 0$. Si de plus $\int_A x\, d\varphi = 0$, alors $\varphi(\{t \in A\colon x(t) > 0\}) = 0$.

*) Pour la définition de l'intégrale consulter les ouvrages cités au début du paragraphe.

**) Par définition, $(\lambda x + \mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$.

4) Si x est une fonction bornée mesurable, alors il existe $\int\limits_A x\,d\varphi\ (A \in \Sigma)$.

5) La fonction d'ensemble $\nu(A) = \int\limits_A x\,d\varphi\ (A \in \Sigma)$ est une fonction σ-additive.

Il existe beaucoup d'autres propriétés importantes. Dans la suite nous étudierons certaines d'entre elles.

Dans le cas où φ est une mesure, nous élargirons la notion d'intégrale en permettant à cette dernière de prendre des valeurs infinies.

Soit (T, Σ, μ) un espace de mesure finie. Si une fonction mesurable $x(t) \geqslant 0\ (t \in A)$ n'est pas sommable sur un ensemble $A \in \Sigma$, on pose $\int\limits_A x(t)\,d\mu = +\infty$.

Pour une fonction mesurable $x(t)$ définissons comme plus haut $x_+(t) = \max(x(t), 0)$, $x_-(t) = \max(-x(t), 0)$, et, si l'une au moins des intégrales $\int\limits_A x_+\,d\mu$ et $\int\limits_A x_-\,d\mu$ est finie, on posera

$$\int\limits_A x\,d\mu = \int\limits_A x_+\,d\mu - \int x_-\,d\mu. \tag{3}$$

Si les deux intégrales précédentes sont infinies, la fonction $x(t)$ n'admet pas d'intégrale.

Soit (T, Σ, μ) un espace de mesure infinie, $\Sigma(\mu)$ l'ensemble de tous les ensembles de mesure finie. La condition 1) de 6.2 entraîne que la fonction $x(t)$ est mesurable si et seulement si la fonction $x(t)\,\chi_A(t)$ est mesurable pour tout $A \in \Sigma(\mu)$.

Pour un ensemble A (de mesure infinie) et une fonction mesurable $x(t) \geqslant 0\ (t \in A)$ posons

$$\int\limits_A x(t)\,d\mu = \sup\left\{\int\limits_B x(t)\,d\mu:\ B \in \Sigma(\mu),\ B \subset A\right\} \quad (A \in \Sigma)$$

(cette formule est triviale si $A \in \Sigma(\mu)$).

Définissons l'intégrale d'une fonction mesurable x par la formule (3) avec les mêmes conditions d'existence que plus haut. L'intégrale construite possède les propriétés 1), 3) et 5). Comme précédemment, les fonctions pour lesquelles l'intégrale $\int\limits_A x\,d\mu$ est finie seront dites *sommables* sur $A \in \Sigma$ et simplement sommables si $A = T$.

Voyons maintenant comment la théorie exposée se généralise au cas de fonctions à valeurs complexes. Soit $x: T \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. Posons $y(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $z(t) = \operatorname{Im} x(t)$. On dit que la

fonction $x(t)$ est *mesurable* (resp. *sommable*) si sont *mesurables* (resp. *sommables*) les fonctions réelles $y(t)$ et $z(t)$. Si $y(t)$ et $z(t)$ sont sommables, on pose

$$\int_A x(t)\,d\varphi = \int_A y(t)\,d\varphi + i\int_A z(t)\,d\varphi.$$

Il est parfois commode d'utiliser les fonctions prenant des valeurs infinies. Comme toujours, on dit qu'une fonction $x\colon T \to [-\infty, +\infty]$ est *mesurable* relativement à la tribu Σ si sont mesurables tous ses ensembles de Lebesgue (2).

Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré. Si pour une fonction mesurable $x\colon T \to [-\infty, +\infty]$ on pose

$$A_\infty^+ = \{t \in T\colon x(t) = +\infty\},$$
$$A_\infty^- = \{t \in T\colon x(t) = -\infty\}, \quad A_\infty = A_\infty^+ \cup A_\infty^-,$$

lorsque $\mu(A_\infty) = 0$ et $\int\limits_{T\setminus A_\infty} x\,d\mu$ est définie, on admet que

$$\int_T x\,d\mu = \int_{T\setminus A_\infty} x\,d\mu;$$

lorsque $\mu(A_\infty^+) > 0$ et $\mu(A_\infty^-) = 0$, on admet que

$$\int_T x\,d\mu = +\infty;$$

et enfin lorsque $\mu(A_\infty^-) > 0$, $\mu(A_\infty^+) = 0$, on admet que

$$\int_T x\,d\mu = -\infty.$$

Dans les autres cas l'intégrale n'est pas définie. Comme précédemment, on dit qu'une fonction $x(t)$ est *sommable* si $\int\limits_T x\,d\mu$ est finie, c'est-à-dire si $\mu(A_\infty) = 0$ et la fonction $x\chi_{T\setminus A_\infty}$ est sommable. L'intégrale $\int\limits_A x\,d\mu$ se définit de façon analogue.

Si la fonction $x(t)$ n'est donnée que sur l'ensemble $T \setminus A$, où $\mu(A) = 0$, on dit qu'elle est *mesurable* (sur T) si elle l'est sur $T \setminus A$. Si l'intégrale $\int\limits_{T\setminus A} x\,d\mu$ est définie, on conviendra que $\int\limits_T x\,d\mu = \int\limits_{T\setminus A} x\,d\mu$.

Dans toutes les définitions et théorèmes ultérieurs de ce paragraphe on suppose que les fonctions prennent leurs valeurs dans la

droite réelle achevée ou dans le corps des nombres complexes à la condition suivante : ces fonctions prennent leurs valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ si par hypothèse on leur applique le signe d'inégalité.

6.5. Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré. On dira qu'une propriété est réalisée *presque partout* (on notera p.p.) si elle est réalisée partout sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle. Par exemple, si x et y sont des fonctions mesurables, alors dire que $x(t) \geqslant y(t)$ p.p. est équivalent à dire que $\mu(\{t : x(t) < y(t)\}) = 0$. Des fonctions mesurables x et y sont *équivalentes* si $x(t) = y(t)$ p.p. En vertu de la condition 2) de 6.2, il revient au même de dire que pour tout $A \in \Sigma(\mu)$ on a $x(t) = y(t)$ pour presque tous les $t \in A$. L'intégrale ne « distingue pas » les propriétés réalisées presque partout de celles réalisées partout. Par exemple, si $x(t) = y(t)$ p.p., alors $\int x\, d\mu = \int y\, d\mu$.

Dans la suite du paragraphe on admettra, sauf mention du contraire, que toutes les fonctions sont mesurables et presque partout finies, c'est-à-dire $\mu\{t \in T : x(t) = +\infty$ *ou* $x(t) = -\infty\} = 0$.

On peut négliger souvent les ensembles de mesure nulle aussi bien dans l'étude de fonctions que d'ensembles mesurables de Σ. Introduisons les notations suivantes à cet effet. L'écriture $A \subset B$ (mod. μ) pour $A, B \in \Sigma$ signifie que $\mu(A \setminus B) = 0$; $A = B$ (mod. μ) que $A \subset B$ (mod. μ) et $B \subset A$ (mod. μ). Les ensembles A et B sont par définition (μ)-*disjoints* si $\mu(A \cap B) = 0$. L'ensemble de parties $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $A_\xi \in \Sigma$, est appelé (μ)-*partition* de l'ensemble T si les ensembles A_ξ sont deux à deux (μ)-disjoints et $T = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$ (mod. μ).

On dit qu'une suite $\{x_n(t)\}$ de fonctions mesurables *converge presque partout* vers une fonction $x(t)$ si $\mu(\{t : x_n(t) \not\to x(t)\}) = 0$. (A noter que même si au départ l'on n'admet pas la mesurabilité de la fonction limite $x(t)$, celle-ci se démontre facilement.) La convergence presque partout est notée $x_n \to x$ p.p.

Soient des fonctions mesurables $x_n(t)$ $(n \in \mathbb{N})$ et $x(t)$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$. On dit que la suite $\{x_n(t)\}$ *converge en mesure* sur l'ensemble A vers la fonction $x(t)$ si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{t \in A : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dans le cas d'une mesure $\mu(A)$ arbitraire, on dit que la suite $\{x_n(t)\}$ *converge en mesure* sur A vers la fonction $x(t)$ si $\{x_n(t)\}$ converge en mesure vers $x(t)$ sur tout ensemble $B \in \Sigma$, $B \subset A$, $\mu(B) < \infty$ *). Pour noter la convergence en mesure (sur T) on se servira

*) Cette définition est différente de la définition ordinaire dans le cas d'une mesure infinie. Ceci s'explique par les propriétés pathologiques de la convergence ordinaire dans ce cas.

de l'écriture $x_n \to x$ (μ). On définit de façon analogue la convergence en mesure des suites $\{x_\alpha(t)\}$ de fonctions mesurables vers une fonction mesurable $x(t)$ ($x_\alpha \to x$ (μ)). Le lien entre la convergence presque partout et la convergence en mesure est exprimé par le

THÉORÈME 4. 1) *Si* $x_n \to x$ *p.p., alors* $x_n \to x$ (μ).

2) *Si* (T, Σ, μ) *est un espace de mesure* σ*-finie et* $x_n \to x$ (μ), *il existe une suite partielle* $\{x_{n_k}\}$, *telle que* $\{x_{n_k}\} \to x$ *p.p.*

Le théorème 4 entraîne que l'addition et la multiplication de deux fonctions sont continues pour la convergence en mesure.

Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré. Un ensemble $A \in \Sigma$ est appelé *atome* si $\mu(A) \neq 0$ et si du fait que $B \in \Sigma$, $B \subset A$, il résulte que ou bien $\mu(A) = \mu(B)$ ou bien $\mu(B) = 0$. Maintenant, on peut formuler la condition 2) de 6.2 comme suit : μ ne possède pas d'atomes de mesure infinie. On dit que (T, Σ, μ) est un espace de *mesure discrète* si $T = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \cup N$, où T_α ($\alpha \in A$) sont des atomes et $\mu(N) = 0$. On dit que (T, Σ, μ) est un espace de *mesure continue* s'il ne contient pas d'atomes. On démontre que dans un espace de mesure continue il existe toujours une suite de fonctions mesurables $\{x_n\}$ telle que $x_n \to x$ (μ), mais $x_n \not\to x$ p.p.

Le théorème suivant rassemble plusieurs faits sur la convergence presque partout.

THÉORÈME 5. *Soit* (T, Σ, μ) *un espace de mesure* σ*-finie.*

1) (Théorème de la stabilité de la convergence.) *Si une suite* $x_n \to 0$ *p.p., il existe une suite croissante de nombres positifs* $\lambda_n \to +\infty$, *telle que* $\lambda_n x_n(t) \to 0$ *p.p.*

2) (Théorème du régulateur de convergence.) *Si une suite* $x_n \to 0$ *p.p., il existe une fonction* $y(t)$ *positive, presque partout finie, mesurable sur* T *et une suite de nombres positifs* $\varepsilon_n \to 0$, *telles que* $|x_n(t)| \leqslant \varepsilon_n y(t)$ *p.p.*

3) (Théorème de la suite diagonale.) *Si* $x_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$ *p.p. pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ *p.p., il existe une suite* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *telle que la suite «diagonale»* $x_{n_k k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ *p.p.*

4) (Théorème d'Egorov.) *Si* $\mu(T) < \infty$ *et la suite* $x_n \to x$ *p.p., alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $A \in \Sigma$ *tel que* $\mu(A) < \varepsilon$ *et* $x_n(t) \to x(t)$ *uniformément sur l'ensemble* $T \setminus A$.

6.6. Nous allons énoncer divers théorèmes relatifs au passage à la limite sous le signe somme. Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré.

THÉORÈME 6 (Lebesgue). *Soit* $\{x_n(t)\}$ *une suite de fonctions sommables et* $x_n \to x$ (μ). *S'il existe une fonction* $y(t)$ *sommable positive*

telle que $|x_n(t)| \leqslant y(t)$ *p.p.* $(n \in \mathbb{N})$, *alors la fonction* $x(t)$ *est aussi sommable et*

$$\lim \int_T x_n \, d\mu = \int_T x \, d\mu. \tag{4}$$

THÉORÈME 7 (B. Levi). *Si* $x_n(t) \geqslant 0$ *p.p. et* $x_n \uparrow x$ *p.p., alors* (4) *est réalisée.*

On notera que le théorème 7 subsiste dans le cas où la fonction x n'est pas supposée être presque partout finie.

COROLLAIRE. *Si des fonctions* $y_k(t)$ *sont positives p.p., sommables et* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k \, d\mu < +\infty$, *alors* $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$ *est presque partout finie et*

$$\int_T x \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k \, d\mu.$$

En effet, posons $x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)$. Alors $x_n \uparrow x$ p.p. et de plus la fonction x peut *a priori* être infinie sur un ensemble de mesure positive. En vertu de la remarque qui suit le théorème 7 on a

$$\int_T x \, d\mu = \lim \int_T x_n \, d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n} \int_T y_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_T y_k \, d\mu < \infty.$$

Donc la fonction x est sommable et par conséquent presque partout finie.

THÉORÈME 8 (Fatou). *Si* $x_n(t) \geqslant 0$ *p.p. et* $x_n \to x$ (μ), *alors*

$$\int_T x \, d\mu \leqslant \sup_n \int_T x_n \, d\mu.$$

A noter qu'à partir des théorèmes 6 et 8 on peut facilement établir des théorèmes analogues pour les suites généralisées $x_\alpha \to x$ (μ).

6.7. Nous allons formuler ici le théorème de Radon-Nikodym qui est fondamental dans les applications de la théorie de la mesure à l'analyse fonctionnelle.

Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, φ une fonction σ-additive sur Σ. On dit que la fonction φ est *absolument continue* par rapport à μ si $\mu(A) = 0$ entraîne $\varphi(A) = 0$; on dit que la fonction φ est *singulière* par rapport à μ s'il existe un ensemble $A_0 \in \Sigma$ tel que

$$\mu(A_0) = 0, \quad \varphi(A) = \varphi(A \cap A_0), \quad A \in \Sigma.$$

THÉORÈME 9. *Si* φ *est une fonction* σ*-additive finie sur* Σ, *elle se représente de façon unique par la somme* $\varphi(A) = \nu(A) + \lambda(A)$, $A \in \Sigma$, *où* ν *et* λ *sont des fonctions* σ*-additives sur* Σ, ν *étant absolument continue et* λ, *singulière par rapport à* μ.

La décomposition $\varphi = \nu + \lambda$ s'appelle *décomposition de Lebesgue*. Il est évident que, si x est une fonction sommable, alors la fonction d'ensemble $\nu(A) = \int_A x\, d\mu$ $(A \in \Sigma)$ est absolument continue par rapport à μ. Le théorème de Radon-Nikodym nous apprend que toutes les fonctions absolument continues s'obtiennent de cette sorte.

THÉORÈME 10 (Radon-Nikodym). *Soient* (T, Σ, μ) *un espace de mesure* σ*-finie*, ν *une fonction d'ensemble, finie, absolument continue par rapport à* μ, *définie sur* Σ. *Il existe une fonction* $x(t)$ (*unique à une mesure nulle près*) *sommable par rapport à la mesure* μ *sur* T, *telle que*

$$\nu(A) = \int_A x d\mu \quad (A \in \Sigma).$$

De plus, la fonction d'ensemble ν *est positive si et seulement si* $x(t) \geqslant 0$ *p.p.*

6.8. On se propose de définir le produit d'espaces mesurés. Cette notion joue un rôle important dans l'étude des opérateurs intégraux.

Soient (S, Σ_S, ν) et (T, Σ_T, μ) des espaces de mesures σ-finies. Notons Σ_R^0 la plus petite tribu des parties de l'ensemble $R = S \times T$, contenant tous les ensembles de la forme $B \times A$, où $B \in \Sigma_S$, $A \in \Sigma_T$. On démontre que sur la tribu Σ_R^0 il existe une mesure unique λ telle que

$$\lambda(B \times A) = \nu(B)\, \mu(A), \quad \forall B \in \Sigma_S, \quad \forall A \in \Sigma_T.$$

(On conviendra que $a \cdot (+\infty) = +\infty$ si $a \neq 0$, et que $0 \cdot (+\infty) = 0$.) « Complétons » la mesure λ comme dans 6.2. Désignons la tribu obtenue par Σ_R et la mesure de nouveau par λ. L'espace (R, Σ_R, λ) construit, de mesure σ-finie complète s'appelle *produit des espaces* (S, Σ_S, ν) et (T, Σ_T, μ), et la mesure λ, *produit des mesures* ν et μ, ce qu'on notera parfois $\lambda = \nu \times \mu$.

L'exemple le plus classique de produit de mesures est celui où chacun des facteurs est l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Le produit de ces mesures sera une mesure de Lebesgue sur le carré unité.

Pour simplifier on appellera ν-, μ- ou λ-mesurables les fonctions mesurables par rapport à Σ_S, Σ_T ou Σ_R.

Voici deux théorèmes de calcul d'une intégrale par rapport à un produit de mesures à l'aide de deux intégrations successives par rapport à chaque mesure facteur.

THÉORÈME 11 (Fubini). *Soit une fonction* $K(s, t)$ $(s \in S,\ t \in T)$ *sommable par rapport à la mesure* $\lambda = \nu \times \mu$. *Alors la fonction* $K_s(t) = K(s, t)$ *est* μ*-sommable pour* ν*-presque tous les points* $s \in S$. *La fonction* $H(s) = \int_T K(s, t)\, d\mu(t)$ *est* ν*-sommable et*

$$\int_R K(s, t)\, d\lambda(s, t) = \int_S \left\{ \int_T K(s, t)\, d\mu(t) \right\} d\nu(s).$$

On peut renforcer le théorème de Fubini pour les fonctions positives.

THÉORÈME 12 (Tonelli). *Soit* $K(s, t)$ *une fonction* λ*-mesurable positive sur* R. *Alors la fonction* $K_s(t) = K(s, t)$ *est* μ*-mesurable pour* ν*-presque tous les points* $s \in S$. *De plus, la fonction* $H_s = \int_T K(s, t) \times d\mu(t)$ *(à valeurs infinies peut-être sur un ensemble de mesure positive) est* ν*-mesurable et*

$$\int_R K(s, t)\, d\lambda(s, t) = \int_S \left\{ \int_T K(s, t)\, d\mu(t) \right\} d\nu(s),$$

que ces intégrales soient finies ou infinies.

Voici encore quelques propriétés du produit d'espaces mesurés :

1) Si les mesures μ et ν sont finies, alors pour tout ensemble $C \in \Sigma_R$ et tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $C_1 = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \times A_k)$, où $B_k \in \Sigma_S$, $A_k \in \Sigma_T$, tel que

$$\int_R |\chi_C(s, t) - \chi_{C_1}(s, t)|\, d\lambda(s, t) < \varepsilon.$$

2) Si une fonction $K(s, t)$ est λ-sommable et pour tous $A \in \Sigma_T(\mu)$, $B \in \Sigma_S(\nu)$ on a

$$\int_{B \times A} K(s, t)\, d\lambda(s, t) \geqslant 0,$$

alors $K(s, t) \geqslant 0$ λ-presque-partout.

6.9. A l'origine la théorie de la mesure était intimement liée à la topologie, et les mesures ont été pendant longtemps construites seulement sur certaines classes d'espaces topologiques. Ensuite les efforts de nombreux mathématiciens (et avant tout de C. Caratheo-

dory) ont abouti à l'élaboration de la théorie des espaces abstraits mesurés dont nous avons donné un bref aperçu dans les numéros précédents. Nous allons voir certains aspects de la théorie de la mesure liés à la topologie.

Soit K un compact. La plus petite tribu $\mathscr{B}$ contenant tous les fermés de K est appelée *tribu borélienne* du compact K, et les ensembles de $\mathscr{B}$, ses *ensembles boréliens*.

On dit qu'une fonction d'ensemble φ finie, σ-additive, définie sur une tribu Σ de parties d'un compact K, contenant tous les fermés, est *régulière* si pour tout $A \in \Sigma$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé F et un ouvert G tels que $F \subset A \subset G$ et $|\varphi|(G \setminus F) < \varepsilon$. Si φ est régulière, ses variations φ_+, φ_-, $|\varphi|$ le sont également.

Soit μ_0 une mesure régulière définie sur une tribu borélienne $\mathscr{B}$. Complétons-la comme au numéro 6.2. Désignons par Σ la tribu (plus large) obtenue et par μ la mesure prolongée. On obtient ainsi, par exemple la mesure de Lebesgue sur un compact de $\mathbf{R}^n$ à partir de la mesure de Borel. On désignera par mes (A) la mesure de Lebesgue d'un ensemble A de $\mathbf{R}^n$. Supposons que μ et Σ ont la même signification que précédemment. La mesurabilité des fonctions sur K sera comprise relativement à la tribu Σ, et le terme p.p. relativement à la mesure μ. Il est évident que toute fonction continue est mesurable. Le théorème suivant de Lusin montre que toute fonction mesurable est continue sur des ensembles approchant un compact K par rapport à la mesure μ.

THÉORÈME 13 (Lusin). *Les propositions suivantes sont équivalentes pour une fonction $x(t)$ p.p. finie sur un compact K :*

1) *$x(t)$ est mesurable ;*

2) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $F \subset K$ tel que $\mu(K \setminus F) < \varepsilon$, et la restriction de la fonction $x(t)$ à F est continue ;*

3) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $F \subset K$ et une fonction continue $y(t)$ sur K, tels que $\mu(K \setminus F) < \varepsilon$, $x(t) = y(t)$ pour $t \in F$ et $\sup\limits_{t \in F} |x(t)| = \sup\limits_{t \in K} |y(t)|$.*

Du théorème de Lusin on déduit sans peine le théorème de Fréchet qui affirme que toute fonction $x(t)$ mesurable p.p. finie sur K est la limite pour la convergence p.p. d'une suite de fonctions continues.

Nous allons achever notre aperçu de la théorie de la mesure et de l'intégrale par les fonctions d'ensemble à valeurs complexes. De même que dans le cas réel on peut définir pour elles l'additivité, la σ-additivité, la variation totale et la notion de régularité. Si φ : $\Sigma \to \mathbf{C}$ est σ-additive, nous considérons des fonctions réelles σ-additives $\varphi_1(A) = \operatorname{Re} \varphi(A)$, $\varphi_2(A) = \operatorname{Im} \varphi(A)$. On peut définir l'intégrale par la formule $\int\limits_A x(t)\, d\varphi = \int\limits_A x(t)\, d\varphi_1 + i \int\limits_A x(t)\, d\varphi_2$.

Nous aurons très rarement besoin des fonctions complexes d'ensemble, donc, sauf mention du contraire, toutes les fonctions d'ensemble seront supposées réelles.

6.10. Les espaces de fonctions mesurables sont appelés à jouer un rôle fondamental dans ce livre. Nous considérons ici les propriétés de l'espace de toutes les fonctions mesurables.

Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré. Désignons par $S(T, \Sigma, \mu)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables définies sur T et p.p. finies. On conviendra d'identifier les fonctions équivalentes, c'est-à-dire on admettra qu'elles constituent un même élément de l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$. Dans la suite donc les éléments de l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$ sont des classes de fonctions équivalentes et si $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ est une classe de fonctions équivalentes, alors on désignera par $x(t)$ toute fonction mesurable de cette classe (et l'on admettra toujours qu'elle ne prend que des valeurs finies).

Si la mesure μ est σ-finie, on peut munir $S(T, \Sigma, \mu)$ d'une structure d'espace métrique dans lequel la convergence pour la métrique coïncidera avec la convergence en mesure.

Dans la suite, sauf mention du contraire, on supposera donc que μ est σ-finie. Construisons une métrique dans $S(T, \Sigma, \mu)$. A cet effet, prenons une fonction $f(t)$ mesurable sur T et vérifiant les conditions:

$$f(t) > 0, \quad \forall t \in T; \quad \int_T f(t)\, d\mu(t) = 1. \tag{5}$$

De telles fonctions $f(t)$ existent. En effet, la mesure μ étant σ-finie, on a $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, où les ensembles T_n sont deux à deux disjoints et $0 < \mu(T_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Posons

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{T_n}(t)/(2^n \mu(T_n)).$$

La fonction $f(t)$ satisfait alors aux conditions (5). Si $\mu(t) < \infty$, on peut poser $f(t) = 1/\mu T$ $(t \in T)$. Pour un couple quelconque d'éléments $x, y \in S(T, \Sigma, \mu)$ définissons la distance par la formule

$$\rho(x, y) = \int_T \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} f(t)\, d\mu(t). \tag{6}$$

L'intégrale de la formule (6) est finie, puisque la fonction f est sommable et le premier facteur prend des valeurs comprises entre 0 et 1. De toute évidence $\rho(x, y)$ ne dépend pas du choix des fonctions équivalentes $x(t)$ et $y(t)$ dans les classes correspondantes. Assurons-nous que les axiomes de l'espace métrique sont vérifiés (cf. 3.1).

L'intégrant de (6) étant positif, $\rho(x, y) \geqslant 0$. Il est clair par ailleurs que $\rho(x, x) = 0$.

Supposons que $\rho(x, y) = 0$. Alors $\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} = 0$ presque partout, d'où $x(t) = y(t)$ p.p. Or de telles fonctions s'identifient dans l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$, donc la condition 1) de la définition de l'espace métrique est satisfaite. La condition 2) est évidente. En vertu de l'inégalité (2) § 3, quels que soient $x, y, z \in S(T, \Sigma, \mu)$ et pour presque tous les $t \in T$ on a

$$\frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \leqslant \frac{|x(t) - z(t)|}{1 + |x(t) - z(t)|} + \frac{|y(t) - z(t)|}{1 + |y(t) - z(t)|}. \tag{7}$$

Pour obtenir l'inégalité triangulaire il faut multiplier l'inégalité (7) par $f(t)$ et intégrer le résultat obtenu.

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions vérifiant les conditions (5), ρ_f et ρ_g les métriques (6) construites pour ces fonctions. Si f et g ne sont pas équivalentes, alors $\rho_f \neq \rho_g$. Cependant, le théorème suivant montre que les topologies engendrées par ces métriques sont confondues.

THÉORÈME 14. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* $\{x_n\} \subset S(T, \Sigma, \mu)$ *converge vers* $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ *pour la métrique est que* $x_n \to x\ (\mu)$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\rho(x_n, x) \to 0$. Pour $\varepsilon > 0$ posons $A_n(\varepsilon) = \{t \in T : |x_n(t) - x(t)| f(t) \geqslant \varepsilon\}$. La fonction $\varphi(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda)$ étant croissante, on aura

$$\rho(x_n, x) = \int_T \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t)\, d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t)\, d\mu(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \mu[A_n(\varepsilon)].$$

Donc $\mu[A_n(\varepsilon)] \to 0$, d'où $x_n f \to xf(\mu)$. Comme $f(t) > 0$ $(t \in T)$, il vient $x_n = (x_n f)/f \to (xf)/f = x\ (\mu)$.

Inversement, si $x_n \to x\ (\mu)$, on a visiblement

$$\frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t) \to 0\ (\mu).$$

La fonction f étant sommable, d'après le théorème de Lebesgue il est possible de passer à la limite sous le signe somme :

$$\rho(x_n, x) = \int_T \frac{|x_n(t) - x(t)|}{1 + |x_n(t) - x(t)|} f(t)\, d\mu(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

REMARQUE. Une proposition analogue au théorème 14 a lieu pour les suites généralisées.

Si $\rho(x_\alpha, x) \to 0$, on démontre comme dans le théorème que $x_\alpha \to x\ (\mu)$. Supposons que $x_\alpha \to x\ (\mu)$, mais que $\rho(x_\alpha, x) \not\to 0$. Il existe alors $\delta > 0$ et une sous-suite $\{y_\beta\}$ tels que $\rho(y_\beta, x) \geqslant \delta$, $\forall\beta$. La fonction f étant sommable, il existe un ensemble $A \in \Sigma\ (\mu)$ pour lequel $\int\limits_{T \setminus A} f\,d\mu < \delta/2$. Comme $y_\beta \to x\,(\mu)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe β_n pour lequel $\mu(\{t \in A\colon |y_{\beta_n}(t) - x(t)| > 1/n\}) < 1/n$. Alors de toute évidence $y_{\beta_n} \to x\,(\mu)$ sur A, et en vertu du théorème 14

$$\rho(y_{\beta_n}, x) = \int\limits_A \frac{|x_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f\,d\mu + \int\limits_{T \setminus A} \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f\,d\mu <$$

$$< \int\limits_A \frac{|y_{\beta_n} - x|}{1 + |y_{\beta_n} - x|} f\,d\mu + \frac{\delta}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\delta}{2},$$

ce qui contredit $\rho(y_{\beta_n}, x) \geqslant \delta > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

THÉORÈME 15. $S(T, \Sigma, \mu)$ *est un espace métrique complet.*

DÉMONSTRATION. Soit une suite fondamentale $\{x_n\}$ d'éléments de $S(T, \Sigma, \mu)$.

Supposons que n_k est tel que $\rho(x_n, x_{n_k}) < 2^{-k}$ pour $n \geqslant n_k$. On peut admettre que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ et par conséquent $n_k \to \infty$. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_T \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|} f(t)\,d\mu(t)$$

est visiblement convergente. Or, si la série des intégrales des fonctions strictement positives est convergente, en vertu du corollaire du théorème 7 la série de ces mêmes fonctions l'est presque partout, c'est-à-dire est presque partout convergente la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)$, où

$$\alpha_k(t) = \frac{|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}{1 + |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|}.$$

Si pour un t cette série converge, on aura $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leqslant 1$ pour des k assez grands. Donc pour de tels k, $|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| \leqslant 2\alpha_k(t)$. Par suite, la série $x_{n_1}(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$ est presque partout convergente. Soit $x_0(t)$ sa somme. C'est une fonction mesurable. La série indiquée étant presque partout convergente, on a $x_{n_k}(t) \to x_0(t)$. *A fortiori* $\{x_{n_k}(t)\}$ converge en

mesure vers $x_0(t)$, donc dans l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$, et par suite $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$.

Nous avons établi la convergence de la suite partielle. Comme pour $k \to \infty$, on a $n_k \to \infty$, l'inégalité $\rho(x_k, x_0) \leqslant \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$ implique $\rho(x_k, x_0) \to 0$, c'est-à-dire $x_k \to x_0$ dans $S(T, \Sigma, \mu)$.

Nous obtenons des cas particuliers importants si pour (T, Σ, μ) nous prenons l'intervalle $[a, b]$ muni de la mesure de Lebesgue; nous désignons alors $S(T, \Sigma, \mu)$ par $S(a, b)$. Si l'ensemble $T = \mathbb{N}$, la tribu Σ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$ et la mesure de chaque point de T est égale à l'unité, nous obtenons l'espace s introduit au § 3.

Examinons maintenant le problème de la séparabilité de l'espace métrique $S(T, \Sigma, \mu)$. Remarquons préalablement qu'en vertu du corollaire du théorème 3, l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs finies est dense dans $S(T, \Sigma, \mu)$.

Sur l'ensemble Σ dans lequel nous identifions des ensembles A et B tels que $A = B$ (mod. μ), définissons une métrique ρ_μ par la formule

$$\rho_\mu(A, B) = \rho(\chi_A, \chi_B); \quad A, B \in \Sigma.$$

On dit qu'une mesure μ est *séparable* si elle est σ-finie et si l'espace métrique (Σ, ρ_μ) est séparable.

THÉORÈME 16. *Soit une mesure μ σ-finie. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace métrique $S(T, \Sigma, \mu)$ soit séparable est que la mesure μ soit séparable.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Supposons que l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$ est séparable. Soit l'ensemble $H = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$ que l'on pourra identifier à Σ. Les métriques ρ et ρ_μ étant confondues sur Σ et la séparabilité héréditaire dans les espaces métriques (cf. 4.4), l'ensemble H, et donc Σ, sont séparables.

Condition suffisante. Supposons que μ est séparable. Soit Σ_0 un ensemble dénombrable partout dense dans Σ. Considérons l'ensemble $M = \{\sum_{k=1}^{m} r_k \chi_{A_k} : A_k \in \Sigma_0,\ m \in \mathbb{N}\}$, où r_k sont les nombres rationnels. L'ensemble M est visiblement dénombrable. Montrons que M est dense dans $S(T, \Sigma, \mu)$ *). On a déjà signalé que l'ensemble des fonctions à valeurs finies est dense dans $S(T, \Sigma, \mu)$; il est

*) Dans le cas complexe il faut considérer $M = \{\sum_{k=1}^{m} (r_k + is_k)\chi_{A_k} : A_k \in \Sigma_0,\ m \in \mathbb{N}\}$, où r_k et s_k sont les nombres rationnels.

donc évident que l'ensemble des fonctions à valeurs finies à coefficients rationnels l'est également. Il suffit donc d'approcher par des fonctions de M une fonction de la forme $y(t) = \sum_{k=1}^{m} r_k \chi_{A_k}(t)$, où r_k sont des rationnels, $A_k \in \Sigma$. L'ensemble Σ_0 étant dense dans Σ, il existe des suites $\{A_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ dans Σ_0, telles que $\rho_\mu(A_k^n, A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors

$$\rho(\chi_{A_k^n}, \chi_{A_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où

$$M \ni \sum_{k=1}^{m} r_k \chi_{A_k^n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(t)\,(\mu),$$

c.q.f.d.

Il y a lieu de remarquer que la mesure de Lebesgue est séparable sur une partie mesurable quelconque de $\mathbf{R}^n$. En effet, si D est une partie mesurable de $\mathbf{R}^n$, munie de la mesure de Lebesgue, on désignera par $\mathbf{S}(D)$ l'espace correspondant de fonctions mesurables. Montrons que $\mathbf{S}(D)$ est séparable.

Supposons d'abord que D est une boule B_m de rayon m et de centre 0. Alors B_m est un compact métrique. On montrera plus bas (voir théorème IV.4.3) que l'espace des fonctions continues $\mathbf{C}(B_m)$ est séparable. La topologie induite sur $\mathbf{C}(B_m)$ de $\mathbf{S}(B_m)$ étant visiblement plus faible que la topologie usuelle de $\mathbf{C}(B_m)$, l'espace $\mathbf{C}(B_m)$ sera *a fortiori* séparable pour la topologie induite. Cependant en vertu de la remarque qui suit le théorème 13, les fonctions continues sont denses dans $\mathbf{S}(B_m)$, ce qui prouve la séparabilité de $\mathbf{S}(B_m)$. Si $x \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, alors $x_m(t) = x(t)\chi_{B_m}(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} x(t)$, $\forall\, t \in \mathbf{R}^n$. Donc $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{S}(B_m)$ est dense dans $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, et la réunion des ensembles dénombrables partout denses de $\mathbf{S}(B_m)$, étendue à $m \in \mathbb{N}$, est dense dans $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, ce qui prouve la séparabilité de $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$. Si l'ensemble D est arbitraire, alors $\mathbf{S}(D)$ est séparable, puisqu'on peut l'identifier à un sous-espace de $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$.

Achevons ce paragraphe par l'étude des propriétés ordinales de l'espace réel $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$.

Ordonnons l'espace réel $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ en posant $x \leqslant y$ $(x, y \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu))$ si $x(t) \leqslant y(t)$ p.p.

Soit M un ensemble majoré de $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, c'est-à-dire il existe un élément $y \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ tel que $x \leqslant y$, $\forall\, x \in M$. Si l'ensemble M est dénombrable, il est évident qu'existe $x_0 = \sup M$ dans l'espace

ordonné S (T, Σ, μ) et de plus x_0 est la classe de fonctions équivalentes contenant la fonction

$$x_0(t) = \sup\{x(t) : x \in M\} \quad (t \in T). \tag{8}$$

La fonction $x_0(t)$ dépend du choix des fonctions $x(t)$ dans les classes $x \in M$, mais comme l'ensemble M est dénombrable, nous obtiendrons, en vertu de la formule (8), des fonctions équivalentes. Si M n'est pas dénombrable, cette définition de sup M est généralement impossible, car dans ce cas la fonction définie par la formule (8) peut s'avérer non mesurable, ou bien si l'on choisit des représentants $x(t)$, $x \in M$, différents, on peut obtenir d'après la formule (8) deux fonctions mesurables mais non équivalentes. Si, par exemple, A est un sous-ensemble non mesurable-Lebesgue de l'intervalle $[0, 1]$ et M est constitué des fonctions caractéristiques de tous les sous-ensembles ponctuels de M, alors $x_0(t) = \sup\{x(t) : x \in M\}$ est fonction caractéristique de l'ensemble A et de ce fait n'est pas mesurable, cependant sup M est de toute évidence la classe des fonctions presque partout nulles.

En vertu de (8)

$$\sup(x, y)(t) = \max(x(t), y(t)), \quad \inf(x, y)(t) = \min(x(t), y(t)).$$

THÉORÈME 17. *Soient* μ *une mesure* σ*-finie*, M *un ensemble non vide majoré de* S (T, Σ, μ). *Alors*

a) *existe* $x_0 = \sup M \in$ S (T, Σ, μ);

b) *existe un sous-ensemble dénombrable* $\{x_n\} \subset M$ *tel que* $\sup x_n = \sup M$.

DÉMONSTRATION. Prenons une fonction quelconque $x_1 \in M$ et considérons l'ensemble M' de toutes les fonctions de la forme $\sup(x, x')$, où $x \in M$. Il est évident que sup M et sup M' doivent exister simultanément et être égaux. Considérons ensuite l'ensemble M'' de toutes les fonctions de la forme $x - x'$, où $x \in M'$. Cet ensemble est composé de fonctions positives et est majoré. Si nous montrons qu'existe $y_0 = \sup M''$, alors $\sup M = x' + y_0$. Donc, sans restreindre la généralité, on peut dès le départ admettre que l'ensemble M est composé de fonctions positives et qu'avec les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_p$, il contient la fonction $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_p$.

Posons $m(x) = \rho(x, 0)$ pour tout $x \in$ S (T, Σ, μ). La fonction $\varphi(\lambda) = \lambda/(1 + \lambda)$ étant croissante sur $[0, +\infty)$, l'inégalité $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ entraîne $m(x_1) \leqslant m(x_2)$.

Posons $m_0 = \sup\{m(x) : x \in M\} \leqslant 1$ et trouvons une suite $\{x_n\} \subset M$ telle que $m(x_n) \to m_0$. Quitte à remplacer chaque x_n par $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ on peut considérer aussitôt que la suite $\{x_n\}$ est croissante.

Soit $x_0(t) = \sup x_n(t) = \lim x_n(t)$. Comme $x_0 \leqslant y$, on a $x_0 \in$ S (T, Σ, μ). D'après le théorème de Lebesgue $m(x_n) \to m(x_0)$,

d'où $m(x_0) = m_0$. Si l'on s'assure que $x_0 = \sup M$, on achève de démontrer le théorème 17.

Il est évident que, si y majore l'ensemble M, alors $y \geqslant x_0$. Reste à démontrer que x_0 est majorant de M. Prenons un élément quelconque $x \in M$ et posons $x'_n = \sup(x_n, x)$, $x'_0 = \sup(x_0, x)$. Comme $x_n \uparrow x_0$, alors $x'_n \uparrow x'_0$. Donc $m(x'_n) \to m(x'_0)$. D'après les propriétés de l'ensemble M on a $x'_n \in M$, d'où $m(x'_0) \leqslant m_0$. Par ailleurs, $x'_0 \geqslant x_0$, donc $m(x'_0) \geqslant m(x_0) = m_0$, d'où $m(x'_0) = m_0$. Par suite

$$\int_T \left(\frac{x'_0}{1+x'_0} - \frac{x_0}{1+x_0}\right) d\mu = 0.$$

L'intégrant étant positif, on a $x'_0(t) = x_0(t)$ p.p., ce qui prouve que $x_0 = \sup M = \sup x_n$.

COROLLAIRE 1. *Soient* μ *une mesure* σ*-finie*, M *un ensemble de* $S(T, \Sigma, \mu)$ *non vide minoré. Alors*

a') *existe* $x_0 = \inf M \in S(T, \Sigma, \mu)$;

b') *existe un sous-ensemble dénombrable* $\{x_n\} \subset M$ *tel que* $\inf x_n = \inf M$.

Pour prouver ce corollaire il suffit de considérer l'ensemble $-M = \{-x : x \in M\}$.

De la démonstration du théorème 17 on déduit sans peine la proposition plus générale suivante.

COROLLAIRE 2. *Si* M *est un ensemble de* $S(T, \Sigma, \mu)$ *tel que* $\sup\{x(t) : x \in M\} < \infty$ *p.p., il existe* $x_0 = \sup M \in S(T, \Sigma, \mu)$. *De plus, si* M *est filtrant supérieurement, on peut choisir une suite* $\{x_n\} \subset M$ *telle que* $x_n \uparrow x_0$ *p.p.*

La proposition b) du théorème 17 est vraie pour tout ensemble M majoré si et seulement si la mesure μ est σ-finie. La proposition a) est valable dans une classe d'espaces mesurés bien plus large.

On dira qu'un espace mesuré (T, Σ, μ) possède la *propriété de somme directe* si est réalisée la condition suivante.

Il n'existe qu'une famille d'ensembles deux à deux disjoints $T_\xi \in \Sigma$, $0 < \mu(T_\xi) < \infty$ $(\xi \in \Xi)$, telle que pour tout $A \in \Sigma$, $\mu(A) < +\infty$, on peut exhiber un ensemble dénombrable d'indices $\Xi_0 \subset \Xi$ et un ensemble N de mesure nulle, tels que $A = \bigcup_{\xi \in \Xi_0} (A \cap T_\xi) \cup N$.

Il est évident que

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi \in \Sigma \text{ et } \mu\left(T \setminus \bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi\right) = 0.$$

Du théorème 17 on déduit sans peine que, si l'espace (T, Σ, μ) possède la propriété de somme directe, la proposition a) du théorème 17 est satisfaite dans l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$.

REMARQUE. Si la suite $x_\alpha \to x$ (μ) sur chaque ensemble T_ξ ($\xi \in \Xi$), alors $x_\alpha \to x$ (μ).

En effet, si $A \in \Sigma(\mu)$, par définition de $\{T_\xi\}$ on a $A = \bigcup_{\xi \in \Xi_0} (A \cap T_\xi) \cup N$, où $\mu(N) = 0$ et Ξ_0 est dénombrable. Comme

$$\mu(A) = \sum_{\xi \in \Xi_0} \mu(A \cap T_\xi) < \infty,$$

pour tout $\delta > 0$ il existe un sous-ensemble fini $\Xi_1 \subset \Xi_0$ tel que

$$\sum_{\xi \in \Xi_0 \setminus \Xi_1} \mu(A \cap T_\xi) < \delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Si n est le nombre d'éléments de Ξ_1, alors pour $\alpha \geqslant \alpha_0$ on a

$$\mu(\{t \in T_\xi : |x_\alpha(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}) < \delta/n \quad (\xi \in \Xi_1).$$

Donc

$$\mu(\{t \in A : |x_\alpha(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \sum_{\xi \in \Xi_1} \mu(\{t \in T_\xi : |x_\alpha(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} + \\ + \sum_{\xi \in \Xi_0 \setminus \Xi_1} \mu(A \cap T_\xi) < n\delta/n + \delta = 2\delta.$$

CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS

§ 1. Définitions fondamentales

1.1. Un espace vectoriel sur le corps des réels ou des complexes est la généralisation naturelle de l'espace euclidien ordinaire. Deux opérations algébriques y sont définies: l'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre), vérifiant certaines conditions.

Soit K le corps des réels ou des complexes (le corps des scalaires). On dit qu'un ensemble X est un *espace vectoriel* sur K si pour tout couple d'éléments $x, y \in X$ est définie leur somme $x + y$, élément du même ensemble, et pour tous $x \in X$ et $\lambda \in K$ est défini le produit λx, également élément de X, ces opérations satisfaisant aux axiomes suivants:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité);
2) $x + y = y + x$ (commutativité);
3) X contient un élément 0 tel que $0 \cdot x = 0$ pour tout $x \in X$;
4) $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x,$ } (distributivité);
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ }
6) $(\lambda\mu)\, x = \lambda\, (\mu x)$ (associativité);
7) $1 \cdot x = x$.

Si dans un ensemble X on définit des opérations d'addition et de multiplication par un nombre, possédant les propriétés ci-dessus, on dit que X est muni d'une structure d'espace vectoriel. On appelle espace vectoriel *réel* un espace vectoriel sur R, et espace vectoriel *complexe* un espace vectoriel sur C. Nous nous servirons du terme espace vectoriel lorsque le corps des scalaires n'aura aucune importance pour nous (ce sera généralement le cas) ou lorsque cela découlera du contexte.

Les espaces $C(K)$, $C^{(l)}[a, b]$, $S(T, \Sigma, \mu)$, s, $l^{\infty}(T)$ introduits au chapitre I sont des espaces vectoriels si l'on définit la somme de deux de leurs éléments comme une fonction égale à la somme des fonctions correspondantes, et le produit d'un élément par un nombre comme le produit d'une fonction par un nombre. L'élément nul de tous ces ensembles sera une fonction identiquement nulle.

Un autre exemple d'espace vectoriel est l'ensemble $\mathbf{K}^n$ de tous les vecteurs n-dimensionnels (à coordonnées dans $\mathbb{K}$), les opérations d'addition et de multiplication par un nombre de $\mathbb{K}$ ayant lieu sur les coordonnées. Cet espace vectoriel est le principal objet d'étude de l'algèbre linéaire.

1.2. Signalons les corollaires les plus simples des axiomes 1) à 7) (x, y, z désignent ici les éléments d'un même espace vectoriel $\mathbf{X}$ et λ, $\mu \in \mathbb{K}$)

a) $x + 0 = x$.

En effet, $x + 0 = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0)\, x = 1 \cdot x = x$ (axiomes 3), 4), 7)).

b) A chaque x est associé un élément unique x' tel que $x + x' = 0$. Plus exactement : $x' = (-1) \cdot x$. L'élément x' est désigné ordinairement par $-x$ et appelé *symétrique* de x.

D'après ce qui a été indiqué, prenons $x' = (-1) \cdot x$. En vertu des axiomes 3), 4), 7) on a $x + x' = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. S'il existe encore un élément $\bar{x}$ pour lequel $x + \bar{x} = 0$, l'associativité et la commutativité de l'addition donnent, compte tenu de a)

$$x' = x' + 0 = x' + (x + \bar{x}) = (x' + x) + \bar{x} = \\ = (x + x') + x = 0 + \bar{x} = \bar{x} + 0 = \bar{x}.$$

c) $-(\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x)$.

En effet, 6) et (7) impliquent

$$-(\alpha x) = (-1) \cdot (\alpha x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha((-1) \cdot x) = \alpha \cdot (-x).$$

d) Pour tout couple x, y il existe un élément unique z tel que $z + y = x$; on l'appelle *différence* des éléments x et y et on le note $z = x - y$.

Posons $z = x + (-y)$. D'après ce qu'on a démontré plus haut on trouve $z + y = (x + (-y)) + y = x + (y + (-y)) = x + 0 = x$. S'il existait encore un élément $\bar{z}$ satisfaisant à la condition indiquée, on aurait

$$\bar{z} = \bar{z} + 0 = \bar{z} + (y + (-y)) = (\bar{z} + y) + (-y) = x + (-y) = z.$$

e) $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$.

En effet, si $x = y$, on a de toute évidence

$$x - y = x + (-y) = y + (-y) = 0.$$

Si $x - y = 0$, alors

$$y = y + (x - y) = [y + (-y)] + x = x + 0 = x.$$

f) $\lambda\,(x - y) = \lambda x - \lambda y$; $(\lambda - \mu)\, x = \lambda x - \mu x$.

En vertu de la distributivité de la multiplication et compte tenu de b) et c) on a

$$\lambda (x - y) = \lambda [x + (-y)] = \lambda x + \lambda (-y) = \lambda x + (-\lambda y) = \\ = \lambda x - \lambda y$$

et

$$(\lambda - \mu) x = \lambda x + (-\mu) x = \lambda x + (-\mu x) = \lambda x - \mu x.$$

g) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

En effet, $\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda (0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0) x = 0 \cdot x = \mathbf{0}$.

h) Si $\lambda x = \mathbf{0}$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = \mathbf{0}$.

En effet, $x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) x = \frac{1}{\lambda} (\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

i) Si $\lambda x = \lambda y$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = y$.

C'est une conséquence immédiate de h) et de e).

j) Si $\lambda x = \mathbf{0}$ et $x \neq \mathbf{0}$, alors $\lambda = 0$.

En effet, si $\lambda \neq 0$, en vertu de h) on aurait $x = \mathbf{0}$.

k) Si $\lambda x = \mu x$ et $x \neq \mathbf{0}$, alors $\lambda = \mu$.

C'est évident.

Signalons en conclusion que grâce à l'associativité de l'addition, on peut, au lieu de la somme $(x + y) + z$ ou la somme $x + (y + z)$ écrire $x + y + z$ (on supprime les parenthèses) et en faire de même pour un plus grand nombre de termes.

1.3. De même que pour les espaces métriques, nous ne ferons pas de distinction entre des espaces vectoriels $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ si entre leurs éléments on peut établir un *isomorphisme linéaire*, c'est-à-dire une correspondance biunivoque $x \leftrightarrow y$ telle que $x_1 \leftrightarrow y_1$ et $x_2 \leftrightarrow y_2$ impliquent $\lambda x_1 + \mu x_2 \leftrightarrow \lambda y_1 + \mu y_2$.

Dans cette optique l'ensemble des réels et l'ensemble des points d'une droite doivent être considérés comme un même espace vectoriel, ce qui du reste se fait en analyse.

1.4. Soit $\mathbf{X}_0$ un ensemble d'un espace vectoriel $\mathbf{X}$, contenant avec deux quelconques de ses éléments x et y leur combinaison linéaire $\lambda x + \mu y$. Dans $\mathbf{X}_0$ sont donc définies l'addition des éléments et la multiplication d'un élément par un nombre, le résultat de ces opérations étant un élément de $\mathbf{X}_0$. L'axiome 3) de l'espace vectoriel ($\mathbf{0} = 0 \cdot x$) est satisfait pour $\mathbf{X}_0$. Les autres le sont également, puisqu'ils ont lieu dans $\mathbf{X}$. Donc $\mathbf{X}_0$ est naturellement un espace vectoriel appelé *sous-espace vectoriel* de $\mathbf{X}$. (On dira parfois *ensemble linéaire*.)

Il est évident que l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles linéaires de $\mathbf{X}$ est encore un ensemble linéaire. Donc, si E est un ensemble de $\mathbf{X}$, il existe un plus petit ensemble linéaire $\mathcal{L}(E)$ contenant E. Ce sera l'intersection de tous les ensembles linéaires contenant E. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ s'appelle *enveloppe linéaire* de l'ensemble E.

Il est immédiat que $\mathcal{L}(E)$ est confondu avec l'ensemble $\tilde{L}$ de tous les éléments x de la forme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$,

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une collection quelconque d'éléments de E, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres arbitraires. Les éléments x sont appelés *combinaisons linéaires* de $x_1, \ldots, x_n$.

En effet, $\widetilde{L}$ est de toute évidence un ensemble linéaire contenant E. Par ailleurs, tout ensemble linéaire contenant E doit contenir toutes les combinaisons linéaires possibles des éléments de E, c'est-à-dire $\widetilde{L}$. Donc $\mathscr{L}(E) = \widetilde{L}$.

On dit que les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *linéairement indépendants* si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Dans le cas contraire, les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *linéairement dépendants*. Ainsi, par exemple, les éléments x et $-x$ sont linéairement dépendants, puisque $1 \cdot x + 1 \cdot (-x) = 0$. Si parmi les éléments $x_1, \ldots, x_n$ il en existe un qui est nul, ces éléments sont linéairement dépendants.

On dit qu'un système infini d'éléments est *linéairement indépendant* si toute collection finie d'éléments distincts de ce système est linéairement indépendante.

Si les éléments $\{x_\xi\}$ forment un système linéairement indépendant, il est clair que l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_{\xi_k}$$

implique

$$\lambda_k = \mu_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Un exemple de système linéairement indépendant dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ est le système $\{x_n\}$ $(x_n(t) = t^n)$.

On dit qu'un système linéairement indépendant $\{x_\xi\}$ est une *base algébrique* d'un espace vectoriel $\mathbf{X}$ si $\mathscr{L}(\{x_\xi\}) = \mathbf{X}$. Donc, tout élément $x \in \mathbf{X}$ peut être représenté sous la forme d'une combinaison linéaire d'éléments d'une base algébrique et ce de façon unique, ainsi qu'il résulte de ce qui a été dit plus haut.

De ce point de vue les plus simples de tous les espaces vectoriels sont ceux qui possèdent une base algébrique finie. De tels espaces sont dits *finidimensionnels* et le nombre des éléments constituant une base, *dimension* de cet espace. On montre sans peine que la dimension d'un espace vectoriel est un invariant de cet espace, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de la base algébrique.

Soit $\mathbf{X}$ un espace vectoriel de dimension n finie. On a vu que chaque élément $x \in \mathbf{X}$ peut être représenté de façon unique sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, où $x_1, \ldots, x_n$ est une base algébrique. En associant à un élément x le vecteur $\tilde{x} \in \mathbf{K}^n$ de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ nous établissons une correspondance biunivoque entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{K}^n$ qui est un isomorphisme linéaire puisque $x \longleftrightarrow \tilde{x}$ et

$y \leftrightarrow \tilde{y}$ impliquent $\lambda x + \mu y \leftrightarrow \lambda\tilde{x} + \mu\tilde{y}$. D'après la remarque précédente nous pouvons identifier les espaces X et K^n et considérer ainsi X comme ensemble de vecteurs de dimension n.

Pour cette raison les éléments de tout espace vectoriel sont appelés *vecteurs*.

1.5. Dans la suite, nous aurons besoin des notations

$$\forall x \in X \text{ et } \forall E \subset X, \quad x + E = \{x + y : y \in E\};$$

$$\forall E_1 \subset X \text{ et } \forall E_2 \subset X, \quad E_1 + E_2 = \{x + y : x \in E_1, \quad y \in E_2\};$$

$$\forall \lambda \in K \text{ et } \forall E \subset X, \ \lambda E = \{\lambda x : x \in E\}.$$

On remarquera que d'une façon générale $E + E \neq 2E$, mais que $2E \subset E + E$.

1.6. Définissons quelques opérations permettant de construire des espaces vectoriels d'après un espace donné.

On dit qu'un espace vectoriel X est *somme directe algébrique* des espaces vectoriels X_1 et X_2 si X_1 et X_2 sont des sous-espaces vectoriels de X et tout $x \in X$ est représentable de façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Si X_1 et X_2 sont des espaces vectoriels (sur le corps K), leur produit direct $X = X_1 \times X_2$ est un espace vectoriel si les opérations y sont définies par les égalités

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Soient X un espace vectoriel, X_0 un sous-espace de X. Groupons les éléments de X en classes en rapportant deux éléments x' et x'' dans une même classe si $x' - x'' \in X_0$. Il est évident que des classes distinctes ne peuvent renfermer d'éléments communs et chaque élément $x \in X$ appartient à une (et par conséquent à une seule) classe. Soit $\bar{x}$ une de ces classes et $x \in \bar{x}$. De la définition il résulte que $\bar{x} = x + X_0$. Inversement, l'ensemble de la forme $x + X_0$ est une classe, plus exactement la classe contenant l'élément x.

On peut munir l'ensemble X/X_0 de toutes les classes des opérations algébriques en posant

$$\bar{x} + \bar{y} = x + y + X_0, \quad \lambda\bar{x} = \lambda x + X_0$$
$$(\bar{x}, \bar{y} \in X/X_0, \quad x \in \bar{x}, \quad y \in \bar{y}).$$

On vérifie sans peine que ces définitions ne dépendent pas du choix des représentants x, y des classes $\bar{x}$, $\bar{y}$. D'après les définitions données, X/X_0 devient un espace vectoriel que nous appellerons *espace quotient*, le zéro de cet espace étant visiblement la classe renfermant le zéro de X, c'est-à-dire le sous-espace X_0.

§ 2. Opérateurs et fonctionnelles linéaires

2.1. Soient X, Y des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application $U: X \to Y$ est une *application linéaire* ou un *opérateur linéaire* si

$$U(\lambda x + \mu y) = \lambda U(x) + \mu U(y),$$

$\forall\lambda$, $\forall\mu \in \mathbb{K}$ et $\forall x$, $\forall y \in X$. L'ensemble de toutes les applications linéaires de X dans Y, noté $L(X, Y)$, est un espace vectoriel si nous y définissons les opérations algébriques de la manière suivante.

Soient $U_1, U_2 \in L(X, Y)$. Par définition, $U = U_1 + U_2$ est un opérateur de X dans Y:

$$U(x) = U_1(x) + U_2(x) \quad (x \in X). \tag{1}$$

De toute évidence $U \in L(X, Y)$. Si $U \in L(X, Y)$ $(\lambda \in \mathbb{K})$, alors $\widetilde{U} = \lambda U$ se définit comme:

$$\widetilde{U}(x) = \lambda U(x) \quad (x \in X). \tag{2}$$

De toute évidence $\widetilde{U} \in L(X, Y)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'avec une telle définition des opérations algébriques, $L(X, Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. A noter seulement que le zéro de $L(X, Y)$ sera l'application identiquement nulle $U_0 = 0$:

$$U(x) = 0 \quad (x \in X).$$

Signalons que pour tout $U \in L(X, Y)$ on a $U(0) = 0$ et $U(-x) = -U(x)$ $(x \in X)$. On appelle *noyau* d'une application $U \in L(X, Y)$ l'ensemble $\operatorname{Ker} U = U^{-1}(0)$, qui, manifestement, est un sous-espace vectoriel de X. On voit sans peine que l'application U est bijective si et seulement si $\operatorname{Ker} U = \{0\}$.

On appelle *isomorphisme linéaire* de X sur Y une application bijective linéaire $U: X \to Y$. Les espaces X et Y sont alors dits *linéairement isomorphes* (cette définition est compatible de toute évidence avec le n° 1.3).

Une application linéaire f d'un espace vectoriel X dans le corps des scalaires $\mathbb{K}$ est appelée *forme linéaire* ou *fonctionnelle linéaire*.

2.2. Jusqu'à maintenant notre exposé était valable pour les espaces vectoriels aussi bien réels que complexes. Le théorème de Hahn-Banach que nous démontrerons plus bas, et la théorie des opérateurs impliquent un appareil auxiliaire pour le cas complexe.

Soit X un espace vectoriel quelconque. Les formules (1) et (2) munissent l'ensemble des fonctionnelles linéaires d'une structure d'espace vectoriel $L(X, \mathbb{K})$. Cependant dans le cas d'un espace complexe X on définira le produit d'une fonctionnelle f par un nombre complexe λ à l'aide de la formule

$$(\lambda f)(x) = \overline{\lambda} f(x) \quad (x \in X)\ ^{*)}. \tag{3}$$

*) Ici et dans la suite $\overline{\lambda}$ est conjugué complexe de λ.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient la formule (2). Il est aisé de voir qu'avec une telle définition des opérations algébriques, $L(X, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel que nous appellerons *dual algébrique* de X et désignerons par X^+.

REMARQUE. Si les opérateurs ne sont pas des fonctionnelles, la formule usuelle (2) est valable dans le cas complexe aussi.

Soit X un espace vectoriel complexe. Si dans X nous conservons l'opération d'addition précédente et considérons que la multiplication par un scalaire n'est définie que dans le cas de scalaires réels et ce, de la manière habituelle, on obtient un espace vectoriel réel $X_{\mathbb{R}}$ associé à X. On appelle *fonctionnelle linéaire réelle* sur X une fonctionnelle linéaire sur $X_{\mathbb{R}}$.

Soit f une fonctionnelle linéaire sur X. Considérons la fonctionnelle φ définie sur $X_{\mathbb{R}}$ comme suit:

$$\varphi(x) = \operatorname{Re} f(x) \quad (x \in X). \tag{4}$$

Il est immédiat de vérifier que φ est une fonctionnelle linéaire réelle. En effet, si $x_1, x_2 \in X$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \operatorname{Re} f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \operatorname{Re}[\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)] =$$
$$= \lambda \operatorname{Re} f(x_1) + \mu \operatorname{Re} f(x_2) = \lambda\varphi(x_1) + \mu\varphi(x_2).$$

Montrons que pour tout $x \in X$:

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix), \tag{5}$$

où i est l'unité imaginaire. En effet,

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} if(x) =$$
$$= \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = \varphi(x) - i\varphi(ix).$$

Ainsi nous avons obtenu la représentation (2) pour la fonctionnelle f sur X. Inversement, si φ est une fonctionnelle linéaire réelle sur X, alors f, définie avec la formule (5), est une fonctionnelle linéaire sur X, et de plus on a la relation (4) (la vérification est laissée au lecteur).

2.3. Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un ensemble linéaire H de X est un *hypersous-espace* si $H \neq X$ et si existe $x_0 \in X$ tel que $X = \mathcal{L}(H, x_0)$.

LEMME 1. *Soient X un espace vectoriel, H un hypersous-espace dans X et $x_1 \in X \setminus H$. Alors tout élément $x \in X$ se représente de façon unique sous la forme $x = \lambda x_1 + h$, où $\lambda \in \mathbb{K}$, $h \in H$.*

DÉMONSTRATION. Par définition de l'hypersous-espace il existe un $x_0 \in X$ pour lequel $X = \mathcal{L}(H, x_0)$. Donc $x_1 = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 h_1 + \ldots$ $\ldots + \lambda_n h_n$, où $h_i \in H$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Si $h_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$, alors $h_0 \in H$ et

$x_1 = \lambda_0 x_0 + h_0$, $\lambda_0 \neq 0$, puisque $x_1 \notin H$. Pour $x \in X$ quelconque il existe $\mu \in K$ et $h \in H$, tels que

$$x = \mu x_0 + h = \mu \frac{x_1 - h_0}{\lambda_0} + h = \frac{\mu}{\lambda_0} x_1 + \left(h - \frac{\mu}{\lambda_0} h_0\right).$$

Comme $h - (\mu/\lambda_0)\, h_0 \in H$, ceci est la représentation cherchée. Montrons qu'elle est unique. Soit $x = \lambda x_1 + h = \mu x_1 + g$ $(h, g \in H)$. Alors $(\lambda - \mu)\, x_1 = g - h \in H$, mais $x_1 \notin H$, d'où $\lambda = \mu$, et par suite $h = g$.

Le lemme 1 entraîne que, si $X_0 \subset X$ contient H, alors $X_0 = H$ ou X.

On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel X tout ensemble de la forme $x + H$, où $x \in X$ et H est un hypersous-espace. Les théorèmes suivants montrent que les hyperplans sont étroitement liés aux fonctionnelles linéaires.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle sur un espace vectoriel X. Alors*

1) $H = f^{-1}(0)$ *est un hypersous-espace*;

2) *pour tout* $\lambda \in K$ *on a* $f^{-1}(\lambda) = x_\lambda + H$, *où* $f(x_\lambda) = \lambda$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit $x_0 \in X$, tel que $f(x_0) = \lambda_0 \neq 0$. Pour tout $x \in X$ on a

$$x = \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 + \left(x - \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0\right).$$

Alors l'élément $h = x - \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 \in H$. En effet, $f(h) = f(x) - \frac{f(x)}{\lambda_0} f(x_0) = 0$, d'où $h \in H$ et $x = \frac{f(x)}{\lambda_0} x_0 + h$, c'est-à-dire H est un hypersous-espace.

2) Si $x_\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0} x_0$, alors $f(x_\lambda) = \lambda$, c'est-à-dire il existe de tels x_λ. Soit x_λ un élément quelconque tel que $f(x_\lambda) = \lambda$. Si $y \in f^{-1}(\lambda)$, alors $f(y) = \lambda$ et $y = x_\lambda + (y - x_\lambda)$. Il est évident que $y - x_\lambda \in H$, d'où $y \in x_\lambda + H$. Inversement, si $z \in x_\lambda + H$, alors $z = x_\lambda + h$ $(h \in H)$, d'où $f(z) = \lambda$ et $z \in f^{-1}(\lambda)$. Par conséquent, $f^{-1}(\lambda) = x_\lambda + H$.

THÉORÈME 2. *Soit H un hypersous-espace dans un espace vectoriel* X, $x_0 \notin H$, $\lambda \neq 0$. *Il existe alors une fonctionnelle linéaire unique f sur* X *telle que*

1) $f^{-1}(0) = H$;

2) $f(x_0) = \lambda$.

DÉMONSTRATION. H étant un hypersous-espace, en vertu du lemme 1 tout $x \in X$ admet la représentation unique $x = \mu x_0 + h$ $(h \in H)$.

Posons $f(x) = \mu\lambda$. Vérifions que f est une fonctionnelle linéaire. Si $y = \mu' x_0 + h'$ $(h' \in H)$, alors $x + y = (\mu + \mu') x_0 + (h + h')$, d'où $f(x + y) = (\mu + \mu')\lambda = f(x) + f(y)$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha x = \alpha\mu x_0 + \alpha h$, d'où $f(\alpha x) = \alpha\mu\lambda = \alpha f(x)$.

Comme $x_0 = 1 \cdot x_0 + 0$, on a $f(x_0) = \lambda$. Pour $x \in H$, on a $x = 0 \cdot x_0 + x$, d'où $f(x) = 0$ et par suite $f^{-1}(0) \supset H$. Vu que $\lambda \neq 0$, on a $f \not\equiv 0$ sur X. En vertu du théorème 1, $f^{-1}(0)$ est un hypersous-espace. Il s'ensuit, en vertu de la remarque consécutive à la démonstration du lemme 1, que $f^{-1}(0) = H$.

Prouvons que la fonctionnelle f est unique. Supposons qu'une fonctionnelle linéaire g vérifie 1) et 2). Pour tout $x = \mu x_0 + h$ $(h \in H)$, on a

$$g(x) = g(\mu x_0 + h) = \mu g(x_0) + g(h) = \mu\lambda = f(x).$$

COROLLAIRE. *Si f et g sont des fonctionnelles linéaires sur un espace vectoriel* X *et* $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, *il existe* $\alpha \in \mathbb{K}$, *tel que* $g = \alpha f$.

DÉMONSTRATION. Si $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = \mathrm{X}$, on a $f = g \equiv 0$. Supposons que $f^{-1}(0) = g^{-1}(0) = H$ est un hypersous-espace. Soit $x_0 \in H$. Alors $f(x_0) = \lambda \neq 0$, $g(x_0) = \mu \neq 0$. Si $\alpha = \mu/\lambda$, alors $g^{-1}(0) = H$, $(\alpha f)^{-1}(0) = H$, $g(x_0) = \mu$, $(\alpha f)(x_0) = \mu$. La propriété d'unicité du théorème 2 donne $g = \alpha f$.

On peut grouper les théorèmes 1, 2 et le corollaire du théorème 2 dans la proposition suivante.

THÉORÈME 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble* $M \subset \mathrm{X}$ *soit un hyperplan est que* $M = \{x \in \mathrm{X} : f(x) = \lambda\}$ *pour un* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et une fonctionnelle* f *linéaire non nulle sur* X. *Ceci étant,* f *et* λ *sont définies par* H *au facteur commun* μ *près,* $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$.

Arrêtons-nous en conclusion sur les liens qui relient les cas réels et complexes.

Soient X un espace vectoriel complexe, $\mathrm{X}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel associé à X. Un *hyperplan réel de* X est un hyperplan de $\mathrm{X}_{\mathbb{R}}$. Il est aisé de voir qu'un hyperplan M est réel si et seulement si $M = \{x \in \mathrm{X} : f(x) = \lambda\}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est une fonctionnelle linéaire réelle sur X.

LEMME 2. *Soit* X *un espace vectoriel complexe. Si* M *est un hypersous-espace réel de* X, *alors* $M \cap (iM)$ *est un hypersous-espace de* X. *Tout hyperplan de* X *est l'intersection de deux hyperplans réels définis de façon unique.*

DÉMONSTRATION. Si M est un hypersous-espace réel, alors $M = \{x : g(x) = 0\}$, où g est une fonctionnelle linéaire réelle. Pour $f(x) = g(x) - ig(ix)$ on a $M \cap (iM) = \{x : f(x) = 0\}$, d'où $M \cap (iM)$ est un hypersous-espace.

Si H est un hyperplan, alors $H = \{x: f(x) = \lambda + i\mu\}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et f est une fonctionnelle linéaire. Si $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, alors $H = \{x: g(x) = \lambda\} \cap \{x: g(ix) = -\mu\}$.

§ 3. Ensembles convexes et semi-normes

3.1. Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *convexe* si avec tout couple d'éléments x, y il contient les éléments de la forme $\lambda x + (1 - \lambda) y$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Cette notion admet la même signification géométrique que dans le plan, c'est-à-dire l'ensemble E contient avec deux quelconques de ses points x, y, l'*intervalle* $\{\lambda x + (1 - \lambda) y: 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ tout entier qui les joint. On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *équilibré* si pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$, tel que $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\lambda x \in E$. On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *absolument convexe* si pour un couple quelconque $x, y \in E$ et $\forall \lambda \in K$, $\forall \mu \in K$, tels que $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$, on a $\lambda x + \mu y \in E$.

Citons quelques corollaires simples de ces définitions.

a) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit absolument convexe est qu'il soit à la fois convexe et équilibré.

En effet, il est évident qu'un ensemble absolument convexe est convexe et équilibré. Inversement, supposons que E est un ensemble convexe équilibré, $x, y \in E$ et $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$. Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$, alors de toute évidence $\lambda x + \mu y \in E$. Si par contre $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, alors

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in E, \quad \frac{\mu}{|\mu|} y \in E \quad \text{et} \quad \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1,$$

par suite

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\mu y}{|\mu|} \right) \in E.$$

b) Si E_1 et E_2 sont des ensembles convexes dans X, $\lambda \in K$, alors les ensembles $E_1 + E_2$ et λE_1 sont convexes. La même proposition a lieu si l'on remplace la convexité par la convexité absolue.

c) Si E est un ensemble absolument convexe non vide, alors $0 \in E$, et si $|\lambda| \leqslant |\mu|$, alors $\lambda E \subset \mu E$.

La démonstration élémentaire des propositions b) et c) est laissée au lecteur.

Si E est une partie non vide de X, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies $\Sigma \lambda_i x_i$, où $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$ et tous les $x_i \in E$, est appelé *enveloppe convexe* de l'ensemble E et noté co (E). Il est évident que co (E) est le plus petit ensemble convexe contenant E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies $\sum \lambda_i x_i$, où $\sum |\lambda_i| \leqslant 1$ et tous les $x_i \in E$, est appelé *enveloppe absolument convexe* de l'ensemble E et noté abs co (E). Il est évident que abs co (E) est le plus petit ensemble absolument convexe contenant E.

Dans un espace vectoriel X, on dit qu'un ensemble E est *absorbant* si pour tout $x \in X$ il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \mu E$ pour tous les μ, $|\mu| \geqslant \lambda$. La signification géométrique de cette propriété est la suivante: toute demi-droite issue de 0 contient un intervalle d'extrémité 0 entièrement compris dans E. D'après c), si E est absolument convexe il sera absorbant si et seulement si pour tout $x \in X$ existe un $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda E$, c'est-à-dire si $X = \bigcup_{\lambda>0} \lambda E$ et même (toujours d'après c)) si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nE$.

3.2. Soit X un espace vectoriel. On dit qu'une fonction p réelle, définie sur X, est *semi-additive*, si pour un couple quelconque d'éléments $x_1, x_2 \in X$

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2),$$

positivement homogène, si pour $\lambda \geqslant 0$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

homogène, si pour tout λ

$$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x).$$

On appelle *sous-norme* une fonction semi-additive, positivement homogène. On appelle *semi-norme* une sous-norme p homogène. Voici quelques propriétés des fonctions introduites.

a) $p(0) = 0$ pour toute sous-norme p.

b) Si p est une semi-norme, alors $p(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X$. Ceci découle de la relation

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

c) Si p est une semi-norme, alors

$$|p(x) - p(y)| \leqslant p(x - y).$$

En effet, la semi-additivité de p entraîne

$$p(x) = p(x - y + y) \leqslant p(x - y) + p(y).$$

En permutant x et y et en utilisant le fait que $p(x - y) = p(y - x)$, on obtient ce qu'on voulait.

c') Si p est une sous-norme, on obtient de façon analogue

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \max(p(x - y), p(y - x)).$$

D'après a), pour toute semi-norme on a $p(0) = 0$, mais il peut arriver que $p(x) = 0$ pour $x \neq 0$. On appelle *norme* une semi-norme pour laquelle $p(x) = 0$ entraîne $x = 0$.

Le lemme suivant décrit le lien existant entre les classes de fonctions introduites et les ensembles convexes.

LEMME 1. 1) *Soit p une sous-norme positive. Alors pour tout $\lambda > 0$ les ensembles $\{x: p(x) < \lambda\}$ et $\{x: p(x) \leqslant \lambda\}$ sont convexes et absorbants. Si p est une semi-norme, ces ensembles sont absolument convexes.*

2) *A tout ensemble absorbant convexe $U \subset X$ est associée une sous-norme positive p_U appelée fonctionnelle de Minkowski (de l'ensemble U) et définie par*

$$p_U(x) = \inf\{\lambda: \lambda > 0,\ x \in \lambda U\},$$

et de plus

$$\{x: p_U(x) < 1\} \subset U \subset \{x: p_U(x) \leqslant 1\}. \tag{1}$$

Si, par ailleurs, U est absolument convexe, alors p_U est une semi-norme.

DÉMONSTRATION. 1) Nous montrerons seulement que l'ensemble $E_\lambda = \{x: p(x) < \lambda\}$ est absorbant et nous laisserons au lecteur la vérification élémentaire des autres assertions. Si $m = \max(p(x), p(-x))$, alors pour $|\mu| \geqslant (m+1)/\lambda$ on a

$$p(x/\mu) = 1/|\mu|\, p(\operatorname{sign}\mu\cdot x) \leqslant \lambda/(m+1)\, p(\operatorname{sign}\mu\cdot x) < \lambda\ ^{*)},$$

d'où $x \in \mu E_\lambda$. Donc E_λ est un ensemble absorbant.

2) L'ensemble U étant absorbant, on a $p_U(x) < +\infty$. Il est évident que $p_U(0) = 0$. Donc, dans la vérification de l'homogénéité positive on peut admettre que $\lambda > 0$. Vu que $\lambda x \in \mu U$ si et seulement si $x \in (\mu/\lambda)\, U$, il vient

$$p_U(\lambda x) = \inf\{\mu > 0: \lambda x \in \mu U\} = \lambda \inf\{(\mu/\lambda): \mu > 0,\ x \in (\ /\lambda)\, U\} = \lambda p_U(x).$$

Si U est absolument convexe, alors du fait qu'il est équilibré $\lambda x \in \mu U$ si et seulement si $x \in (\mu/|\lambda|)\, U$, d'où

$$p_U(\lambda x) = \inf\{\mu > 0: \lambda x \in \mu U\} = |\lambda| \inf\{(\mu/|\lambda|): \mu > 0,\ x \in (\mu/|\lambda|)\, U\} = |\lambda|\, p_U(x).$$

Il nous reste à vérifier la semi-additivité de p_U. Soit $x, y \in X$; $\varepsilon > 0$. Il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que

$$p_U(x) < \lambda < p_U(x) + \varepsilon, \quad p_U(y) < \mu < p_U(y) + \varepsilon,$$

d'où $x/\lambda,\ y/\mu \in U$. En vertu de la convexité de l'ensemble U, on a

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{y}{\mu} \in U,$$

d'où

$$p_U(x+y) \leqslant \lambda + \mu < p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$$

---

*) Si $\mu \in \mathbb{C}$, alors $\operatorname{sign}\mu = \begin{cases} |\mu|/\mu & \text{pour } \mu \neq 0, \\ 0 & \text{pour } \mu = 0. \end{cases}$

Il s'ensuit que $p_U(x+y) \leqslant p_U(x) + p_U(y)$, puisque ε est arbitraire. 1) est évident. Ceci achève la démonstration du lemme 1.

§ 4. Théorème de Hahn-Banach

4.1. Dans ce paragraphe on se propose d'exposer la forme analytique du théorème de Hahn-Banach (voir Banach) de prolongement d'une fonctionnelle continue *). Ce théorème connaît d'innombrables applications en théorie des espaces topologiques vectoriels et normés et dans leurs applications.

THÉORÈME 1 (forme analytique du théorème de Hahn-Banach). *Soit donnée dans un espace vectoriel réel* X *une sous-norme* p.

Soit f_0 *une fonctionnelle linéaire définie sur un sous-espace vectoriel* $X_0 \subset X$, *telle que*

$$f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X_0). \tag{1}$$

Il existe alors une fonctionnelle linéaire f *définie sur* X *tout entier confondue avec* f_0 *sur* X_0 *et vérifiant sur* X *la condition*

$$f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X). \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. Nous allons prouver l'existence de la fonction nelle cherchée f à l'aide du lemme de Zorn. Pour utiliser ce dernie- nous considérons l'ensemble $\mathfrak{M}$ de tous les couples (L, g) vérifian les conditions suivantes:

1) L est un ensemble linéaire de X, $L \supset X_0$;

2) g est une fonctionnelle linéaire sur L, prolongement de f_0;

3) $g(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in L$.

L'ensemble $\mathfrak{M}$ n'est pas vide, puisque $(X_0, f_0) \in \mathfrak{M}$. Ordonnons $\mathfrak{M}$ en posant $(L_1, g_1) \leqslant (L_2, g_2)$ si $L_2 \supset L_1$ et g_2 est le prolongement de g_1.

Montrons que l'ensemble ordonné $\mathfrak{M}$ vérifie les conditions du lemme de Zorn et par conséquent contient un élément maximal. Soit $\mathfrak{M}_0$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathfrak{M}$. Soit $L_0 = \bigcup \{L: (L, g) \in \mathfrak{M}_0\}$. Montrons que L_0 est un ensemble linéaire. Si $x, y \in L_0$, par définition de L_0 il existe des ensembles L_1, L_2 tels que $x \in L_1$, $y \in L_2$ et (L_1, g_1), $(L_2, g_2) \in \mathfrak{M}_0$. L'ensemble $\mathfrak{M}_0$ étant totalement ordonné, les éléments (L_1, g_1) et (L_2, g_2) sont comparables. Supposons pour fixer les idées que $(L_1, g_1) \geqslant (L_2, g_2)$. Alors $L_1 \supset L_2$, donc $x, y \in L_1$, d'où $\lambda x + \mu y \in L_1 \subset L_0$ pour tous les λ, $\mu \in R$. Tout élément $x \in L_0$ appartient à un ensemble L tel que $(L, g) \in \mathfrak{M}_0$. Posons $g_0(x) = g(x)$. Si donc l'on définit $g_0(x)$ pour tous les $x \in L_0$ comme plus haut, notre définition est correcte et g_0

*) On rappelle qu'une fonction f définie sur X est le *prolongement* d'une fonction f_0 définie sur une partie X_0 de X si $f_0(x) = f(x)$, $\forall x \in X_0$.

est une fonctionnelle linéaire sur L_0. Il est évident que $(L_0, g_0) \in \mathfrak{M}_0$ et que (L_0, g_0) est un majorant pour l'ensemble $\mathfrak{M}_0$. D'après le lemme de Zorn, $\mathfrak{M}$ contient un élément maximal $(L_{\max}, f_{\max})$. Si nous montrons que $L_{\max} = \mathrm{X}$, la fonctionnelle $f_{\max}$ sera de toute évidence la fonctionnelle cherchée.

Supposons par absurde que $L_{\max} \neq \mathrm{X}$. Si nous montrons que pour tout $(L, g) \in \mathfrak{M}$ tel que $x_0 \notin L$, il existe $(L_1, g_1) \in \mathfrak{M}$, où L_1 est l'enveloppe linéaire de l'ensemble L et de l'élément x_0, alors nous contredirons le fait que $L_{\max}$ est maximal, ce qui prouvera notre théorème. On peut donc considérer que X est une extension élémentaire de X_0, c'est-à-dire considérer que chaque élément $x \in \mathrm{X}$ peut être représenté sous la forme

$$x = \lambda x_0 + x' \quad (x' \in \mathrm{X}_0). \tag{3}$$

Si $x', x'' \in \mathrm{X}_0$, en vertu de (1) on trouve

$$f_0(x') + f_0(x'') = f_0(x' + x'') \leqslant p((x_0 + x') + (-x_0 + x'')) \leqslant \\ \leqslant p(x_0 + x') + p(-x_0 + x''),$$

d'où

$$f_0(x'') - p(-x_0 + x'') \leqslant -f_0(x') + p(x_0 + x'),$$

et puisque x' et x'' sont arbitraires

$$A = \sup_{x'' \in \mathrm{X}_0} [f_0(x'') - p(-x_0 + x'')] \leqslant \inf_{x' \in \mathrm{X}_0} [-f_0(x') + p(x_0 + x')] = B.$$

Soit $A \leqslant t_0 \leqslant B$. Définissons sur X la fonctionnelle f

$$f(x) = \lambda t_0 + f_0(x') \quad (x = \lambda x_0 + x',\ x' \in \mathrm{X}_0).$$

Il est clair que f est une fonctionnelle additive et homogène et de plus f est le prolongement de f_0. Prouvons (2). On admettra que $\lambda \neq 0$ dans la représentation (3). Suppons que $\lambda > 0$. Alors

$$f(x) = \lambda t_0 + f_0(x') \leqslant \lambda B + f_0(x') \leqslant \lambda \left[-f_0\left(\frac{x'}{\lambda}\right) + p\left(x_0 + \frac{x'}{\lambda}\right) \right] + \\ + f_0(x') = -f_0(x') + p(\lambda x_0 + x') + f_0(x') = p(x).$$

On traite de même le cas $\lambda < 0$ (en utilisant l'inégalité $t_0 \geqslant A$). Le théorème est démontré.

COROLLAIRE. *Si une fonctionnelle p vérifie les conditions du théorème, il existe une fonctionnelle additive et homogène f définie sur* X *et telle que*

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in \mathrm{X}. \tag{4}$$

Pour s'assurer que cette assertion est vraie, il suffit de considérer sur $\mathrm{X}_0 = \{0\}$ la fonctionnelle f_0 ($f_0(0) = 0$), et ensuite lui appliquer le théorème.

Remarquons que f vérifie la relation

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x). \tag{5}$$

En effet, (4) entraîne

$$f(x) = -f(-x) \geqslant -p(-x).$$

Pour construire l'extension élémentaire, nous avons utilisé le fait que la fonctionnelle f est réelle. Dans les espaces complexes le théorème de Hahn-Banach est valable, mais dans une forme un peu moins générale.

THÉORÈME 2. *Soient p une semi-norme dans un espace vectoriel quelconque $\mathbf{X}$, f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur un sous-espace $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$, telle que*

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in \mathbf{X}_0). \tag{6}$$

Il existe alors une fonctionnelle linéaire f, définie sur $\mathbf{X}$ tout entier, confondue avec f_0 sur $\mathbf{X}_0$ et telle que

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in \mathbf{X}). \tag{7}$$

DÉMONSTRATION. Si $\mathbf{X}$ est un espace vectoriel réel, le théorème découle du corollaire du théorème 1 et de l'inégalité (5).

Soit $\mathbf{X}$ un espace vectoriel complexe. Si $X_{\mathbf{R}}$ est l'espace vectoriel réel associé à $\mathbf{X}$, alors $(\mathbf{X}_0)_{\mathbf{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{X}_{\mathbf{R}}$. En posant $\varphi_0(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ $(x \in \mathbf{X})$, on obtient la fonctionnelle linéaire réelle φ_0 sur $(\mathbf{X}_0)_{\mathbf{R}}$, et de plus, en vertu de la formule (2) § 2, pour tout $x \in \mathbf{X}_0$, on a

$$f_0(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix). \tag{8}$$

En vertu de (6) on a $|\varphi_0(x)| = |\operatorname{Re} f_0(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant$ $\leqslant p(x)$ pour $x \in \mathbf{X}_0$. On a déjà démontré qu'il existe une fonctionnelle réelle φ sur $\mathbf{X}$, prolongement de φ_0 à $\mathbf{X}$, telle que

$$|\varphi(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in \mathbf{X}). \tag{9}$$

Posons $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{X}$. On a signalé au § 2 que f est une fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{X}$ et de plus $\operatorname{Re} f(x) =$ $= \varphi(x)$ $(x \in \mathbf{X})$. D'où, en vertu de (8), il vient que f est le prolongement de f_0. Reste à vérifier l'inégalité (7).

Pour tout $x \in \mathbf{X}$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\theta} f(x) = |f(x)| \geqslant 0.$$

Donc $f(e^{i\theta}x) = e^{i\theta} f(x)$ est réelle, d'où $f(e^{i\theta}x) = \varphi(e^{i\theta}x)$. De (9) on déduit maintenant

$$|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(i^{i\theta}x) = \varphi(e^{i\theta}x) \leqslant p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}|\, p(x) = p(x),$$

ce qui démontre (7).

4.2. Le théorème 1 trouve une application élégante en théorie de l'intégrale et en théorie de la mesure *).

Posons le problème suivant: associer à chaque fonction $x(t)$ périodique (de période 1) bornée réelle une « intégrale » étendue à l'intervalle [0, 1], c'est-à-dire le nombre $\int_0^1 x(t)\,dt$, tel que:

1) $\int_0^1 [\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]\,dt=\alpha\int_0^1 x_1(t)\,dt+\beta\int_0^1 x_2(t)\,dt \quad (\alpha, \beta\in R)$;

2) si $x(t)\geqslant 0$ dans [0, 1], alors $\int_0^1 x(t)\,dt\geqslant 0$;

3) $\int_0^1 x(t+t_0)\,dt=\int_0^1 x(t)\,dt$ (t_0 est un réel arbitraire);

4) $\int_0^1 x(1-t)\,dt=\int_0^1 x(t)\,dt$;

5) si $x_0(t)\equiv 1$, alors $\int_0^1 x_0(t)\,dt=1$.

THÉORÈME 3. *Le problème posé admet au moins une solution.*

DÉMONSTRATION. Appelons M l'ensemble de toutes les fonctions bornées périodiques (de période 1). Il est clair que M est un espace vectoriel.

Soient $x\in M$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ une collection de nombres réels. Posons

$$\pi(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\sup_{-\infty<t<\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(t+\alpha_k)$$

et

$$p(x)=\inf\pi(x;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),$$

où la borne inférieure est considérée sur toutes les collections finies de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Montrons que p satisfait aux conditions du théorème 1. Il est évident qu'il faut démontrer seulement la semi-additivité de p.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ des collections de nombres telles que $\pi(x_1;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)<p(x_1)+\varepsilon$ et $\pi(x_2;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)<p(x_2)+\varepsilon$. Posons $\gamma_{j,k}=\alpha_j+\beta_k$. On a d'une part

$$p(x_1+x_2)\leqslant\pi(x_1+x_2;\gamma_{1,1},\gamma_{1,2},\ldots,\gamma_{m,n}). \tag{10}$$

Et de l'autre

$$\pi(x_1+x_2;\gamma_{1,1},\gamma_{1,2},\ldots,\gamma_{m,n})=\frac{1}{mn}\sup_{-\infty<t<\infty}\sum_{j,k}[x_1(t+\gamma_{j,k})+$$

$$+x_2(t+\gamma_{j,k})]\leqslant\frac{1}{mn}\sup_{-\infty<t<\infty}\sum_{j,k}x_1(t+\gamma_{j,k})+\frac{1}{mn}\sup_{-\infty<t<\infty}\sum_{j,k}x_2(t+\gamma_{j,k})\leqslant$$

*) Voir Banach.

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sup \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_1(t+\beta_k+\alpha_j)+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \sup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_2(t+\alpha_j+\beta_k)=$$

$$= \pi(x_1;\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_m) + \pi(x_2;\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots, \beta_m) <$$

$$< p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.$$

En combinant avec (10), et compte tenu du fait que ε est arbitraire, on obtient

$$p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2).$$

Soit f la fonctionnelle dont l'existence est affirmée par le corollaire du théorème 1. Si $x(t) \geqslant 0$, alors $p(x) \geqslant 0$, $p(-x) \leqslant 0$, d'où $f(x) \geqslant 0$ en vertu de (5). Si d'autre part on pose $x'(t) = x(t + t_0) - x(t)$, alors en prenant $\alpha_k = (k-1)\,t_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$, on obtient

$$p(x') \leqslant \pi(x';\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sup_{-\infty<t<\infty} [x(t+(n+1)\,t_0) - x(t)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $p(x') \leqslant 0$ et de façon analogue $p(-x') \leqslant 0$. D'où $f(x') = 0$ toujours en vertu de (5).

Enfin, si $x_0(t) \equiv 1$, alors de toute évidence $p(x_0) = 1$, $p(-x_0) = -1$ et $f(x_0) = 1$.

Pour achever la démonstration du théorème il suffit de poser

$$\int_0^1 x(t)\,dt = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(\tilde{x})] \qquad (\tilde{x}(t) = x(1-t)). \tag{11}$$

REMARQUE. On démontre facilement que l'intégrale construite est confondue avec l'intégrale de Riemann toutes les fois que cette dernière existe. D'une façon générale, on ne peut pas en dire autant pour l'intégrale de Lebesgue. Cependant, on peut choisir la fonctionnelle f de telle sorte que l'intégrale (11) soit confondue avec l'intégrale de Lebesgue pour toute fonction mesurable.

Il est possible de construire la mesure généralisée pour des ensembles de l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ à l'aide de l'intégrale généralisée (11). Plus exactement on a le

THÉORÈME 4. *A chaque ensemble $e \subset E_0 = [0, 1]$ on peut associer un nombre $\mu(e)$, « mesure » de l'ensemble e, tel que soient réalisées les conditions:*

1) $\mu(e_1 \cup e_2) = \mu(e_1) + \mu(e_2)$ *si* $e_1 \cap e_2 = \varnothing$;
2) $\mu(e) \geqslant 0$;
3) *si* e_1 et e_2 *sont congrus, alors* $\mu(e_1) = \mu(e_2)$;
4) $\mu(E_0) = 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $\chi_e(t)$ la fonction caractéristique d'un ensemble $e \subset E_0$. Si l'on pose

$$\mu(e) = \int_0^1 \chi_e(t)\,dt,$$

alors on déduit sans peine les propriétés 1) à 4) à partir des propriétés de l'intégrale généralisée.

REMARQUE. La mesure généralisée satisfaisant aux conditions 1) à 4) peut être définie aussi pour tous les sous-ensembles du carré $[0, 1; 0, 1]$. Il y a lieu toutefois de noter que ce problème ne possède pas de solution *) pour un cube à trois dimensions.

4.3. De même qu'on a défini l'intégrale généralisée, de même on peut définir une limite généralisée pour toute suite bornée.

Considérons l'espace vectoriel l^∞ des suites réelles bornées. Soit $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^\infty$. Posons

$$\pi(x; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \xi_{n+n_j},$$

$$p(x) = \inf \pi(x; n_1, n_2, \ldots, n_k),$$

où l'infimum est pris sur toutes les collections d'entiers naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Comme dans la démonstration du théorème 3, on peut établir que p est une sous-norme. Par suite, il existe une fonctionnelle linéaire f, vérifiant la condition (5). Si l'on pose

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = f(x),$$

un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 3 nous permet d'établir les propriétés suivantes de la fonctionnelle trouvée:

1) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} [\alpha\xi'_n + \beta\xi''_n] = \alpha \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi'_n + \beta \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi''_n$;

2) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$ si $\xi_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

3) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$;

4) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n^{(0)} = 1$ si $\xi_n^{(0)} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

5) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n$.

De toute évidence la dernière relation montre que si existe $\lim \xi_n$, on doit avoir $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n$. Il semble naturel, eu égard aux quatre autres propriétés du nombre $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$, d'appeler ce dernier *limite généralisée* (de Banach) de la suite $\{\xi_n\}$.

---

*) Voir la démonstration dans I. Natanson, *Théorie des fonctions de variable réelle.*

CHAPITRE III

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

La plupart des espaces vectoriels étudiés sont munis d'une convergence « naturelle » qui définit une topologie compatible avec les opérations algébriques. Dans le cadre de cet ouvrage nous nous intéressons en premier lieu au cas où cette topologie peut être définie à l'aide d'une norme, c'est-à-dire lorsque l'espace envisagé est normé. Cependant, nous considérons au début un cas plus général d'espaces vectoriels topologiques. Ceci est dû au fait que d'une part de nombreux problèmes relatifs aux espaces normés se résolvent naturellement dès cette étape de généralité, et de l'autre que l'étude des espaces normés fait intervenir une topologie dite faible qui n'est pas normée dans le cas finidimensionnel. L'introduction à la théorie élémentaire des espaces vectoriels topologiques exposée plus bas ne poursuit que les objectifs déjà mentionnés et par conséquent n'a pas l'ambition d'être complète et exhaustive (nous ne nous arrêtons même pas sur les notions fondamentales de tonneau, d'espace bornologique et d'espace nucléaire). Pour un exposé plus détaillé de la théorie des espaces vectoriels topologiques on pourra consulter Bourbaki [VI]; Dunford et Schwartz [I]; Yosida; A. Robertson et V. Robertson; Schaefer [I]; Edwards.

§ 1. Définitions générales

1.1. Soit X un espace à la fois vectoriel et topologique. Un ensemble X est appelé *espace vectoriel topologique* (en abrégé e.v.t.) s'il est muni d'opérations algébriques continues pour la topologie de X, c'est-à-dire

1) pour chaque couple d'éléments x, $y \in X$ et chaque voisinage V_{x+y} de l'élément $x + y$ il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y, tels que

$$V_x + V_y \subset V_{x+y};$$

2) pour tout $x \in X$, tout nombre λ et tout voisinage $V_{\lambda x}$, il existe un voisinage V_x et un nombre $\delta > 0$, tels que pour tout μ vérifiant

$|\mu - \lambda| < \delta$ l'on ait

$$\mu V_x \subset V_{\lambda x}.$$

Il est immédiat de vérifier que dans un e.v.t. X tout ensemble linéaire est un e.v.t. si nous le munissons de la topologie et des opérations algébriques induites de X. Cet e.v.t. sera appelé sous-espace de X.

Voici quelques corollaires simples de la définition d'un e.v.t.

I. Si $G \subset X$ est un ensemble ouvert, alors $x_0 + G$ l'est également.

En effet, soit $x \in x_0 + G$, de sorte que $x = x_0 + x'$, où $x' \in G$. Soit $V_{x'} \subset G$ un voisinage du point x'. Comme $x' = x + (-x_0)$, d'après la condition 1) il existe un voisinage V_x et un voisinage V_{-x_0}, tels que $V_x + V_{-x_0} \subset V_{x'}$. Vu que $-x_0 \in V_{-x_0}$, on a $-x_0 + V_x \subset V_{x'} \subset G$ et par suite $V_x \subset x_0 + G$, c'est-à-dire x est un point intérieur de l'ensemble $x_0 + G$.

On démontre de façon analogue que

II. Si G est un ouvert et $\lambda \neq 0$, alors λG le sera également.

Ces propositions se généralisent aux ensembles fermés.

La proposition I entraîne

III. Chaque voisinage d'un point $x \in X$ est de la forme $x + V$, où V est un voisinage de 0 dans l'espace X. Ceci étant, si V parcourt un système fondamental de voisinages de 0, $x + V$ parcourra un système fondamental de voisinages du point x.

Cette proposition nous permet de nous borner à l'étude des voisinages de 0.

THÉORÈME 1. *Il existe un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages de* 0 *dans un e.v.t.* X, *possédant les propriétés suivantes*:

1) *quels que soient V_1, $V_2 \in \mathfrak{B}$, il existe $V_3 \in \mathfrak{B}$ tel que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$*;

2) *chaque $V \in \mathfrak{B}$ est un ensemble équilibré*;

3) *chaque $V \in \mathfrak{B}$ est un ensemble absorbant*;

4) *pour tout $V \in \mathfrak{B}$, il existe $U \in \mathfrak{B}$, tel que $U + U \subset V$.*

Inversement, si X *est un ensemble linéaire dans lequel on a extrait une famille $\mathfrak{B}$ de sous-ensembles vérifiant les conditions* 1) *à* 4), *alors en prenant pour voisinage d'un élément $x \in X$ tout ensemble de la forme $x + V$ ($V \in \mathfrak{B}$), on fait de* X *un e.v.t. dans lequel la famille $\mathfrak{B}$ sera un système fondamental de voisinages de* 0.

DÉMONSTRATION. Si $\mathfrak{B}$ est un système fondamental de voisinages de 0 de l'e.v.t. X la condition 1) est réalisée de toute évidence. De façon analogue, la condition 4) est satisfaite puisque $0 + 0 = 0$. Montrons que tout voisinage V de 0 est un ensemble absorbant.

En effet, vu que $0 \cdot x = 0$, alors par définition de l'e.v.t., il existe un voisinage V_x et un nombre $\delta > 0$, tels que $\lambda V_x \subset V$ pour $|\lambda| \leqslant \delta$. En particulier $x \in \frac{1}{\lambda} V$ pour $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geqslant \frac{1}{\delta}$.

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème il suffit d'établir que les voisinages équilibrés forment un système fondamental de voisinages de **0**. Soit V un voisinage arbitraire de **0**. Comme $0 \cdot 0 = 0$ il existe un voisinage V_1 de **0** et un nombre $\delta > 0$ tels que $\lambda V_1 \subset V$ pour $|\lambda| \leqslant \delta$. Posons $V_0 = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \lambda V_1$. Comme $V_0 \supset \delta V_1$ et que δV_1 est un voisinage de **0** d'après la propriété III, l'ensemble V_0 sera aussi voisinage de **0**. Si $|\alpha| \leqslant 1$, alors $\alpha V_0 = \bigcup_{|\lambda| \leqslant \delta} \alpha\lambda V_1 \subset V_0$ et V_0 est un voisinage équilibré. Il reste à remarquer que $V_0 \subset V$.

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème.

Vérifions tout d'abord que le procédé de définition des voisinages dans l'ensemble **X**, figurant dans l'énoncé du théorème, fait de **X** un espace topologique (cf. théorème I.2.1).

1) Chaque voisinage d'un point x contient ce point. En effet, tout ensemble $V \in \mathfrak{B}$, en tant qu'ensemble équilibré contient **0** et par conséquent $x \in x + V$.

2) L'intersection de deux voisinages d'un point x contient un troisième voisinage de ce point. Ceci découle immédiatement de la condition 1) du théorème.

3) Pour tout voisinage V_x, il existe un voisinage V'_x tel que V_x contient un voisinage d'un point quelconque $y \in V'_x$. Limitons-nous au cas où $x = 0$. Soient $V \in \mathfrak{B}$ un voisinage quelconque de **0**, $U \in \mathfrak{B}$ un voisinage de **0** dont l'existence est subordonnée à la condition 4) du théorème. Convenons que $V'_0 = U$. En effet, si $y \in U$, alors $y + U$ est un voisinage du point y et $y + U \subset U + U \subset V$.

Donc, **X** est un espace topologique. Vérifions que les opérations algébriques sont continues dans **X**. La continuité de l'addition découle immédiatement de la condition 4). Avant de passer à la multiplication signalons une conséquence des conditions 2) et 4). Pour tout ensemble $E \subset \mathbf{X}$ on a $2E \subset E + E$, donc d'après la condition 4) pour chaque voisinage $V \in \mathfrak{B}$, il existe $\tilde{V} \in \mathfrak{B}$, tel que $2\tilde{V} \subset V$, et de façon analogue quel que soit n naturel, il existe $V^{(n)} \in \mathfrak{B}$ tel que $2^n V^{(n)} \subset V$. Soit λ un nombre quelconque. Désignons par n un entier naturel assez grand pour que $|\lambda| \leqslant 2^n$. Comme $V^{(n)}$ est un ensemble équilibré, l'ensemble $2^n V^{(n)}$ le sera également et par suite

$$\lambda V^{(n)} = \frac{\lambda}{2^n} (2^n V^{(n)}) \subset 2^n V^{(n)} \subset V.$$

Maintenant il est aisé de prouver que la multiplication est continue. Soient $x \in \mathbf{X}$ et λ un coefficient. On a

$$\mu y - \lambda x = (\mu - \lambda)(y - x) + (\mu - \lambda) x + \lambda (y - x).$$

En vertu de cette relation et de la condition 4) il suffit d'établir les trois faits suivants:

1) pour tout $V \in \mathfrak{B}$ il existe $V_1 \in \mathfrak{B}$ et un nombre $\delta > 0$, tels que $\alpha V_1 \subset V$ ($|\alpha| \leqslant \delta$);

2) pour tout $V \in \mathfrak{B}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\alpha x \in V$ pour $|\alpha| \leqslant \delta$;

3) pour tout $V \in \mathfrak{B}$, il existe $V_1 \in \mathfrak{B}$ tel que $\lambda V_1 \subset V$.

La première proposition est vraie, puisque V est un ensemble équilibré, donc on peut prendre $V_1 = V$, $\delta = 1$.

La deuxième proposition est également vraie. En effet, V étant un ensemble équilibré et absorbant, il existe $\lambda' > 0$ tel que $x \in \lambda' V$. Si l'on pose $\delta = 1/\lambda'$, alors pour $|\alpha| \leqslant \delta$ on aura

$$\alpha(\lambda' V) = (\alpha\lambda') V \subset V,$$

puisque $|\alpha\lambda'| \leqslant 1$. D'où il suit que $\alpha x \in V$ ($|\alpha| \leqslant \delta$).

On a déjà signalé que la troisième proposition était vraie. Ceci achève donc la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1. *Tout e.v.t. possède un système fondamental de voisinages équilibrés fermés.*

En effet, il suffit d'établir que l'élément nul possède un tel système de voisinages. Les adhérences des voisinages d'un système fondamental quelconque $\mathfrak{B}$ de voisinages équilibrés de **0** forment un tel système. En effet, si $V \in \mathfrak{B}$ et U est un voisinage de $\mathfrak{B}$ tel que $U + U \subset V$, alors $\bar{U} \subset V$, puisque si $x_0 \notin V$, le voisinage $x_0 + U$ du point x_0 et l'ensemble U seraient disjoints. Pour achever la démonstration il suffit de remarquer que la propriété d'être ensemble équilibré se conserve par le passage à l'adhérence.

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathfrak{B}$ une base de voisinages de* **0** *dans un e.v.t.* **X**. *Pour que* **X** *soit séparé il faut et il suffit que*

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V = \{0\}. \tag{1}$$

En effet, si **X** est séparé et $x \neq 0$, il existe $V \in \mathfrak{B}$ ne contenant pas x, d'où découle (1). Inversement, si (1) est réalisée et $x \neq y$, il existe $V \in \mathfrak{B}$ ne contenant pas $x - y$. Le théorème 1 affirme l'existence d'un voisinage équilibré U de **0** tel que $U + U \subset V$. Alors $x + U$ et $y + U$ sont des voisinages disjoints des points x et y, puisque $z \in (x + U) \cap (y + U)$ entraîne $x - y = (z - y) - (z - x) \in U - U = U + U \subset V$. Donc **X** est séparé.

Dans la suite on conviendra que tous les e.v.t. sont séparés.

1.2. Formulons encore quelques propositions valables dans un e.v.t. **X**.

I. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel $\mathbf{X}_0$ de l'espace **X** est un espace vectoriel.

En effet, soient $x, y \in \bar{\mathbf{X}}_0$ et α, β des coefficients quelconques. Soit par ailleurs V_z un voisinage du point $z = \alpha x + \beta y$. Il existe un

voisinage V_x et un voisinage V_y, tels que $\alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$. Le voisinage V_x contient des points de X_0 : soit x' l'un d'eux. De façon analogue, soit $y' \in V_y \cap X_0$. Comme $z' = \alpha x' + \beta y' \in X_0$ et qu'en même temps $z' \in \alpha V_x + \beta V_y \subset V_z$, l'intersection $V_z \cap X_0$ n'est pas vide, d'où $z \in \overline{X}_0$ puisque V_z est arbitraire.

On démontre de façon analogue que

II. L'adhérence d'un ensemble convexe est convexe. L'adhérence d'un ensemble absolument convexe est absolument convexe.

Soit E une partie non vide d'un e.v.t. X. L'adhérence de l'enveloppe linéaire de E est appelée *enveloppe linéaire fermée* de E et notée $\overline{\mathcal{L}}(E)$. En vertu de I, $\overline{\mathcal{L}}(E)$ est la plus petite partie fermée de X contenant E. L'adhérence de l'enveloppe convexe (resp. absolument convexe) d'un ensemble E est appelée *enveloppe convexe* (resp. *absolument convexe*) *fermée* de E et notée $\overline{\mathrm{co}}(E)$ (resp. $\overline{\mathrm{abs\,co}}(E)$). D'après II, $\overline{\mathrm{co}}(E)$ (resp. $\overline{\mathrm{abs\,co}}(E)$) est la plus petite partie convexe (resp. absolument convexe) fermée de X contenant E.

La proposition III du numéro précédent entraîne aussitôt

III. Pour qu'une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) soit convergente vers $x \in X$, il est nécessaire et suffisant que $x_\alpha - x \underset{A}{\longrightarrow} 0$.

La démonstration de la proposition suivante est plus délicate.

IV. Soient K_1 et K_2 des ensembles compacts de X. Alors $\lambda_1 K + \lambda_2 K$ est aussi un ensemble compact.

En effet, en vertu de I.2.8, $K = K_1 \times K_2$ est compact dans le produit $X \times X$. L'application φ :

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y \quad (x, y \in X)$$

de $X \times X$ dans X est continue, et d'après I.2.5, l'ensemble $\varphi(K) = \lambda_1 K + \lambda_2 K$ est un ensemble compact dans X.

Soient X et Y des e.v.t. Une application $f : X \to Y$ qui est à la fois isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de X et Y et homéomorphisme de la structure d'espace topologique de X et Y est dite *isomorphisme* des e.v.t. X et Y, et les e.v.t. X et Y *isomorphes*. Nous identifierons comme toujours les e.v.t. isomorphes.

Un e.v.t. X est *métrisable* si sa topologie peut être définie au moyen d'une métrique.

1.3. Voici quelques exemples d'e.v.t.

1) L'espace des fonctions mesurables $S(T, \Sigma, \mu)$.

Pour toute partie $A \in \Sigma$, de mesure finie, et un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$, posons

$$V(A, \varepsilon) = \left\{ x \in S(T, \Sigma, \mu) : \int_A \frac{|x|}{1+|x|} d\mu < \varepsilon \right\}.$$

Il est aisé de montrer que le système de tous les ensembles de la forme $V(A, \varepsilon)$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour

une topologie sur S (T, Σ, μ). Le théorème I.6.14 nous dit qu'une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ converge vers x dans cet espace topologique si et seulement si $x_\alpha \to x$ (μ). Les opérations algébriques étant continues pour la topologie de la convergence en mesure, nous avons muni S (T, Σ, μ) d'une structure d'e.v.t. On a vu dans I.6.10 que cet espace est métrisable si la mesure μ est σ-finie.

Si la mesure μ n'est pas σ-finie, S (T, Σ, μ) n'est pas métrisable. En effet, la famille de tous les ensembles de mesure finie, ordonnée par inclusion, forme une suite généralisée qui engendre la suite $\{x_\alpha\}$ des fonctions caractéristiques de ces ensembles. Il est évident que $x_\alpha \to \mathbf{1}$ (μ), où $\mathbf{1}$ est la fonction identiquement égale à 1 sur T. Si S (T, Σ, μ) était métrisable, il existerait une suite $x_{\alpha_n} \to \mathbf{1}$ (μ). Soit x_{α_n} la fonction caractéristique de l'ensemble A_n. Posons $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. La mesure μ n'étant pas σ-finie, il vient $\mu(T \setminus B) \neq 0$, et du fait que μ ne possède pas d'atomes de mesure infinie, il existe $A \in \Sigma$ tel que $A \subset T \setminus B$, $0 < \mu(A) < \infty$. Les fonctions $x_{\alpha_n} = 0$ sur l'ensemble A, ce qui est absurde puisque $x_{\alpha_n} \to \mathbf{1}$ (μ).

Comme extension de l'espace s on peut considérer l'espace s (T) de toutes les fonctions réelles définies sur un ensemble abstrait T. Un système fondamental $\mathfrak{B}$ de voisinages de $\mathbf{0}$ dans l'espace s (T) est constitué de tous les ensembles $V_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \varepsilon}$ définis par une collection arbitraire d'éléments $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de T et un nombre quelconque ε ; $x \in V_{t_1, t_2, \ldots, t_n; \varepsilon}$ signifie que

$$|x(t_k)| \leqslant \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce système satisfait aux conditions du théorème 1, de sorte que s (T) est un e.v.t. séparé qui est confondu avec s si T est un ensemble dénombrable.

Nous avons signalé au n° I.6.10 que l'espace s est un cas particulier de l'espace S (T, Σ, μ). De façon analogue, l'espace s (T) est un cas particulier de S (T, Σ, μ). Le lecteur est invité à vérifier que ces espaces sont isomorphes en tant qu'e.v.t. D'après ce qui a été démontré, s (T) est un e.v.t. métrisable si et seulement si T est dénombrable, c'est-à-dire s $(T) =$ s.

Si $T = \{1, 2, \ldots, n\}$, alors s (T) peut être identifié à un espace $\mathbf{K}^n$ de dimension n et traité comme un e.v.t. Cependant, nous remettons l'étude des e.v.t. de dimension finie au chapitre suivant.

2) Comme exemple suivant nous allons considérer l'espace $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$ de toutes les fonctions continues sur la droite numérique. On munit $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$ d'une topologie au moyen d'un système fondamental de voisinages de $\mathbf{0}$, composé des ensembles $V_{n;\varepsilon}$, où n est un entier naturel et $\varepsilon > 0$. Ceci étant, $x \in V_{n;\varepsilon}$ signifie que

$$|x(t)| \leqslant \varepsilon \quad (|t| \leqslant n).$$

On laisse ici aussi au lecteur le soin de vérifier les conditions du théorème 1 et le fait que l'espace $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$ est séparé.

3) L'espace $\mathbf{D}[a, b]$ des fonctions indéfiniment dérivables, nulles en dehors de $[a, b]$, joue un rôle important en théorie des distributions. Un système fondamental de voisinages de $\mathbf{0}$ dans cet espace est constitué d'ensembles $V_{n;\varepsilon}$ définis par un entier naturel arbitraire n et un nombre positif arbitraire ε. Un voisinage $V_{n;\varepsilon}$ est constitué de tous les x tels que

$$|x^{(k)}(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ t \in [a, b]).$$

4) Citons encore un exemple d'e.v.t. Soit $\mathbf{L}_\omega$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables, définies sur $[0, 1]$, de puissance p-ième sommable pour tout p. Un voisinage $V_{p;\varepsilon}$ de $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{L}_\omega$ est défini par un nombre quelconque $p > 1$ et ε quelconque > 0. Plus exactement, $x \in V_{p;\varepsilon}$ si

$$\left[\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\right]^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

On montrera plus bas que les espaces $\mathbf{C}(\mathbf{R}^1)$, $\mathbf{D}[a, b]$ et $\mathbf{L}_\omega$ sont des e.v.t. métrisables.

1.4. Une partie E d'un e.v.t. $\mathbf{X}$ est dite *bornée* si pour tout voisinage V de $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{X}$ il existe un nombre λ tel que $E \subset \lambda V$. Il est clair que pour vérifier si E est bornée il suffit d'envisager des voisinages d'un système fondamental de voisinages de $\mathbf{0}$.

On dit qu'une partie G d'un e.v.t. $\mathbf{X}$ est *totalement bornée* si pour tout voisinage V de $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{X}$, il existe une partie finie $\{x_k\}_{k=1}^n \subset G$ telle que $G \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V)$.

Signalons quelques faits simples rattachés aux notions d'ensembles bornés et totalement bornés.

I. Soient E_1 et E_2 des ensembles bornés (resp. totalement bornés) dans un e.v.t. $\mathbf{X}$. Alors $E_1 \cup E_2$, $E_1 + E_2$, λE_1 (λ est un nombre) sont bornés (resp. totalement bornés).

Ceci est évident pour $E_1 \cup E_2$ et λE_1. On vérifie que cela est vrai pour $E_1 + E_2$ en remarquant qu'en vertu du point 4) du théorème 1, les ensembles de la forme $V + V$ constituent une base de voisinage de $\mathbf{0}$ lorsque V parcourt une base de voisinages de $\mathbf{0}$.

De I on déduit qu'un ensemble fini est (totalement) borné.

II. Tout ensemble totalement borné est borné.

Si E est totalement borné, pour tout voisinage V (que nous supposerons être équilibré) il existe des $x_k \in E$ tels que $E \subset \bigcup_{k=1}^n (x_k + V)$. On sait qu'un ensemble fini $\{x_k\}_{k=1}^n$ est borné, donc il existe λ_1 vérifiant $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \lambda_1 V$, et par suite $E \subset \lambda_1 V + V \subset \max(|\lambda_1|, 1)(V + V)$. D'après le théorème 1, les ensembles de

la forme $V + V$ forment une base de voisinages de 0 lorsque V parcourt une base de voisinages de 0.

Le fait qu'un système fondamental de voisinages de 0 peut être composé de voisinages fermés (corollaire 1 du théorème 1) entraîne

III. L'adhérence d'un ensemble borné (resp. totalement borné) est bornée (resp. totalement bornée).

THÉORÈME 2. *Pour qu'un sous-ensemble E d'un e.v.t. X soit borné il faut et il suffit que quelles que soient la suite $\{x_n\} \subset E$ et la suite $\{\lambda_n\}$ de nombres réels, $\lambda_n \to 0$, l'on ait $\lambda_n x_n \to 0$.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Soient $\{x_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ les suites indiquées, V un voisinage quelconque équilibré de 0. Il existe $\lambda > 0$ tel que $E \subset \lambda V$. En particulier $x_n \in \lambda V$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc, si n est assez grand pour que $|\lambda_n| \leqslant 1/\lambda$, alors $\lambda_n x_n \in \lambda_n \lambda V \subset$ $\subset V$, c'est-à-dire $\lambda_n x_n \to 0$.

Condition suffisante. Si dans les conditions du théorème, E n'était pas bornée, il existerait un voisinage V de 0 pour lequel $E \setminus \lambda V$ ne serait vide pour aucun $\lambda > 0$. En posant successivement $\lambda = 1, 2, \ldots$, on obtiendrait la suite d'éléments

$$x_n \in E \setminus nV \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme d'une part $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et de l'autre $\frac{1}{n} x_n \notin V$, on contredirait le théorème.

Nous aurons besoin du lemme suivant sur les ensembles bornés dans $S(T, \Sigma, \mu)$.

LEMME 1. *Si $\{x_n\}$ est une suite de fonctions réelles, bornée dans $S(T, \Sigma, \mu)$ et de plus $0 \leqslant x_1(t) \leqslant x_2(t) \leqslant \ldots \leqslant x_n(t) \leqslant$ $\leqslant x_{n+1}(t) \leqslant \ldots$ p.p., il existe une fonction $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ telle que $x_n(t) \to x(t)$ p.p*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ est finie pour presque tous les $t \in T$. Supposons qu'existe une partie $A \in$ $\in \Sigma(\mu)$ pour laquelle $\mu(A) > 0$ et $x_n(t) \to +\infty$ pour tout $t \in A$. L'ensemble $\{x_n\}$ étant borné, le voisinage $U(A, \varepsilon/2)$, où $\varepsilon =$ $= \mu(A)$, absorbe la suite $\{x_n\}$, c'est-à-dire il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que

$$\int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} d\mu(t) < \varepsilon/2 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Vu que $x_n(t) \uparrow +\infty$ pour $t \in A$,

$$\frac{|\lambda x_n(t)|}{1 + |\lambda x_n(t)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

d'où en vertu du théorème de Lebesgue (théorème II.6.6)

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \frac{|\lambda x_n(t)|}{1+|\lambda x_n(t)|}\,d\mu(t)=\int_A d\mu(t)=\varepsilon,$$

ce qui contredit l'inégalité (2). Donc, pour presque tous les $t \in T$ on a $x_n(t) \uparrow x(t) < +\infty$.

1.5. Examinons la notion de complétude d'un e.v.t. Soit une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$. Désignons par A^2 l'ensemble de tous les couples (α', α''), où $\alpha', \alpha'' \in A$. Si A^2 est muni de l'ordre: $(\alpha_1', \alpha_1'') \geqslant (\alpha_2', \alpha_2'')$ si et seulement si on a simultanément $\alpha_1' \geqslant \alpha_2'$ et $\alpha_1'' \geqslant \alpha_2''$, alors A^2 se transforme en ensemble filtrant supérieurement.

Une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ d'éléments d'un e.v.t. X est dite de *Cauchy* (ou suite généralisée *convergeant en soi* ou encore suite *fondamentale*) si la suite $\{x_{(\alpha',\alpha'')}\}$ $(\alpha \in A^2)$, où $x_{(\alpha',\alpha'')} = x_{\alpha'} - x_{\alpha''}$, converge vers zéro dans X, c'est-à-dire pour tout voisinage U de 0 il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $x_{\alpha'} - x_{\alpha''} \in U$ pour $\alpha', \alpha'' > \alpha_0$. On dit que dans X un ensemble E est *complet* si toute suite généralisée de Cauchy d'éléments de E converge vers un élément de E. Dans cette terminologie on dira donc qu'un e.v.t. X est *complet* si toute suite généralisée de Cauchy est convergente dans X. L'espace X sera appelé *quasi complet* ou *séquentiellement complet* selon qu'on envisagera des suites généralisées bornées ou des suites ordinaires. A noter qu'une partie fermée d'un espace complet est complète.

L'ensemble des éléments d'une suite généralisée de Cauchy n'étant pas nécessairement borné, la condition de complétude est plus forte que la condition de quasi-complétude (nous verrons dans des exemples qu'elle est essentiellement plus forte). D'autre part, on démontre sans peine qu'une suite de Cauchy est bornée, donc la quasi-complétude entraîne la complétude séquentielle. Le théorème suivant affirme la coïncidence de ces trois types de complétude dans un e.v.t. métrisable.

THÉORÈME 3. *Un e.v.t. séquentiellement complet* X *muni d'un système fondamental dénombrable de voisinages de* 0 *) *est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une suite généralisée de Cauchy d'éléments de l'espace X. Désignons par $\{V_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ un système fondamental dénombrable de voisinages de 0. Pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ il existe un couple $(\alpha_n', \alpha_n'') \in A^2$, tel que

$$x_{\alpha'} - x_{\alpha''} \in V_n \quad ((\alpha', \alpha'') \geqslant (\alpha_n', \alpha_n'')). \tag{3}$$

*) En fait cette condition est équivalente à la métrisabilité de X (voir Schaefer, I.6.1).

Soit α_n élément de A tel que $\alpha_n \geqslant \alpha'_n$, $\alpha_n \geqslant \alpha''_n$. On peut admettre que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots$ Soit la suite $\{x_{\alpha_n}\}$. Cette suite étant de toute évidence de Cauchy, il existe par hypothèse $x \in X$ tel que $x_{\alpha_n} \to x$. Prouvons que $x_\alpha \to x$. Prenons un voisinage quelconque V_m et cherchons un voisinage V_k tel que $V_k + V_k \subset V_m$. On peut exhiber $n \geqslant k$ tel que

$$x_{\alpha_n} - x \in V_k.$$

Par ailleurs, pour $\alpha \geqslant \alpha_n$ la relation (3) entraîne

$$x_\alpha - x_{\alpha_n} \in V_k.$$

Donc

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha_n}) + (x_{\alpha_n} - x) \in V_k + V_k \subset V_m,$$

c.q.f.d.

Dans le cas d'un e.v.t. X métrisable, il existe deux notions de complétude: la complétude pour la structure d'e.v.t. et la complétude pour la structure d'espace métrique de X. En général ces notions sont différentes. Mais, si la métrique ρ définissant la topologie de X vérifie la relation $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ pour tous les $x, y \in X$, il est évident que ces deux notions sont confondues. La métrique de tous les e.v.t. que nous considérons dans ce livre possède les propriétés susindiquées. La notion de complétude est traitée en détail dans Bourbaki [VII] et Kelley.

Chaque e.v.t. X peut être complété. Autrement dit, il existe un e.v.t. $\hat{X}$ complet tel que X est un sous-espace de $\hat{X}$ et X est dense dans $\hat{X}$. Le théorème correspondant se démontre comme le théorème I.4.1 en remplaçant les classes de suites de Cauchy équivalentes par des classes de suites généralisées. (La vérification du fait que $\hat{X}$ sera un espace vectoriel s'effectue comme pour IV.1.4.) L'espace $\hat{X}$ est appelé *complétion* de X. Dans la suite nous nous dispenserons des complétions des e.v.t.

On démontre sans peine au moyen du théorème 3 que les e.v.t. $C(R^1)$ et $D[a, b]$ sont complets. La complétude de l'e.v.t. métrisable L_ω découle facilement des résultats du chapitre IV sur la complétude des espaces L^p. La complétude de l'e.v.t. métrisable $S(T, \Sigma, \mu)$ a été établie dans le théorème I.6.15 pour une mesure σ-finie. Il en résulte sans peine que l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$ est complet si (T, Σ, μ) possède la propriété de somme directe (cf. I.6.10).

Etudions maintenant les liens existant entre les ensembles compacts et les ensembles totalement bornés. Le théorème suivant peut être considéré comme l'analogue du théorème de Hausdorff (cf. I.5.1) des ensembles compacts dans des espaces métriques. En réalité ces deux théorèmes découlent d'un résultat plus général sur les espaces uniformes (voir Bourbaki [III]).

THÉORÈME 4. *Dans un e.v.t.* X *un ensemble est compact si et seulement s'il est totalement borné et complet.*

DÉMONSTRATION. Soit un ensemble compact K. Montrons tout d'abord qu'il est totalement borné. Prenons pour cela un voisinage ouvert V de 0. Il est évident que la famille d'ouverts $\{x + V\}$ $(x \in K)$ forme un recouvrement de K, d'où, par définition de la compacité, l'on déduit que K est totalement borné.

Prouvons maintenant que K est complet. Soit $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une suite généralisée de Cauchy d'éléments de K. En vertu du théorème I.2.3 il existe une sous-suite généralisée $\{y_\beta\}$ $(\beta \in B)$ convergeant vers $x \in K$. Montrons que $x_\alpha \to x$. Soit un voisinage quelconque V de 0. Il existe alors un voisinage U de 0 tel que $U + U \subset V$. Comme $\{x_\alpha\}$ est une suite généralisée de Cauchy, il existe $\alpha_0 \in A$ tel que $x_\alpha - x_{\alpha'} \in U$ pour α, $\alpha' \geqslant \alpha_0$. D'autre part, vu que $y_\beta \to x$, il existe $\beta_0 \in B$ tel que $x - y_\beta \in U$ pour $\beta \geqslant \beta_0$. Par définition de la suite partielle généralisée, il existe pour α_0 un indice $\beta(\alpha_0) \in B$ tel que pour tout $\beta' \in B$, $\beta' \geqslant \beta(\alpha_0)$, on puisse exhiber un indice $\alpha' \in A$, $\alpha' \geqslant \alpha_0$, vérifiant $x_{\alpha'} = y_{\beta'}$. Prenons $\beta' \geqslant \beta(\alpha_0)$, β_0 et l'indice correspondant α'. Pour $\alpha \geqslant \alpha_0$ on a donc

$$x_\alpha - x = (x_\alpha - x_{\alpha'}) + (y_{\beta'} - x) \in U + U \subset V,$$

d'où $x_\alpha \to x$.

Supposons inversement que K est totalement borné et complet. Servons-nous encore du théorème I.2.3 pour vérifier la compacité de K. Soit $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une suite généralisée d'éléments de K. Désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de toutes les familles centrées $\mathfrak{F}$ des parties E de K, telles que la suite généralisée $\{x_\alpha\}$ rencontre souvent (cf. I.2.7) chaque $E \in \mathfrak{F}$. L'ensemble $\mathfrak{M}$ n'est pas vide, puisque la famille composée de K seul est contenue dans $\mathfrak{M}$. Ordonnons l'ensemble $\mathfrak{M}$ par inclusion. En vertu du lemme de Zorn, il existe une famille maximale $\mathfrak{F}_0$ dans l'ensemble $\mathfrak{M}$ (l'application du lemme de Zorn est équivalente à la démonstration du théorème II.4.1). La famille $\mathfrak{F}_0$ étant maximale, il résulte que

1) $K \in \mathfrak{F}_0$;

2) si les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rencontrent souvent $\{x_\alpha\}$ et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}_0$, alors $A_i \in \mathfrak{F}_0$ pour un i.

La proposition 1) est évidente. Supposons que 2) est fausse. Si la famille obtenue en ajoutant un ensemble A_i à la famille $\mathfrak{F}_0$ est centrée, alors elle coïncidera avec $\mathfrak{F}_0$, puisque $\mathfrak{F}_0$ est maximale; d'où $A_i \in \mathfrak{F}_0$. Donc, puisqu'on a supposé que 2) n'est pas vraie, il existe pour chaque A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ une collection finie d'ensembles $B_i^{(k)} \in \mathfrak{F}_0$ $(k = 1, 2, \ldots, k_i)$ tels que

$$A_i \cap B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \ldots \cap B_i^{(k_i)} = \varnothing.$$

Donc

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} (B_i^{(1)} \cap B_i^{(2)} \cap \ldots \cap B_i^{(k_i)}) = \varnothing.$$

Or, par hypothèse $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}_0$, tous les $B_i^{(k)} \in \mathfrak{F}_0$ et la famille $\mathfrak{F}_0$ est centrée, donc C n'est pas vide. Cette contradiction prouve 2).

Considérons l'ensemble B de tous les couples (E, α), où $E \in \mathfrak{F}_0$ et $\alpha \in A$ est tel que $x_\alpha \in E$. Munissons B de l'ordre suivant: $(E_1, \alpha_1) \geqslant (E_2, \alpha_2)$ si et seulement si $E_1 \subset E_2$ et $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ dans A. Puisque la famille $\mathfrak{F}_0$ est centrée et $\{x_\alpha\}$ rencontre souvent chaque élément de $\mathfrak{F}_0$, il vient que B est un ensemble filtrant supérieurement. Pour $(E, \alpha) \in B$ posons $y_{(E,\alpha)} = x_\alpha$. Alors $\{y_{(E,\alpha)}\}$ $((E, \alpha) \in B)$ est une suite partielle généralisée de $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$. En effet, pour tout $\alpha \in A$ prenons un élément $(K, \alpha) \in B$. Si $(E, \alpha') \in B$, $(E, \alpha') \geqslant (K, \alpha)$, alors $\alpha' \geqslant \alpha$ et $x_{\alpha'} = y_{(E,\alpha')}$, ce que nous voulions.

Montrons que $\{y_{(E,\alpha)}\}$ $((E, \alpha) \in B)$ est une suite généralisée de Cauchy, ce qui en vertu de la complétude de K achèvera la démonstration du théorème.

Soit un voisinage quelconque V de **0**. Il existe alors un voisinage équilibré U de **0**, tel que $U + U \subset V$. L'ensemble K étant totalement borné, on peut trouver des points $z_1, z_2, \ldots, z_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (z_i + U)$.

Si nous posons

$$A_i = (z_i + U) \cap K,$$

alors

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}_0,$$

d'où, en vertu de 2), un certain $A_i \in \mathfrak{F}_0$. Soit un indice arbitraire $\alpha \in A$ tel que $x_\alpha \in A_i$. Si $(E_1, \alpha_1), (E_2, \alpha_2) \in B$ et $(E_1, \alpha_1), (E_2, \alpha_2) \geqslant (A_i, \alpha)$, alors

$$y_{(E_1, \alpha_1)} - y_{(E_2, \alpha_2)} = x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in E_1 - E_2 \subset A_i - A_i \subset$$
$$\subset (z_i + U) - (z_i + U) \subset U + U \subset V,$$

puisque $E_1, E_2 \subset A_i$.

La suite généralisée partielle construite est de Cauchy, ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème 4 justifie la dénomination d'ensembles *précompacts* donnée aux ensembles totalement bornés.

§ 2. Espaces localement convexes

2.1. On dit qu'un e.v.t. X séparé (sur K) est *localement convexe* (en abrégé e.l.c.) s'il possède un système fondamental de voisinages convexes de **0**. La théorie des e.l.c. est bien plus riche en résultats que celle des e.v.t. pour deux raisons: la première est que d'innom-

brables fonctionnelles linéaires continues sont définies sur des e.l.c., la seconde que presque tous les espaces que l'on rencontre en analyse fonctionnelle sont localement convexes.

Appliqué à un e.l.c., le théorème 1.1 se simplifie considérablement. En vertu de ce théorème un e.l.c. possède une base de voisinages absolument convexes fermés de 0.

THÉORÈME 1. *Soit dans un espace vectoriel* X *un système* $\mathfrak{B}_0$ *de parties absolument convexes absorbantes, vérifiant la condition suivante:*

$$\text{pour tout } x \neq 0 \text{ il existe } V \in \mathfrak{B}_0 \text{ et } \lambda > 0, \text{ tels que } x \notin \lambda V. \tag{1}$$

Appelons $\mathfrak{B}$ *un système de parties de la forme*

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \quad (\varepsilon > 0, \quad V_i \in \mathfrak{B}_0, \quad n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Alors le système $\mathfrak{B}$ *vérifie toutes les conditions du théorème* 1.1, *et de plus* X *est un e.l.c. (avec un système fondamental* $\mathfrak{B}$ *de voisinages de* 0).

DÉMONSTRATION. Les conditions 1) à 3) du théorème 1.1 sont évidentes pour $\mathfrak{B}$, quant à 4) elle découle du fait que pour tout ensemble convexe E on a $(1/2)\,E + (1/2)\,E = E$. Donc X est un e.v.t. Le corollaire 2 du théorème 1.1 nous apprend que la condition (1) entraîne que X est séparé. Les ensembles de la forme (2) étant absolument convexes, X est un e.l.c.

LEMME 1. *Soit* X *un e.v.t.*

1) *Une sous-norme* p *est continue sur* X *si et seulement si elle est continue en* 0.

2) *La fonctionnelle de Minkowski* p_U *d'un ensemble absorbant convexe* U *est continue si et seulement si* U *est un voisinage. Dans ce cas, l'intérieur* $\dot{U} = \{x\colon p_U(x) < 1\}$ *et l'adhérence* $\bar{U} = \{x\colon p_U(x) \leqslant 1\}$.

DÉMONSTRATION. 1) Si p est continue en 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage équilibré U de 0 dont tous les points x sont tels que $p(x) < \varepsilon$. Si $y \in X$ est un point arbitraire, alors pour tous les $x \in y + U$ on a $x - y,\ y - x \in U$, d'où, en vertu de l'inégalité II.3.2 (c'), l'on obtient $|p(x) - p(y)| \leqslant \max(p(x-y), p(y-x)) < \varepsilon$.

2) Le lemme II.3.1 nous dit que la fonction p_U est une sous-norme. Si U est un voisinage, alors pour tout $\varepsilon > 0$ l'appartenance $x \in \varepsilon U$ entraîne $p_U(x) \leqslant \varepsilon$ par définition de la fonctionnelle de Minkowski, d'où p_U est continue en 0 et par suite sur X tout entier.

Inversement, si p_U est continue, l'ensemble $V = \{x: p(x) < 1\} = p^{-1}(]-1, 1[)$ est ouvert. Comme $V \subset U$, on déduit que U est un voisinage.

Soit $x \in \mathring{U}$. Supposons que $p_U(x) = 1$ et montrons que tout voisinage V du point x contient un point $y \notin U$, ce qui contredit $x \in \mathring{U}$. En effet, V étant un voisinage du point x, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $y = (1 + \varepsilon) x \in V$. Alors $p_U(y) = (1 + \varepsilon) p_U(x) = 1 + \varepsilon > 1$, d'où $y \notin U$.

Supposons que $p_U(x) \leqslant 1$. Il existe alors une suite $\lambda_n \to 1$, telle que $x \in \lambda_n U$ pour tout n. Donc $y_n = x/\lambda_n \in U$ et $y_n \to x \in \bar{U}$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Corollaire. *Si E est un ensemble convexe dans un e.v.t.* X, *alors son intérieur $\mathring{E}$ est convexe. Si $\mathring{E} \neq \varnothing$, alors l'adhérence de $\mathring{E}$ est $\bar{E}$.*

Démonstration. On peut admettre que $\mathring{E} \neq \varnothing$. Soit $x \in \mathring{E}$. Alors l'ensemble $U = x - E$ est un voisinage convexe de 0, et de plus $\mathring{U} = x - \mathring{E}$. D'après le lemme 1, l'ensemble $\mathring{U} = \{x: p_U(x) < 1\}$ est convexe, donc $\mathring{E}$ l'est également.

Montrons la deuxième proposition. Vu que $\overline{\mathring{U}} = x - \overline{\mathring{E}}$, il suffit de la prouver pour $\mathring{U}$, c'est-à-dire de vérifier que $\overline{\mathring{U}} \supset U$. Soient $x \in U$ et $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$. Comme $p_U(y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_U(x) < 1$, il vient $y_n \in \mathring{U}$. D'autre part $y_n \to x$, d'où $x \in \overline{\mathring{U}}$.

On peut munir un espace vectoriel X d'une topologie d'e.l.c. au moyen d'un système quelconque de semi-normes $\{p_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, vérifiant la condition:

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{X} \text{ il existe } \xi \in \Xi \text{ tel que } p_\xi(x) \neq 0. \tag{3}$$

Supposons que $\mathfrak{B}_0$ est constitué de tous les ensembles V_ξ de la forme

$$V_\xi = \{x \in \mathrm{X}: p_\xi(x) \leqslant 1\} \quad (\xi \in \Xi).$$

Le lemme II.3.1 nous dit que les ensembles V_ξ sont absolument convexes et absorbants. De (3) il résulte que le système $\mathfrak{B}_0$ vérifie (1). Définissons sur X une topologie comme dans le théorème 1. Le système d'ensembles (2) s'écrit

$$\{x \in \mathrm{X}: \max_{1 \leqslant i \leqslant n} p_{\xi_i}(x) \leqslant \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0;\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi).$$

La topologie obtenue qui munit X d'une structure d'e.l.c. est dite topologie *engendrée par la famille* $\{p_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Si X est un e.l.c. dont la topologie est engendrée par une famille de semi-normes

$\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), on dit que la famille de semi-normes $\{p_\xi\}$ est *génératrice* de (ou *déterminante* pour) la topologie de X. En vertu du lemme 1, toutes les semi-normes de la famille génératrice sont continues.

La topologie de tout e.l.c. X est engendrée par une famille de semi-normes. En effet, soit un système $\mathfrak{B}_0$ de voisinages absolument convexes de 0 tels que les ensembles de la forme (2) constituent un système fondamental de voisinages de 0 dans X (par exemple une base de voisinages absolument convexes de 0). Ceci étant, la condition (1) sera automatiquement réalisée grâce au fait que X est séparé. Alors la topologie initiale de X est engendrée par une famille de semi-normes $\{p_V\}$ ($V \in \mathfrak{B}_0$), où p_V est la fonctionnelle de Minkowski du voisinage V.

La famille génératrice de semi-normes n'est pas définie, de toute évidence, de façon unique. Si, par exemple, une semi-norme p appartient à une telle famille Q, alors ou bien la semi-norme $q(x) = 2p(x)$ appartient à Q ou bien elle n'appartient pas à Q. Dans le premier cas on élimine q de Q, dans le deuxième cas au contraire on ajoute q à Q. Dans l'un et dans l'autre cas on obtient une famille génératrice de semi-normes, différente de Q.

THÉORÈME 2. *Pour qu'un e.l.c.* X *soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et possède une famille génératrice dénombrable de semi-normes.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Si X est métrisable, il contient une base dénombrable de voisinages de 0. Les fonctionnelles de Minkowski des enveloppes absolument convexes des voisinages de cette base forment de toute évidence une famille génératrice dénombrable de semi-normes.

Condition suffisante. Soit $\{p_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), une famille génératrice de semi-normes. Il est équivalent de dire que la famille d'ensembles

$$V_n = \{x \in X: \max_{1 \leqslant k \leqslant n} p_k(x) \leqslant n^{-1}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

forme une base dénombrable de voisinages de 0 dans X. Pour $x, y \in X$ quelconques posons

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}. \tag{4}$$

Il est immédiat de vérifier que la fonction $\rho(x, y)$ définie par la formule (4) est une métrique. Montrons que la topologie engendrée par cette métrique coïncide avec la topologie initiale de l'e.l.c. X. L'espace X possédant une base dénombrable de voisinages de 0, il suffit pour cela de vérifier que la suite $x_m \to 0$ dans X si et seulement si $\rho(x_m, 0) \to 0$. Les suites $\xi_m = \{p_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}$ ($m \in \mathbb{N}$)

peuvent être identifiées avec les éléments de l'espace s. La distance de ξ_m à 0 dans l'espace s étant confondue avec $\rho(x_m, 0)$, et la convergence dans s étant une convergence en coordonnées (cf. I.3.2), il suit que $\rho(x_m, 0) \to 0$ si et seulement si $p_n(x_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la forme des ensembles V_n il résulte que la convergence $x_m \to 0$ dans X signifie la même chose. Le théorème est démontré.

De nombreuses notions concernant les e.l.c. admettent une signification simple et suggestive en termes de familles génératrices de semi-normes. Soit $\{p_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) une famille de semi-normes, génératrice d'une topologie sur un e.l.c. X. Les propositions suivantes sont une conséquence immédiate des définitions.

I. Une suite généralisée $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) converge vers un élément x dans un e.l.c. X si et seulement si pour tout $\xi \in \Xi$ on a $p_\xi(x_\alpha - x) \xrightarrow[A]{} 0$.

II. Dire qu'un ensemble $E \subset X$ est borné revient à dire que les ensembles numériques $\{p_\xi(x) : x \in E\}$ le sont pour tout $\xi \in \Xi$.

Les espaces s (T), C $(\mathbf{R}^1)$, D $[a, b]$, $\mathbf{L}_\omega$ introduits dans 1.3 sont des e.l.c. La situation est plus compliquée avec l'espace S (T, Σ, μ). Si (T, Σ, μ) n'est pas un espace de mesure discrète, alors l'e.v.t. S (T, Σ, μ) n'est pas localement convexe (nous le prouverons plus bas pour le cas particulier S $(0, 1)$); si la mesure μ est discrète, S (T, Σ, μ) est un e.l.c. Supposons que la mesure μ est discrète et que T^* est un ensemble d'atomes. L'espace S (T, Σ, μ) est alors isomorphe à l'e.v.t. s (T^*). Or, s (T^*) est manifestement un e.l.c., donc S (T, Σ, μ) l'est aussi.

Nous allons clore ce numéro par la démonstration d'une proposition qui nous sera utile pour la suite.

THÉORÈME 3. *L'enveloppe convexe et l'enveloppe absolument convexe d'une partie totalement bornée d'un e.l.c. sont totalement bornées.*

DÉMONSTRATION. Il suffit évidemment de traiter le cas d'une enveloppe absolument convexe. Soient E un ensemble totalement borné, E_1 son enveloppe absolument convexe. Si V est un voisinage absolument convexe de 0 dans X, il existe des éléments $x_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ pour lesquels $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$. Identifions l'espace de dimension finie $\mathscr{L}(\{x_i\}_{i=1}^n)$ avec $\mathbf{K}^m$, $m \leqslant n$ (voir II.1.4). L'enveloppe absolument convexe A de l'ensemble fini $\{x_i\}_{i=1}^n$ est visiblement bornée et fermée, donc c'est un ensemble compact dans l'espace euclidien $\mathbf{K}^m$. La convergence dans $\mathbf{K}^m$ étant une convergence en coordonnées et les opérations algébriques continues dans X, l'injection identique $\mathbf{K}^m \to X$ est continue; alors A est compact dans X, donc totalement borné (théorème 1.4).

On a $E_1 \subset A + V$, puisque $A + V$ est absolument convexe et contient E. L'ensemble A étant totalement borné, il existe des

éléments $y_j \in A$ $(1 \leqslant j \leqslant j_0)$ pour lesquels $A \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} (y_j + V)$. On obtient en définitive $E_1 \subset A + V \subset \bigcup_{j=1}^{j_0} (y_j + 2V)$, d'où E_1 est totalement borné, ce qui achève la démonstration du théorème.

En utilisant le théorème 1.4 on déduit du théorème 3 le

COROLLAIRE. *L'enveloppe convexe fermée et l'enveloppe absolument convexe fermée de toute partie précompacte d'un e.l.c. quasi complet sont compactes.*

2.2. Dans ce numéro nous nous penchons sur les applications de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach à la théorie des e.l.c. Nous montrons en particulier une importante propriété de l'e.l.c., à savoir qu'il contient de nombreuses fonctionnelles linéaires continues.

Signalons tout d'abord qu'une fonctionnelle linéaire f est continue sur un e.v.t. X si et seulement si elle est continue en 0. Supposons en effet que f est continue en 0 et que la suite généralisée $x_\alpha \to x$ dans X. Alors $f(x_\alpha) - f(x) = f(x_\alpha - x) \to 0$.

LEMME 2. *Tout hyperplan d'un e.v.t.* X *est soit fermé soit dense dans* X. *Un hyperplan* $M = \{x : f(x) = \lambda\}$ *est fermé si et seulement si la fonctionnelle* f *est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit $M = x + H$, où H est un hypersous-espace. Si H n'est pas fermé, il doit être dense dans X, puisque l'adhérence $\overline{H}$ est un espace vectoriel contenant H (cf. lemme II.2.1). L'égalité $\overline{M} = x + \overline{H}$ entraîne la première proposition. Pour démontrer la deuxième proposition il suffit, en vertu du théorème II.2.1, de vérifier que $f^{-1}(0)$ est fermée si et seulement si la fonctionnelle f est continue. Si f est continue, alors $f^{-1}(0)$ est fermé, puisque l'ensemble $\{0\}$ est fermé dans K. Supposons inversement que $H = f^{-1}(0)$ est fermé. Il suffit de prouver que la fonctionnelle f est continue en 0. Supposons que $f \neq 0$ (sinon $f = 0$ est continue); $V = \{x : |f(x)| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Si nous montrons que V est un voisinage de 0 dans X, cela voudra dire que f est continue en 0. Comme $f \neq 0$, il existe un point $x_0 \in X$, tel que $f(x_0) = \varepsilon$. L'ensemble H étant fermé, il existe un voisinage équilibré U de 0, tel que $(x_0 + U) \cap H = \varnothing$. Montrons que $U \subset V$, d'où il s'ensuivra que V est un voisinage de 0. Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe $x \in U$ pour lequel $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Alors $y = -\varepsilon x / f(x) \in U$ et $f(x_0 + y) = f(x_0) - \varepsilon = 0$, d'où $y \in (x_0 + U) \cap H$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 4 (forme géométrique du théorème de Hahn-Banach). *Soient* X *un e.v.t.*, E *un ensemble linéaire dans* X, $x_0 \in X$. *Si* U *est*

un ensemble linéaire ouvert convexe non vide dans X, *n'intersectant pas* $x_0 + E$, *alors il existe dans* X *un hyperplan fermé* H *contenant* $x_0 + E$ *et n'intersectant pas* U.

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que X est un espace réel. Par une translation, si besoin est, on peut faire en sorte que $0 \in U$, c'est-à-dire U est un voisinage de 0. Désignons par p la fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble U. Considérons dans X l'ensemble linéaire $F = \mathcal{L}(x_0, E)$. E est un hyperplan dans F, et en vertu du théorème II.2.2 il existe une fonctionnelle linéaire f_0 sur F telle que $f_0^{-1}(0) = E$ et $f_0(x_0) = 1$. Vérifions que pour tout $x = \lambda x_0 + y$ $(y \in E)$, on a $f_0(x) \leqslant p(x)$, ou ce qui revient au même $\lambda \leqslant p(\lambda x_0 + y)$. La dernière inégalité étant évidente pour $\lambda \leqslant 0$, il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$p\left(\frac{\lambda x_0 + y}{\lambda}\right) \geqslant 1.$$

D'après le lemme 1, la dernière inégalité signifie que $x_0 + y/\lambda \in U$. Cette relation est vérifiée puisque $y/\lambda \in E$.

D'après la forme analytique du théorème de Hahn-Banach (cf. théorème II.4.1), il existe une fonctionnelle linéaire f sur X qui est le prolongement de f_0 et telle que $f(x) \leqslant p(x)$ pour tout $x \in$ X.

La fonctionnelle f est continue sur X puisque $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$ et U est un voisinage de 0. Le lemme 2 nous dit alors que $H = f^{-1}(1)$ est un hyperplan fermé dans X. De toute évidence, $H \supset x_0 + E$. Vérifions que $H \cap U = \varnothing$. En effet, si $x \in U$, alors $p(x) < 1$, et si $x \in H$, alors $1 = f(x) \leqslant p(x)$. Ce qui démontre le théorème pour l'espace réel X.

Supposons maintenant que X est un espace complexe. Quitte à recourir à une translation, on peut faire en sorte que $0 \in x_0 + E$, c'est-à-dire $x_0 + E$ est un espace vectoriel. D'après ce qui a été démontré, il existe un hypersous-espace réel fermé H_1 tel que $H_1 \supset x_0 + E$, $H_1 \cap U = \varnothing$. Le lemme II.2.2 nous dit que $H = H_1 \cap (iH_1)$ est un hypersous-espace et de plus H satisfait visiblement aux conditions du théorème.

Le théorème 4 est valable dans tout e.v.t., mais pour l'appliquer il est nécessaire qu'existent des ouverts convexes. Or, ces derniers sont en abondance dans tout e.l.c. Remettons les applications du théorème 4 au numéro suivant et indiquons maintenant les conséquences de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach.

Soient X un e.l.c., X_0 un sous-espace vectoriel de X. X_0 est de toute évidence un e.l.c. pour la topologie induite de X.

COROLLAIRE 1. *Soit* f_0 *une fonctionnelle linéaire continue sur* X_0. *Il existe sur* X *une fonctionnelle linéaire continue* f, *prolongement de la fonctionnelle* f_0.

DÉMONSTRATION. La fonctionnelle f_0 étant continue, il existe un voisinage absolument convexe U de 0, tel que $|f(x)| \leqslant 1$ sur $U \cap X_0$. Alors $|f(x)| \leqslant p_U(x)$ sur X_0. Le théorème II.4.2 affirme que f_0 admet un prolongement f à X tout entier, tel que $|f(x)| \leqslant p_U(x)$. Donc, la fonctionnelle f est continue.

COROLLAIRE 2. *Pour tout point x_0 d'un espace vectoriel* X *et une semi-norme p, il existe une fonctionnelle linéaire f sur* X *telle que* $|f(x)| \leqslant p(x)$ *et* $f(x_0) = p(x_0)$.

DÉMONSTRATION. Sur l'espace vectoriel à une dimension X_0 engendré par le point x_0, posons $f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ et prolongeons ensuite f_0 à X d'après le théorème II.4.2.

COROLLAIRE 3. *Soit* X *un e.l.c. Si* $f(x) = 0$ *pour toute fonctionnelle linéaire continue sur* X, *alors* $x = 0$.

DÉMONSTRATION. Si $x \neq 0$, en vertu de (3) il existe une semi-norme continue p pour laquelle $p(x) > 0$. Or, en vertu du corollaire 2, il existe f pour laquelle $f(x) \neq 0$.

Le corollaire 3 exprime une propriété importante de l'e.l.c., savoir l'existence d'un nombre suffisant de fonctionnelles linéaires continues. Nous verrons ceci au paragraphe suivant. L'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur un e.v.t. X est désigné par X^* et appelé *dual topologique* de X. Il est évident que X^* est un sous-espace vectoriel dans le dual algébrique. Nous avons montré que si X est un e.l.c., alors X^* sépare les points de X. Dans le cas d'un e.v.t. il peut arriver que $X^* = \{0\}$ (mais il se peut que X^* sépare les points de X même dans le cas d'un e.v.t. qui n'est pas e.l.c.).

Montrons que toute fonctionnelle linéaire continue est nulle dans l'e.v.t. S (0, 1). Soit $f \in (S(0, 1))^*$, $f \neq 0$. L'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques des intervalles étant dense dans S (0, 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un intervalle Δ_n de longueur inférieure à $1/n$ pour lequel $f(\chi_{\Delta_n}) = \delta_n \neq 0$. Si $x_n = \chi_{\Delta_n}/\delta_n$, alors $x_n \to 0$ en mesure, d'où $f(x_n) \to 0$, puisque f est continue. D'autre part, $f(x_n) = 1$, ce qui est absurde.

En conclusion de ce numéro introduisons encore une notation. Soit X un e.l.c. On désignera par $X^*_{\mathbb{R}}$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires réelles continues sur X. Si X est réel, alors $X^*_{\mathbb{R}} = X^*$.

2.3. Nous énonçons ici deux importants théorèmes de séparation d'ensembles convexes par une fonctionnelle linéaire continue, qui trouvent de nombreuses applications en analyse convexe et ses applications à l'économie mathématique (cf. Golstein; Ioffé et Tikhomirov; Nikaïdo).

Soient E et F des ensembles dans un e.l.c. X. On dira qu'ils sont *séparés* si existe une fonctionnelle $f \in X^*_{\mathbb{R}}$ telle que

$$\sup \{f(x) : x \in E\} \leqslant \inf \{f(x) : x \in F\}. \tag{5}$$

Si (5) est une inégalité stricte, on dit que E et F sont *strictement séparés*. L'asymétrie de cette définition par rapport à E et F est virtuelle : il suffit de passer à la fonctionnelle $-f$ pour que E et F changent de place.

LEMME 3. *Si E est un ouvert dans un e.l.c.* X, $f \in X^*$, $f \neq 0$, *alors $f(E)$ est ouvert.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in E$, alors $E - x$ est un voisinage de 0, donc c'est un ensemble absorbant. Comme $f \neq 0$, il existe $x_0 \in X$ pour lequel $f(x_0) = 1$. Par suite, il existe $\lambda > 0$ tel que pour $|\mu| \leqslant \lambda$ on a $\mu x_0 \in E - x$. Alors $f(x) + \mu \in f(E)$ pour $|\mu| \leqslant \lambda$. Ce qui signifie que $f(E)$ est ouvert.

THÉORÈME 5. *Soient dans un e.l.c.* X *un ensemble convexe E ($\mathring{E} \neq \varnothing$) et un ensemble convexe non vide F, $\mathring{E} \cap F = \varnothing$. Alors E et F sont séparés. Si E et F sont ouverts, ils sont strictement séparés.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire du lemme 1, l'ensemble $\mathring{E}$ est convexe. Donc l'ensemble $U = \mathring{E} - F$ qui est ouvert et ne contient pas 0 l'est également, puisque $\mathring{E} \cap F = \varnothing$. Le théorème 4 affirme l'existence d'un hypersous-espace H réel fermé, tel que $0 \in H$ et $(\mathring{E} - F) \cap H = \varnothing$. Soit $H = \{x : f(x) = 0\}$, où $f \in X^*_{\mathbb{R}}$. L'ensemble $f(\mathring{E} - F)$ est convexe et par conséquent est un intervalle de $\mathbb{R}$; $0 \notin f(\mathring{E} - F)$. En changeant au besoin le signe on peut admettre que $f(\mathring{E} - F) < 0$. Donc, $\sup \{f(x) : x \in \mathring{E}\} \leqslant \inf \{f(x) : x \in F\}$. En utilisant le fait que $\mathring{E}$ est dense dans E (voir corollaire du lemme 1) et que la fonctionnelle f est continue, on déduit que E et F sont séparés.

Si E et F sont des ouverts, alors en vertu du lemme 3 $f(E)$ et $f(F)$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, d'où il suit qu'ils sont strictement séparés.

On appelle *corps convexe* un ensemble convexe fermé d'intérieur non vide dans un e.l.c. X. Soit E un ensemble dans X. On dit qu'une fonctionnelle réelle $f \in X^*_{\mathbb{R}}$ est une *fonctionnelle d'appui* de E en $x_0 \in E$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) = \lambda$ et E est contenu dans $\{x : f(x) \leqslant \lambda\}$ ou dans $\{x : f(x) \geqslant \lambda\}$. En outre, l'hyperplan réel $\{x : f(x) = \lambda\}$ est appelé *hyperplan d'appui* de E au point x_0.

COROLLAIRE. *Si C est un corps convexe dans* X, *tout point frontière de C admet une fonctionnelle d'appui.*

DÉMONSTRATION. Si x_0 est un point frontière de C, le résultat annoncé découle du théorème 5 si l'on y fait $E = C$, $F = \{x_0\}$.

THÉORÈME 6. *Soient E et F des ensembles convexes non vides disjoints dans un e.l.c.* X, *E étant fermé, F compact. Alors E et F sont strictement séparés.*

DÉMONSTRATION. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert convexe U de **0**, tel que les ensembles $E + U$ et $F + U$ sont disjoints. Ces ensembles étant ouverts et convexes, la proposition découlera du théorème 5.

Il suffit de prouver l'existence d'un voisinage ouvert absolument convexe V de **0**, tel que $(E + V) \cap F = \varnothing$, puisque pour $U = (1/2)\, V$ on aura alors $(E + U) \cap (F + U) = \varnothing$. En effet, si $x = a + (1/2)\, v_1 = b + (1/2)\, v_2$, où $a \in E$, $b \in F$, v_1, $v_2 \in V$, alors $b = x - (1/2)\, v_2 \in (E + V) \cap F$.

Désignons par $\mathfrak{B}$ la base de tous les voisinages absolument convexes ouverts de **0** dans X. Supposons que pour tous les $V \in \mathfrak{B}$ on ait $(E + V) \cap F \neq \varnothing$. Alors $\{\overline{(E + V)} \cap F : V \in \mathfrak{B}\}$ est un système centré de sous-ensembles fermés du compact F. Donc, il existe un point $x_0 \in F$ tel que $x_0 \in \overline{E + V} \subset E + 2V$ pour tout $V \in \mathfrak{B}$. Donc, x_0 est point limite pour E et puisque E est fermé, $x_0 \in E$. Or, par hypothèse $E \cap F = \varnothing$. Cette contradiction démontre le théorème.

COROLLAIRE. *Si E est un ensemble absolument convexe dans un e.l.c.* X *et $x_0 \notin \bar{E}$, alors il existe $f \in$ X*, telle que $|f(x)| \leqslant 1$ pour tous les $x \in E$ et* $\operatorname{Re} f(x_0) > 1$.

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\{x_0\}$ étant compact, le théorème 6 affirme l'existence d'une fonctionnelle réelle $g \in X^*_{\mathbb{R}}$, telle que $g(x) \leqslant 1$ pour $x \in E$ et $g(x_0) > 1$. L'ensemble E étant absolument convexe, $|g(x)| \leqslant 1$ pour $x \in E$. Si X est un espace complexe, nous poserons $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Nous allons utiliser le procédé qui nous a servi à démontrer le théorème II.4.2. Pour tout $x \in$ X il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $|f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x)$. Donc, $f(e^{i\theta} x) = g(e^{i\theta} x)$ et $e^{i\theta} x \in E$, d'où $|f(x)| = g(e^{i\theta} x) \leqslant 1$.

On peut se servir des théorèmes de séparation pour démontrer celui de Krein-Milman.

On dit qu'un point x_0 d'un ensemble convexe E dans un e.l.c. X est *extrémal* si la relation $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$, x, $y \in E$, $0 < \lambda < 1$, entraîne $x = y = x_0$. Il est équivalent de dire que x_0 est point extrémal de E s'il n'est point intérieur d'aucun intervalle d'extrémités appartenant à E. Par exemple, dans un plan, les sommets d'un carré sont des points extrémaux contrairement à tous les autres points frontière.

THÉORÈME 7 (Krein-Milman). *Toute partie convexe compacte non vide d'un e.l.c.* X *est enveloppe convexe fermée de tous ses points extrémaux.*

La démonstration du théorème 7 figure par exemple dans le livre de Schaefer [I]. Le livre de Phelps contient de nombreuses applications et précisions du théorème de Krein-Milman. La notion de point extrémal est d'une grande importance dans la programmation optimale et ses applications aux problèmes économiques.

§ 3. Dualité

Dans ce paragraphe, nous étudions les relations liant un e.l.c. à l'espace des fonctionnelles linéaires définies sur lui.

3.1. Soient X un espace vectoriel sur K, X^+ son dual algébrique. Une partie Y de X^+ est dite *totale* sur X si $f(x) = 0$ pour tous les $f \in Y$ entraîne $x = 0$. Fixons une partie totale Y dans X^+. On dit alors que $\langle X, Y\rangle$ est un *couple d'espaces vectoriels en dualité* ou un *couple dual.* Comme exemples de tels couples on a $\langle X, X^+\rangle$ et $\langle X, X^*\rangle$, X étant un e.l.c.

Soit X un e.l.c. On dit que sa topologie est *compatible avec la dualité* entre X et Y si $X^* = Y$. L'un des principaux objectifs de ce paragraphe est de décrire toutes les topologies localement convexes compatibles avec la dualité donnée.

Dans ce paragraphe, nous introduisons la topologie faible qui jouera un rôle important dans la majeure partie de ce livre lors de l'étude des espaces normés.

Soit $\langle X, Y\rangle$ un couple en dualité. On appelle *topologie faible* dans X, définie par Y, et on note $\sigma(X, Y)$, une topologie localement convexe sur X, engendrée par une famille de semi-normes $p(x) = |f(x)|$, où f parcourt Y tout entier (Y étant total, cette famille de semi-normes vérifie la condition (3), § 2)

Les ensembles

$$\{x: \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(x)| \leqslant 1\} \quad (f_i \in Y)$$

forment une base de voisinages fermés de 0 pour la topologie $\sigma(X, Y)$. On désignera par $(X, \sigma(X, Y))$ l'espace X muni de la topologie faible. On montrera que la topologie $\sigma(X, Y)$ est compatible avec la dualité entre X et Y.

LEMME 1. *Si* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *est un système linéairement indépendant de fonctionnelles linéaires sur un espace vectoriel* X, *alors il existe un ensemble d'éléments* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *vérifiant les relations*

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et appelé biorthogonal à $\{f_k\}_{k=1}^n$.

DÉMONSTRATION. Prouvons par récurrence l'existence du système mentionné. Si $n = 1$, alors puisque $f_1 \neq 0$, il existe $x_1 \in X$, de sorte que $f_1(x_1) = 1$. L'élément x_1 constitue le système cherché. Traitons le cas où $n > 1$. Supposons que l'on puisse construire un système biorthogonal d'éléments quand le nombre de fonctionnelles est inférieur à n. Montrons l'existence, à cette condition, d'un élément $x_1 \in X$ tel que

$$f_1(x_1) = 1, \quad f_2(x_1) = \ldots = f_n(x_1) = 0. \tag{1}$$

A cet effet, considérons un système d'éléments $x'_2, \ldots, x'_n \in X$ biorthogonal à celui des fonctionnelles $f_2, \ldots, f_n$. Pour chaque $x \in X$ on a

$$x = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x'_k + x', \tag{2}$$

où x' est un élément tel que $f_2(x') = \ldots = f_n(x') = 0$. En effet, en supposant que

$$\alpha_k = f_k(x) \quad (k = 2, \ldots, n), \tag{3}$$

on aura pour $x' = x - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k x'_k$

$$f_j(x') = f_j(x) - \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_j(x'_k) = \alpha_j - \alpha_j = 0 \quad (j = 2, \ldots, n).$$

On remarquera que les coefficients α_k sont déterminés de façon unique par l'élément x. Pour s'en assurer il suffit d'appliquer la fonctionnelle f_j $(j = 2, \ldots, n)$ aux deux membres de (2).

Supposons maintenant que l'élément $x_1 \in X$ vérifiant (1) n'existe pas. Cela signifie que pour $x' \in X$ tel que $f_2(x') = \ldots = f_n(x') = 0$, on aura également $f_1(x') = 0$. Compte tenu de cette circonstance et de (3), à partir de (2) on déduit pour $x \in X$ quelconque

$$f_1(x) = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k f_1(x'_k) + f_1(x') = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(x),$$

où $\lambda_k = f_1(x'_k)$ $(k = 2, \ldots, n)$. Donc $f_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k$, ce qui contredit l'indépendance linéaire des fonctionnelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Donc, l'élément x_1 existe. On démontre de même l'existence des éléments $x_2, \ldots, x_n \in X$ pour lesquels

$$f_k(x_k) = 1, \quad f_j(x_k) = 0$$
$$(j \neq k; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 2, \ldots, n),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 1. *La topologie faible* $\sigma(X, Y)$ *est compatible avec la dualité entre* X *et* Y, *c'est-à-dire* $(X, \sigma(X, Y))^* = Y$.

DÉMONSTRATION. Par définition de la topologie faible $\sigma(X, Y)$ il est clair que chaque fonctionnelle $f \in Y$ est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $(X, \sigma(X, Y))$.

Supposons inversement que f est une fonctionnelle linéaire dans l'espace $(X, \sigma(X, Y))$. L'ensemble $V = f^{-1}([-1, 1])$ *) est un voisinage de **0** dans $(X, \sigma(X, Y))$. Cela veut dire qu'existent des fonctionnelles $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Y$ telles que

$$V \supset \bigcap_{k=1}^{n} V_k \quad (V_k = f_k^{-1}([-1,1]); \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

En outre, on peut admettre que les fonctionnelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendantes. En effet, si une fonctionnelle, par exemple f_n, est une combinaison linéaire des autres

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{k_j} \quad (\alpha_j \neq 0; \quad k_j \neq n; \quad j = 1, 2, \ldots, m),$$

alors

$$V_n \supset \bigcap_{j=1}^{m} \frac{1}{|\alpha_j| m} V_{k_j},$$

et par suite dans l'intersection (4) on peut se passer de V_n. Le lemme 1 affirme l'existence d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour chaque élément $x \in X$ on a

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + x', \tag{5}$$

où

$$\alpha_k = f_k(x), \quad f_k(x') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

En appliquant la fonctionnelle f aux deux membres de (5), on obtient

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) + f(x') \quad (\beta_k = f(x_k); \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Prouvons que $f(x') = 0$. Si $f(x') \neq 0$, alors pour un $\alpha > 0$ assez grand on aurait $|f(\alpha x')| > 1$, c'est-à-dire $\alpha x' \notin V$ et par suite,

*) Dans le cas d'un corps de scalaires complexes, ici et dans la suite il faudra prendre $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ au lieu de $[-1, 1]$.

en vertu de (4), pour un k au moins on aurait $\alpha x' \notin \lambda_k V_k$, ce qui contredit la relation (6).

Donc, de (7) il suit que $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k$. Comme $f_k \in Y$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), il vient $f \in Y$, c.q.f.d.

REMARQUE. Une conséquence de ce théorème est que si Y contient un ensemble linéaire total $\tilde{Y}$ distinct de Y, la topologie $\sigma(X, \tilde{Y})$ est essentiellement plus faible que la topologie $\sigma(X, Y)$. De ce point de vue la topologie faible $\sigma(X, Y)$ définit l'ensemble Y de façon unique.

Soit X un e.l.c. muni d'une topologie τ. Il est clair que la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ est plus faible que la topologie τ, donc tout ensemble faiblement fermé, c'est-à-dire tout ensemble fermé dans l'espace $(X, \sigma(X, X^*))$ sera fermé dans l'espace X. La réciproque n'est généralement pas vraie. Cependant on a le

THÉORÈME 2. *Dans tout e.l.c.* X *l'adhérence pour la topologie* τ *et l'adhérence faible d'un ensemble convexe quelconque sont confondues.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que tout ensemble convexe τ-fermé E est faiblement fermé. D'après le théorème 2.6, pour tout $x \notin E$ il existe une fonctionnelle réelle continue g_x sur X, telle que $\sup\{g_x(y) : y \in E\} = \alpha_x < g_x(x)$. Alors $E = \bigcap_{x \notin E} \{y \in X : g_x(y) \leqslant \alpha_x\}$. Il est évident que chaque ensemble $\{y \in X : g_x(y) \leqslant \alpha_x\}$ est faiblement fermé, ce qui signifie que E est faiblement fermé.

COROLLAIRE 1. *Les adhérences des ensembles convexes pour toutes les topologies localement convexes compatibles avec la dualité donnée, sont confondues.*

COROLLAIRE 2. *Soient* τ_1 *et* τ_2 *deux topologies localement convexes compatibles avec une même dualité. Si la suite généralisée* $x_\alpha \to x$ *pour la topologie* τ_1, *il existe une suite* $\{y_\beta\}$ *dont les éléments sont des combinaisons convexes des éléments* x_α, *et de plus* $y_\beta \to x$ *pour la topologie* τ_2.

DÉMONSTRATION. Le point x appartient de toute évidence à l'enveloppe convexe τ_1-fermée E de l'ensemble $\{x_\alpha\}$. En vertu du corollaire 1, l'enveloppe E est la τ_2-adhérence de l'enveloppe convexe de $\{x_\alpha\}$. Le point x est donc point τ_2-limite pour co $(\{x_\alpha\})$.

COROLLAIRE 3. *Soient* X *un e.l.c.*, X_0 *une partie de* X. *Alors*:

1) *la topologie faible* $\sigma(X_0, X_0^*)$ *coïncide avec la topologie induite sur* X_0 *de l'espace* $(X, \sigma(X, X^*))$;

2) *supposons que* X_0 *est fermée dans* X; *si un ensemble* E *est relativement compact dans* $(X, \sigma(X, X^*))$, *alors* $E \cap X_0$ *est relativement compact dans* $(X_0, \sigma(X_0, X_0^*))$.

Démonstration. 1) La restriction de la fonctionnelle $f \in X^*$ à X_0 étant continue, sur X_0 on a $\sigma(X, X^*) \leqslant \sigma(X_0, X_0^*)$. L'inégalité inverse découle du théorème de Hahn-Banach (cf. théorème 2) qui dit que toute fonctionnelle $f_0 \in X_0^*$ peut être prolongée en une fonctionnelle $f \in X^*$.

2) Le sous-espace X_0 étant $\sigma(X, X^*)$-fermé en vertu du corollaire 1, l'adhérence de l'ensemble $E \cap X_0$ dans $(X, \sigma(X, X^*))$ est contenue dans X_0. De la proposition 1) il résulte que cette adhérence est $\sigma(X_0, X_0^*)$-compacte.

On dit qu'un ensemble est *faiblement borné* s'il est borné pour la topologie faible.

Théorème 3. *Les ensembles bornés dans un e.l.c.* X *et dans* $(X, \sigma(X, X^*))$ *sont les mêmes.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème (cf. Schaefer [I]). Dans le chapitre VIII, nous le prouverons dans le cas particulier important où X est un espace normé.

3.2. Soit $\langle X, Y\rangle$ un couple en dualité. Pour $E \subset X$ définissons

$$E^\circ = \{f \in Y : |f(x)| \leqslant 1, \quad \forall x \in E\}.$$

L'ensemble $E^\circ \subset Y$ s'appelle *polaire* de E.

Voici encore une définition. On appelle *annulateur* $E^\perp$ d'un ensemble $E \subset X$, l'ensemble de toutes les fonctionnelles $f \in Y$ s'annulant sur E. Il est évident que l'annulateur est un ensemble linéaire $\sigma(Y, X)$-fermé. Le lemme suivant dont la démonstration est laissée au soin du lecteur exprime les propriétés élémentaires des polaires.

Lemme 2. 1) *Si* $E_1 \subset E_2$, *alors* $E_2^\circ \subset E_1^\circ$.

2) *Si* $\lambda \neq 0$, *alors* $(\lambda E)^\circ = \lambda^{-1} E^\circ$.

3) $(\bigcup_{\xi \in \Xi} E_\xi)^\circ = \bigcap_{\xi \in \Xi} E_\xi^\circ$.

4) *Si* E *est un ensemble linéaire dans* X, *alors* E° *est confondu avec l'annulateur* $E^\perp$.

Avant de passer à l'étude de propriétés plus profondes des polaires, faisons une remarque très importante pour la suite. Soit $\langle X, Y\rangle$ un couple en dualité. Chaque élément $x \in X$ peut être considéré comme une fonctionnelle linéaire F_x définie sur Y par la formule

$$F_x(f) = \overline{f(x)} \quad (f \in Y)\ ^{*)}.$$

*) Voir dans II.2.2 la définition de la multiplication d'une fonctionnelle par un nombre.

L'espace Y étant total sur X, l'application $\pi_Y : x \in X \to F_x$ est un isomorphisme linéaire de X sur un sous-espace vectoriel de Y^+. L'application π_Y qui est dite *canonique* ou *injection naturelle* de X dans Y^+ jouera dans la suite un rôle important dans la définition de l'espace normé réflexif. Pour l'instant nous observerons que notre exposé nous permet de considérer X comme un espace vectoriel total de fonctionnelles sur Y et partant que $\langle Y, X\rangle$ est également un couple en dualité, donc Y est muni de la topologie faible σ (Y, X) qui est justiciable de tous les résultats obtenus plus haut.

LEMME 3. *Si $E \subset X$, alors E° est absolument convexe et σ (Y, X)-fermé.*

DÉMONSTRATION. La convexité absolue est évidente, quant à la fermeture faible, elle découle de la formule

$$E^\circ = \bigcap_{x \in E} \{f \in Y : |f(x)| \leqslant 1\}.$$

Soient $\langle X, Y\rangle$ et $\langle Y, Z\rangle$ des couples en dualité, $X \subset Z \subset Y^+$. Si $E \subset X$, le polaire $E^{\circ\circ}$ du polaire E° dans Z est appelé *bipolaire* de E dans Z.

THÉORÈME 4. *Le bipolaire $E^{\circ\circ}$ dans Z de l'ensemble $E \subset X$ est confondu avec l'enveloppe absolument convexe σ (Z, Y)-fermée de E.*

DÉMONSTRATION. De toute évidence, $E \subset E^{\circ\circ}$. Désignons par G l'enveloppe absolument convexe σ (Z, Y)-fermée de E. Le lemme 3 nous dit que $E^{\circ\circ} \supset G$. Si $F_0 \in Z$ et $F_0 \notin G$, alors d'après le corollaire du théorème 2.6 il existe une fonctionnelle $\varphi \in (Z, \sigma(Z, Y))^*$ pour laquelle $\operatorname{Re} \varphi(F_0) > 1$ et $|\varphi(F)| \leqslant 1$ pour $F \in G$. Le théorème 1 affirme l'existence d'une fonctionnelle $f \in Y$ telle que $\varphi(F) = f(F)$ pour tout $F \in Z$. Vu que $E \subset G$, il vient $f \in E^\circ$. Par ailleurs, $|f(F_0)| \geqslant \operatorname{Re} f(F_0) > 1$, d'où $F_0 \notin E^{\circ\circ}$. Donc $E^{\circ\circ} \subset G$ et par conséquent $E^{\circ\circ} = G$.

Le théorème 4 est appelé théorème du bipolaire. On obtient les cas particuliers les plus importants de ce théorème en posant $Z = X$ ou $Z = Y^+$. Les théorèmes 2 et 4 entraînent le

COROLLAIRE 1. *Si X est un e.l.c., E° le polaire dans X^* d'un ensemble $E \subset X$ et $E^{\circ\circ}$ le bipolaire dans X, alors $E^{\circ\circ}$ est confondu avec l'enveloppe absolument convexe fermée de E.*

Soit X un e.l.c. On dit qu'un ensemble E dans X est *fondamental* si $\overline{\mathcal{L}}(E) = X$. Montrons que E est fondamental si et seulement si $E^\perp = \{0\}$.

COROLLAIRE 2. *Soit E un ensemble dans un e.l.c. X. Pour qu'un élément $x \in X$ appartienne à $\mathcal{L}(E)$, il est nécessaire et suffisant que $f(x) = 0$ pour tout $f \in E^\perp$, où $E^\perp$ est l'annulateur dans X^*.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2, on a $\mathcal{L}(E)^\circ = \mathcal{L}(E)^\perp$. D'après le corollaire 1, $\mathcal{L}(E)^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{L}}(E)$. Comme $\mathcal{L}(E)^\perp$ est un espace vectoriel, on a $\mathcal{L}(E)^{\circ\circ} = \mathcal{L}(E)^{\perp\circ} = \mathcal{L}(E)^{\perp\perp}$. Il est aisé de voir que $E^\perp = \mathcal{L}(E)^\perp$. D'où il suit $E^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{L}}(E)$, c.q.f.d.

Supposons toujours que $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ est un couple en dualité. Les propriétés de E dans $\mathbf{X}$ sont rattachées aux propriétés du polaire E°.

THÉORÈME 5. *Pour que le polaire E° d'un ensemble $E \subset \mathbf{X}$ soit absorbant dans* $\mathbf{Y}$, *il est nécessaire et suffisant que E soit borné dans l'espace* $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$.

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Considérons un voisinage V de 0 dans l'espace $(\mathbf{X}, \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$. On peut admettre que $V = f^{-1}(D)$ $(f \in \mathbf{Y})$, où $D = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leqslant 1\}$. L'ensemble V est le polaire de l'ensemble composé de la seule fonctionnelle f, c'est-à-dire $V = \{f\}^\circ$. E étant absorbant, pour un $\lambda > 0$ assez petit on aura $\lambda f \in E$, d'où, en passant aux polaires,

$$\frac{1}{\lambda} V = \frac{1}{\lambda} \{f\}^\circ = \{\lambda f\}^\circ \supset E^{\circ\circ}.$$

Cette relation indique que $E^{\circ\circ}$ est un ensemble borné, donc, à plus forte raison est borné l'ensemble $E \subset E^{\circ\circ}$.

Condition suffisante. Soit $f \in \mathbf{Y}$. Considérons le voisinage $V = f^{-1}(D)$. Si $E \subset \mathbf{X}$ est un ensemble borné, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda E \subset V$. En passant aux polaires, on a

$$\frac{1}{\lambda} E^\circ = (\lambda E)^\circ \supset V^\circ.$$

Or, $f \in V^\circ$, donc $\lambda f \in E^\circ$. Ce qui prouve que E° est un ensemble absorbant.

3.3. Soit $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ un couple en dualité. Voyons comment munir $\mathbf{X}$ d'une topologie. L'outil des polaires qui établit une relation entre ensembles de $\mathbf{Y}$ et ensembles de $\mathbf{X}$ semble bien se prêter à cet objectif. Plus exactement, pour système de voisinages engendrant une topologie sur un e.l.c., nous prendrons l'ensemble des polaires de certains ensembles de $\mathbf{Y}$. Pour que le système construit satisfasse aux conditions du théorème 2.1, il faut, en vertu du théorème 5, exiger que ces ensembles soient bornés dans $\mathbf{Y}$.

Soit donc $\mathfrak{A}$ un ensemble de parties $\sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$-bornées de $\mathbf{Y}$, telles que

1) l'ensemble $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ soit fondamental dans $(\mathbf{Y}, \sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X}))$.

Désignons par $\mathfrak{B}_0$ l'ensemble des polaires dans $\mathbf{X}$ des parties de $\mathfrak{B}$. Montrons que $\mathfrak{B}_0$ vérifie la condition (1) du théorème 2.1. Soit $x \in \mathbf{X}$ et supposons que cette condition n'est pas réalisée pour lui. Alors, pour tout $V \in \mathfrak{B}$ et tout $\lambda > 0$, on a $x \notin \lambda V$. Comme chaque $V = A^\circ$, où $A \in \mathfrak{A}$, on a $|f(nx)| \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$ pour $f \in A$.

D'où $f(x) = 0$ si $f \in \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$. Par suite, $x = 0$ d'après le corollaire 2 du théorème 4.

Ainsi, le système $\mathfrak{B}_0$ satisfait à toutes les conditions du théorème 2.1, donc X est un e.l.c. La topologie obtenue dans X s'appelle *topologie de la convergence uniforme sur les parties de* $\mathfrak{A}$ ou *topologie de* $\mathfrak{A}$*-convergence.*

Si de plus $\mathfrak{A}$ vérifie les conditions:

2) si $A, B \in \mathfrak{A}$, il existe $C \in \mathfrak{A}$ tel que $A \cup B \subset C$;

3) $A \in \mathfrak{A}$ implique $\lambda A \in \mathfrak{A}$, $\forall \lambda \in K$,

alors on démontre sans peine que $\mathfrak{B}_0$ est une base de voisinages de **0** pour la topologie de la convergence uniforme. Cette topologie se décrit facilement en termes de semi-normes. Pour tout $A \in \mathfrak{A}$ posons

$$p'_A(x) = \sup \{|f(x)| : x \in A\}.$$

Alors p'_A est la fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble A°, et la famille de semi-normes $\{p'_A : A \in \mathfrak{A}\}$ définit une $\mathfrak{A}$-topologie.

De toutes les topologies de X nous allons en indiquer pour l'instant deux qui, dans un certain sens, sont extrêmes. D'abord pour $\mathfrak{A}$ on peut prendre tous les ensembles possibles à un seul point, la topologie de $\mathfrak{A}$-convergence étant la topologie faible $\sigma(X, Y)$. Ensuite pour $\mathfrak{A}$ on peut adopter le système de tous les ensembles $\sigma(Y, X)$-bornés. La topologie correspondante est dite forte et notée $\beta(X, Y)$. Nous savons déjà que le dual de $(X, \sigma(X, Y))$ est Y, alors que celui de $(X, \beta(X, Y))$ peut être un sous-espace plus large de X^+. Au numéro suivant nous décrirons naturellement toutes les topologies de $\mathfrak{A}$-convergence compatibles avec la dualité entre X et Y. Pour l'instant faisons quelques remarques. Il est évident qu'on peut permuter X et Y et munir l'espace Y des topologies de la convergence uniforme.

Soit X un e.l.c. On dit qu'un ensemble $G \subset X^*$ est *équicontinu* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de **0** dans X, tel que $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in U$, $\forall f \in G$. Il est évident qu'une partie de X^* est équicontinue si et seulement si elle est contenue dans le polaire d'un voisinage de **0** dans X.

THÉORÈME 6. *Chaque topologie localement convexe est une topologie de la convergence uniforme sur des ensembles équicontinus de l'espace dual.*

DÉMONSTRATION. Dans tout e.l.c. X il existe une base $\mathfrak{B}$ de voisinages absolument convexes fermés de **0**. Les ensembles U° $(U \in \mathfrak{B})$ sont équicontinus, et $U^{\circ\circ} = U$ d'après le théorème du bipolaire (voir corollaire 1 du théorème 4), ce qui démontre le théorème.

Le théorème 6 montre l'universalité de la méthode de définition d'une topologie localement convexe, décrite plus haut.

3.4. Voyons maintenant les topologies compatibles avec la dualité donnée.

LEMME 4. *Soit* X *un espace vectoriel. L'espace* X^+ *est complet pour la topologie* $\sigma(X^+, X)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{f_\alpha\}$ une suite généralisée de Cauchy dans X^+. Alors pour tout $x \in X$ la suite $\{f_\alpha(x)\}$ est une suite numérique généralisée de Cauchy, donc pour tout $x \in X$ il existe $f(x) = \lim f_\alpha(x)$. Donc $f \in X^+$ et $f_\alpha \to f$ pour la topologie faible.

Faisons une remarque sur les espaces de dimension finie qui nous servira dans la démonstration du lemme suivant. Si nous envisageons un e.l.c. K^n de dimension finie (cf. 1.3), la famille d'ensembles de la forme

$$V_m = \{\{\xi_i\}_{i=1}^n \in K^n : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \leqslant m^{-1}\} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

est une base de voisinages de **0**. Il est alors évident qu'un ensemble E est borné dans K^n si et seulement si existe une constante $c > 0$ telle que $|\xi_i| \leqslant c$ pour tous les $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n \in E$ et $i = 1, 2, \ldots, n$. On rappelle que d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass les ensembles bornés dans K^n sont relativement compacts.

LEMME 5. *Soit* $\langle X, Y\rangle$ *un couple en dualité. Alors tout ensemble* $\sigma(X, Y)$*-borné* E *est totalement borné dans* $(X, \sigma(X, Y))$.

DÉMONSTRATION. Soient E un ensemble $\sigma(X, Y)$-borné, $U = \{x \in X : |f_i(x)| \leqslant 1, f_i \in Y, f_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$, un voisinage de **0** dans $(X, \sigma(X, Y))$. A chaque $x \in X$ associons l'élément $\omega(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ de K^n. Si $Q = V_1$, alors il est évident que $\omega^{-1}(Q) = U$.

Si $z \in \omega(X)$, alors $\omega^{-1}(z + Q) = x + U$, où pour x on peut prendre n'importe quel élément de $\omega^{-1}(z)$. L'ensemble E étant faiblement borné, l'ensemble $\tilde{E} = \omega(E)$ est borné dans K^n et par suite relativement compact. Le théorème de Hausdorff (ou ce qui revient au même le théorème 1.4) affirme alors l'existence de $z_1, \ldots, z_m \in \tilde{E}$ tels que $\tilde{E} \subset \bigcup_{k=1}^m (z_k + Q)$. Si maintenant on désigne par x_k les éléments de E tels que $\omega(x_k) = z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, on obtient en vertu de ce qui précède

$$E \subset \omega^{-1}(\tilde{E}) \subset \omega^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^m (z_k + Q)\Big) = \bigcup_{k=1}^m \omega^{-1}(z_k + Q) = \bigcup_{k=1}^m (x_k + U),$$

c.q.f.d.

THÉORÈME 7 (Alaoglu-Bourbaki). *Si* X *est un e.l.c., le polaire* U° *de chaque voisinage* U *de* **0** *est* $\sigma(X^*, X)$*-compact.*

DÉMONSTRATION. Soit sur X^+ la topologie $\sigma(X^+, X)$. Le voisinage U étant un ensemble absorbant dans X, le théorème 5 affirme que U° est borné dans X^+, donc totalement borné (lemme 5). X^+ est complet d'après le lemme 4 et U° est fermé d'après le lemme 3, donc U° est complet et d'après le théorème 1.4 compact. De toute évidence $U^\circ \subset X^*$, et les topologies $\sigma(X^+, X)$ et $\sigma(X^*, X)$ sont confondues sur X^*. Donc U° est $\sigma(X^*, X)$-compact.

Soit $\langle X, Y\rangle$ un couple en dualité. Désignons par $\tau(X, Y)$ la topologie de la convergence uniforme sur tous les ensembles absolument convexes $\sigma(Y, X)$-compacts dans Y. D'après ce qu'on a dit dans 3.3, l'espace $(X, \tau(X, Y))$ est un e.l.c. La topologie $\tau(X, Y)$ est appelée *topologie de Mackey*.

THÉORÈME 8 (Mackey-Arens). *Une topologie localement convexe* τ *sur* X *est compatible avec la dualité entre* X *et* Y (*c'est-à-dire* $(X, \tau)^* = Y$) *si et seulement si* $\sigma(X, Y) \leqslant \tau \leqslant \tau(X, Y)$, τ *étant une topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties absolument convexes* $\sigma(Y, X)$*-compactes dans* X.

DÉMONSTRATION. Si $(X, \tau)^* = Y$, alors τ est une topologie de la convergence uniforme sur une famille d'ensembles U°, où U sont tous les voisinages possibles de 0 pour la topologie τ. Chaque U° est absolument convexe et, d'après le théorème 7, $\sigma(Y, X)$-compact. D'où il suit que $\tau \leqslant \tau(X, Y)$. Comme $\sigma(X, Y)$ est la plus faible de toutes les topologies de la convergence uniforme (compatibles avec la dualité donnée), $\sigma(X, Y) \leqslant \tau$.

Il reste à vérifier que la topologie de Mackey $\tau(X, Y)$ est compatible avec la dualité entre X et Y. Désignons $(X, \tau(X, Y))^*$ par X^*. Il est évident que $X^* \supset Y$. Prouvons l'inclusion inverse. On observera que si E est compact dans $(Y, \sigma(Y, X))$, alors E est compact dans l'espace plus grand $(X^*, \sigma(X^*, X))$. Dans la suite du raisonnement les polaires des parties de X sont pris dans l'espace X^* et ceux de X^* dans X.

Soit une fonctionnelle $\varphi \in X^*$. L'ensemble $V = \varphi^{-1}(D)$, où $D = \{z \in \mathbb{K} : |z| \leqslant 1\}$ est un voisinage de 0 dans l'espace $(X, \tau(X, Y))$. Alors, par définition de la topologie de Mackey il existe un ensemble A absolument convexe $\sigma(Y, X)$-compact dans Y tel que $V \supset A^\circ$, d'où $V^\circ \subset A^{\circ\circ}$. Le théorème 4 nous dit que $A^{\circ\circ}$ est la $\sigma(X^*, X)$-adhérence de A. Or, A est $\sigma(Y, X)$-compact, donc comme on l'a déjà remarqué il est $\sigma(X^*, X)$-compact, d'où $A = A^{\circ\circ}$. Comme $\varphi \in V^\circ$ alors $\varphi \in A$ et *a fortiori* $\varphi \in Y$. Finalement $X^* = Y$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Le théorème de Mackey-Arens est en général le point de départ d'études plus subtiles de la théorie des e.l.c. liées avant tout aux notions d'e.l.c. bornologique et tonnelé et des e.l.c. réflexifs. Cependant nous arrêterons ici l'étude de la théorie générale des e.v.t. pour

nous tourner vers les espaces normés qui constituent la classe d'e.l.c. la plus importante pour les applications de l'analyse fonctionnelle dans le cadre de ce livre. En toute justice observons que de nombreuses applications de l'analyse fonctionnelle sont rattachées à l'étude d'e.l.c. qui ne sont pas normés. Il s'agit en premier lieu des espaces des distributions qui sont largement utilisées en physique mathématique (cf. Birman et d'autres; Guelfand et Vilenkine; Guelfand et Chilov; Rudin; Hörmander; Schwartz; Chilov [II]; Edwards).

CHAPITRE IV

ESPACES NORMÉS

§ 1. Définitions fondamentales et propriétés élémentaires des espaces normés *)

1.1. La théorie des espaces normés constitue de par ses innombrables applications la branche la plus importante de l'analyse fonctionnelle. Dans ce livre, on ne pourra de ce fait en toucher que certains aspects en mettant un accent particulier sur les applications à la résolution des équations fonctionnelles.

On rappelle qu'une norme sur un espace vectoriel X est une fonctionnelle positive $\|\cdot\|$ qui à chaque élément $x \in X$ associe le nombre $\| x \| \geqslant 0$, appelé *norme de l'élément* x **), vérifiant les conditions suivantes:

1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$;
2) $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$, $\lambda \in K$ (homogénéité de la norme);
3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (inégalité triangulaire).

On appelle *espace normé* un espace vectoriel X muni d'une norme. Si nous munissons X d'une topologie engendrée par cette norme (c'est-à-dire par une famille de semi-normes constituée d'une seule norme, cf. III.2.1.), alors X est un e.l.c. Cette topologie s'appelle *topologie de la norme* de l'espace X. Voyons maintenant comment se transforment certains notions et résultats de la théorie de l'e.l.c. pour ce cas particulier important.

1) Tout espace normé X est un e.l.c. métrisable.

En effet, si pour un couple quelconque $x, y \in X$ on pose

$$\rho (x, y) = \| x - y \|,$$

alors ρ est une métrique sur X. En effet, $\rho (x, y) = 0$ veut dire que $\| x - y \| = 0$, ce qui d'après 1) équivaut à $x - y = \mathbf{0}$, donc à $x = y$. La distance est symétrique par définition. Enfin, l'inégalité triangulaire pour la distance est une conséquence simple de l'inégalité triangulaire pour la norme:

$$\rho (x, y) = \| x - y \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| x - z \| + \| z - y \| = \rho (x, z) + \rho (z, y).$$

*) Les notions fondamentales de la théorie des espaces normés ont été introduites par Banach [1] (cf. également la monographie de Banach).

**) Si l'on étudie plusieurs espaces normés à la fois on fera figurer ces espaces en indice pour en distinguer les normes, par exemple $\| x \|_X$.

Il est évident que la topologie induite sur X par cette métrique est confondue avec la topologie de X comme e.l.c.

On dit qu'une suite $\{x_n\}$ converge vers x en norme si $\| x_n - x \| \to 0$. Il est clair que la convergence en norme est confondue avec la convergence pour la topologie de la norme.

2) Les boules fermées $B_{1/n} = \{x \in X: \| x \| \leqslant 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ forment une base de voisinages de 0 dans l'e.l.c. X.

3) $| \| x \| - \| y \| | \leqslant \| x - y \|$.

Cette propriété résulte de II.3.2 (c).

4) $\| x \|$ est une fonction continue en x, c'est-à-dire si $x_n \to x$, alors $\| x_n \| \to \| x \|$.

5) Un ensemble E est borné si et seulement si existe une constante M telle que $\| x \| \leqslant M$ pour tout $x \in E$.

Ceci est une conséquence de 2) et de la définition de l'ensemble borné (III.1.4).

6) Une suite convergente est bornée.

Ceci résulte de 4) et 5).

On appelle *normable* un e.v.t. dont la topologie peut être induite par une norme (telle que plus haut). Indiquons maintenant la place occupée par les espaces normés dans la classe des e.v.t.

THÉORÈME 1 (Kolmogorov). *Pour qu'un e.v.t. séparé* X *soit normable il faut et il suffit qu'existe dans* X *un voisinage convexe borné* V_0 *de* 0.

DÉMONSTRATION. Seule la condition suffisante a besoin d'être démontrée. On peut admettre que le voisinage V_0 est absolument convexe et fermé (sinon l'on considère l'intersection $(-\overline{V}_0) \cap \overline{V}_0$). Pour $x \in X$ posons

$$\| x \| = p_{V_0}(x),$$

où p_{V_0} est la fonctionnelle de Minkowski de V_0. Alors p_{V_0} possède toutes les propriétés d'une norme à l'exception peut-être de l'une d'elles: $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$. Montrons que cette propriété est également réalisée. En effet, si $x \neq 0$, l'espace X étant séparé, il existe un voisinage V de 0 ne contenant pas x. L'ensemble V_0 étant borné, on peut exhiber un $\lambda > 0$ tel que $V_0 \subset \lambda V$. Alors de toute évidence $\lambda x \notin V_0$, ce qui en vertu du lemme III.2.1 donne

$$\| x \| = p_{V_0}(x) = \frac{1}{\lambda} p_{V_0}(\lambda x) > \frac{1}{\lambda},$$

de sorte que $\| x \| \neq 0$.

Donc, X est muni d'une structure d'espace normé dans lequel (toujours en vertu du lemme III.2.1) V sera la boule unité fermée.

Montrons que la topologie initiale de X est confondue avec la topologie induite par la norme. A cet effet nous devons vérifier

que l'ensemble des boules, c'est-à-dire la famille des ensembles de la forme λV_0 ($\lambda > 0$) est un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie initiale. Ceci est une conséquence directe du fait que l'ensemble V_0 est borné, puisque pour tout voisinage V de 0 il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda V_0 \subset V$, c.q.f.d.

Le travail de A. Kolmogorov [1] qui contenait le théorème 1 fut l'un des premiers à considérer les e.v.t. abstraits.

1.2. Voyons des exemples d'espaces normés.

1) L'espace K^n (n fini). On peut définir une norme sur K^n de diverses manières (qui dans un certain sens sont toutes équivalentes). Par exemple si $x = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, alors

$$\| x \| = [\sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^2]^{1/2}.$$

Cette norme est dite *euclidienne*. On peut considérer également la norme $\| x \| = \max_{i=1}^{n} | \xi_i |$ ou $\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | \xi_i |$.

2) L'espace des fonctions continues $C(K)$ est normé par

$$\| x \| = \max_{t \in K} | x(t) |.$$

3) L'espace $l^\infty(T)$ des fonctions bornées sur un ensemble T est normé par

$$\| x \| = \sup_{x \in T} | x(t) |.$$

4) L'espace $C^{(l)}[a, b]$ des fonctions l fois continûment différentiables est normé par

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{l} \max_{t \in [a, b]} | x^{(k)}(t) |.$$

Signalons que les espaces $S(0, 1)$ et s ne sont pas normables. Pour cette raison nous les avons étudiés plus en détail dans les chapitres précédents. Nous exhiberons plus bas d'autres exemples d'espaces normés.

1.3. Soient X et Y des espaces normés. On dit qu'un opérateur linéaire U de X dans Y est une *isométrie linéaire* si pour tout $x \in X$ on a $\| U(x) \| = \| x \|$. Les espaces X et Y sont dits *linéairement isométriques* si existe une isométrie linéaire appliquant X sur Y. De toute évidence une telle isométrie U est une isométrie de X sur Y en tant qu'espaces métriques et un isomorphisme de X sur Y en tant qu'espaces vectoriels. Pour cela il suffit de s'assurer que si l'opérateur U est une isométrie, il est biunivoque. En effet, si $U(x) = U(y)$, alors $\| x - y \| = \| U(x - y) \| = \| U(x) - U(y) \| = 0$.

Dans la suite nous ne ferons pas de distinction entre les espaces linéairement isométriques. Nous dirons que des espaces normés X et Y sont *isomorphes* si X et Y sont isomorphes en tant qu'e.l.c., c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme linéaire de X sur Y. La notion d'isomorphie est essentiellement plus faible que celle d'isométrie.

On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel X sont *équivalentes* si existent des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que pour tout $x \in X$ l'on ait

$$k_1 \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant k_2 \| x \|_1.$$

Il est aisé de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ soient équivalentes est que l'application identique de X dans X soit un isomorphisme entre les espaces normés $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(X, \|\cdot\|_2)$.

Un ensemble linéaire d'un espace normé X est un espace normé par rapport à la norme induite sur lui. On appellera cette espace normé *sous-espace* de l'espace normé X.

1.4. Les espaces complets que l'on appelle *espaces de Banach* ou *B-espaces* jouent un rôle particulièrement important parmi les espaces normés.

En termes de norme la convergence en soi de la suite $\{x_n\}$ veut dire que $\| x_m - x_n \| \xrightarrow[m,\, n\to\infty]{} 0$. La condition de complétude de l'espace normé X devient donc: $\| x_m - x_n \| \xrightarrow[m,\, n\to\infty]{} 0$ entraîne l'existence d'un $x_0 \in X$, tel que $x_n \to x_0$.

De toute évidence les espaces K^n, $C(K)$, $C^{(l)}[a, b]$, $l^\infty(T)$ qui sont complets sont des B-espaces.

Si un espace normé X n'est pas complet, on peut le plonger dans un espace métrique complet $\hat{X}$ (théorème I.4.1). On peut étendre les opérations algébriques et la norme définies seulement sur X de façon unique à $\hat{X}$, le munissant ainsi d'une structure de B-espace.

Pour prouver ce fait on utilisera la remarque faite dans I.4.4, savoir qu'un espace X est dense dans sa complétion $\hat{X}$.

Soient $x, y \in \hat{X}$. Il existe des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ d'éléments de X convergeant vers x et y respectivement. L'opération d'addition étant définie dans l'espace X, l'égalité $z_n = x_n + y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a un sens. Comme

$$\| z_n - z_m \| \leqslant \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0,$$

la suite $\{z_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace X, donc dans l'espace $\hat{X}$. Il existe par suite un élément $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \hat{X}$. Posons par définition $x + y = z$. On s'assure sans peine que la

détermination de l'élément z ne dépend pas des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$. En effet, supposons que $x'_n \to x$, $y'_n \to y$ (x'_n, $y'_n \in X$; $n = 1, 2, \ldots$) et $z'_n = x'_n + y'_n$. Comme

$$\| z'_n - z_n \| \leqslant \| x'_n - x_n \| + \| y'_n - y_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

D'où il suit en particulier que la nouvelle définition de la somme pour les éléments de l'espace X nous conduit à la définition initiale. En effet, si $x, y \in X$, alors on peut poser $x_n = x$, $y_n = y$ ($n = 1, 2, \ldots$), de sorte que $z = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$, où le signe $+$ est compris dans le sens initial.

De façon analogue, on définit dans $\hat{X}$ le produit d'un élément par un nombre.

Si pour $x \in \hat{X}$ on pose

$$\| x \| = \rho(x, 0) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|$$

$$(x_n \to x;\ x_n \in X;\ n = 1, 2, \ldots),$$

on s'assure sans peine que $\hat{X}$ vérifie tous les axiomes de l'espace normé. Cette égalité entraîne l'unicité de la norme.

L'unicité de la somme et du produit par un nombre s'établit sans peine au moyen de la continuité de ces opérations. On laisse au lecteur le soin d'effectuer les démonstrations respectives peu compliquées.

Toutes les fois qu'on envisagera la *complétion* d'un espace normé on admettra qu'elle est linéarisée et normée de la manière indiquée plus haut.

1.5. Dans un espace normé, on peut considérer les séries infinies

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots x_n + \ldots \tag{1}$$

On dit que la série (1) est *convergente* si est convergente la suite $\{s_n\}$ de ses sommes partielles: $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. On appelle *somme* de la série (1) la limite de cette suite: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Dans un B-espace la convergence absolue d'une série entraîne la convergence ordinaire, c'est-à-dire si la série numérique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \ldots + \| x_n \| + \ldots \tag{2}$$

est convergente, la série (1) le sera également et de plus

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|.$$

En effet, si $m > n$, alors

$$s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m,$$

et par suite

$$\| s_m - s_n \| \leqslant \| x_{n+1} \| + \| x_{n+2} \| + \ldots + \| x_m \|.$$

La série (2) étant convergente, le second membre de cette inégalité est aussi petit que l'on veut pour n assez grand. Donc la suite $\{s_n\}$ est de Cauchy et par suite convergente, puisque l'espace est complet. En passant à la limite pour $n \to \infty$ dans l'inégalité

$$\| s_n \| = \| \sum_{k=1}^{n} x_k \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|,$$

et en utilisant la continuité de la norme, on obtient la majoration désirée.

1.6. Etudions plus en détails les espaces normés de dimension finie. Nous allons montrer que les e.l.c. de même dimension algébrique finie sont isomorphes et par suite isomorphes à l'espace $\mathbf{K}^n$ muni de la norme euclidienne.

LEMME 1. *Si* X *est un espace vectoriel de dimension finie et* Y *l'espace vectoriel total des fonctionnelles sur* X, *alors* Y *est confondu avec le dual algébrique* $\mathbf{X}^+$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_i\}_{i=1}^n$ une base algébrique dans X (cf. II.1.4). L'espace X pouvant être traité comme l'espace des fonctionnelles sur Y, le lemme III.3.1 affirme l'existence d'un système de fonctionnelles $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathbf{Y}$ biorthogonal à $\{x_i\}_{i=1}^n$ tel que

$$f_j(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les vecteurs f_i sont linéairement indépendants, puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ entraîne $\lambda_k = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i)(x_k) = 0$, $\forall k$, d'où il suit que l'espace Y est de dimension $\geqslant n$. Par ailleurs, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}^+$ et la dimension de $\mathbf{X}^+$ est égale à n. Alors Y est de dimension n et $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^+$ en vertu d'une propriété classique des sous-espaces d'un espace de dimension finie.

THÉORÈME 2. *Tous les e.l.c. (séparés) de même dimension algébrique finie sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que deux topologies localement convexes quelconques sont confondues sur un espace X de

dimension n. A cet effet, nous allons montrer que toute topologie τ localement convexe est confondue avec la topologie faible $\sigma(X, X^+)$.

D'après le lemme 1, on a $(X, \tau)^* = X^+$, d'où $\tau \geqslant \sigma(X, X^+)$. Prouvons l'inverse. Fixons une base $\{x_i\}_{i=1}^n$ dans X et considérons le système biorthogonal $\{f_i\}_{i=1}^n$ dans X^+. Alors $\{f_i\}_{i=1}^n$ est une base dans X^+ (voir démonstration du lemme 1). Si la suite généralisée $x_\alpha \to x$ $(\sigma(X, X^+))$ et

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i, \quad x_\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(\alpha)} x_i,$$

alors $\xi_i^{(\alpha)} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \xi$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. En effet, pour tout f_i on a

$$\xi_i^{(\alpha)} = f_i(x_\alpha) \underset{\alpha}{\longrightarrow} f_i(x) = \xi_i.$$

La τ-continuité des opérations algébriques entraîne que $x_\alpha \to x$ pour la topologie τ, d'où $\sigma(X, X^+) \geqslant \tau$, c.q.f.d.

L'espace K^n muni de la norme euclidienne étant un espace normé, il vient que tout e.l.c. de dimension finie est normable.

Identifions ensuite l'espace normé X de dimension finie et l'espace K^n. Soit $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (l'unité est au rang k). Si $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, alors

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k.$$

En appliquant le théorème 2 à l'espace K^n muni de la norme $\|x\| = \max_{i=1}^n |\xi_i|$, on obtient le

COROLLAIRE 1. 1) *Pour qu'une suite* $\{x_m\}$: $x_m = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(m)} e_k \in X$ *converge vers* $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in X$ *il faut et il suffit que pour* $k = 1, 2, \ldots, n$ *l'on ait la convergence en coordonnées*: $\xi_k^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi_k$.

2) *Un ensemble* E *est borné dans* X *si et seulement si existe une constante* $M > 0$ *telle que pour tout* $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in E$ *l'on ait*

$$|\xi_k| \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le corollaire 1 et le théorème de Bolzano-Weierstrass entraînent le

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un ensemble E soit relativement compact dans un espace normé* X *de dimension finie, il faut et il suffit qu'il soit borné.*

En effet, si $\{x_m\}$ est une suite bornée, en posant $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ on déduit du corollaire 1 que pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$, la suite numérique $\{\xi_j^{(m)}\}$ est bornée. Donc en vertu du théorème classique de Bolzano-Weierstrass il existe une suite d'entiers naturels $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ telle que

$$\xi_j^{(m_k)} \xrightarrow[k]{} \xi_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, \ldots n).$$

Le corollaire 1 entraîne que $x_{m_k} \to x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)})$.

COROLLAIRE 3. *Un espace normé* X *de dimension finie est complet.*

En effet, si $\{x_m\}$ est une suite de Cauchy, elle est bornée et d'après le corollaire précédent on peut en extraire une suite partielle $\{x_{m_k}\}$ convergeant vers un élément $x_0 \in X$. Alors, d'après le lemme I.4.1, on a $x_m \to x_0$.

COROLLAIRE 4. *Tout sous-espace vectoriel* X_0 *de dimension finie d'un espace normé* X *est fermé.*

COROLLAIRE 5. *Soient* X *un espace normé et* X_0 *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* X. *Pour tout élément* $x \in X$, *il existe dans* X_0 *un élément* x_0, *distance de* x *à* X_0, *c'est-à-dire tel que* $\| x - x_0 \| = \rho(x, X_0)$.

En effet, pour chaque $m = 1, 2, \ldots$ il existe dans X_0 un élément x_m pour lequel $\| x - x_m \| < \rho(x, X_0) + 1/m$. La suite $\{x_m\}$ est visiblement bornée, puisque

$$\| x_m \| \leqslant \| x \| + \| x - x_m \| < \| x \| + \rho(x, X_0) + 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

donc, en vertu du corollaire 2, on peut en extraire une suite partielle convergente $\{x_{m_k}\}$: $x_{m_k} \to x_0$.

De toute évidence $\| x - x_0 \| \leqslant \rho(x, X_0)$. L'inégalité inverse découle du fait que $x_0 \in X_0$.

Appliquons le résultat obtenu à l'espace $C[a, b]$ et à son sous-espace P^n de tous les polynômes algébriques de degré $\leqslant n$ (n fini). En vertu du corollaire 5, pour toute fonction continue x il existe un polynôme x_0 de P^n tel que

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} | x(t) - x_0(t) | = \| x - x_0 \| = \rho(x, P^n),$$

c'est-à-dire un polynôme qui approche la fonction x mieux que tous les autres polynômes de degré $\leqslant n$.

1.7. En conclusion, montrons que le résultat exprimé par le corollaire 2 du théorème 2 admet une réciproque, c'est-à-dire qu'un ensemble borné est relativement compact dans un espace normé, si seulement cet espace est de dimension finie *).

Montrons préalablement un lemme important.

LEMME 2. *Soient* X *un espace normé*, $X_0 \neq X$ *un sous-espace vectoriel fermé de* X. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un élément normé* x_0 **) *tel que*

$$\rho(x_0, X_0) > 1 - \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION. L'espace X_0 étant fermé et ne coïncidant pas avec X, il existe un élément $\bar{x} \in X$, tel que $\rho(\bar{x}, X_0) = d > 0$. D'autre part, il existe dans X_0 un élément x' tel que

$$\| \bar{x} - x' \| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Posons

$$x_0 = \frac{\bar{x} - x'}{\| \bar{x} - x' \|} = \alpha(\bar{x} - x') \quad \left(\alpha = \frac{1}{\| \bar{x} - x' \|} > \frac{1-\varepsilon}{d}\right).$$

Il est clair que $\| x_0 \| = 1$. De plus si $x \in X_0$, alors

$$\| x_0 - x \| = \| \alpha\bar{x} - \alpha x' - x \| = \alpha \left\| \bar{x} - \left(x' + \frac{x}{\alpha}\right) \right\| \geqslant \alpha d > \frac{1-\varepsilon}{d} d =$$
$$= 1 - \varepsilon.$$

REMARQUE. Un élément normé x_0 tel que $\rho(x_0, X_0) = 1$ est dans un certain sens perpendiculaire à X_0 (ainsi, dans un espace euclidien, un vecteur x_0 vérifiant cette condition sera effectivement orthogonal à X_0). On appellera donc le lemme prouvé *lemme de la quasi-perpendiculaire.*

THÉORÈME 3. *Pour qu'un ensemble borné soit relativement compact dans un espace normé* X, *il faut et il suffit que* X *soit de dimension finie.*

La *condition suffisante* a déjà été établie (corollaire 2 du théorème 1).

Condition nécessaire. Considérons un élément normé $x_1 \in X$ et désignons par X_1 l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}(\{x_1\})$ de cet élément, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme λx_1.

---

*) Ce fait a été établi par F. Riesz.

**) C'est-à-dire un élément de norme 1.

En supposant que X est de dimension infinie, on aura $X_1 \neq X$. D'après le lemme de la quasi-perpendiculaire, trouvons un élément normé $x_2 \in X$ tel que $\rho(x_2, X_1) > 1/2$. Formons l'enveloppe linéaire des éléments x_1 et x_2 et désignons-la par X_2. En poursuivant cette procédure on arrive à la suite d'éléments $\{x_n\}$ et de sous-espaces $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$, tels que

$$\| x_n \| = 1, \quad X_n = \mathcal{L}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}).$$
$$\rho(x_{n+1}, X_n) > 1/2 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

La suite $\{x_n\}$ étant bornée, on peut en extraire une suite partielle convergente. Mais en vertu de (3)

$$\| x_n - x_m \| > 1/2 \quad (n > m;\ m, n = 1, 2, \ldots),$$

donc ni la suite $\{x_n\}$ ni aucune de ses suites partielles ne sont convergentes. Le théorème est démontré.

COROLLAIRE. *Un e.l.c.* X *est de dimension finie si et seulement s'il contient un voisinage totalement borné de* 0.

DÉMONSTRATION. Si X est de dimension finie, en vertu du théorème 2, il est normé, et alors d'après le théorème 3 l'adhérence de la boule unité de X est compacte.

Inversement, si V_0 est un voisinage totalement borné de 0, alors l'espace X est normable d'après le théorème 1. Comme il existe $\lambda > 0$ pour lequel la boule unité $B_X = \{x \in X : \| x \| \leqslant 1\} \subset \lambda V_0$, l'ensemble B_X est totalement borné, donc tout ensemble borné est totalement borné. En reprenant intégralement la démonstration du théorème 3 on établit facilement que X est de dimension finie.

1.8. En conclusion de ce paragraphe nous allons introduire une série de notions importantes de la théorie des espaces normés.

Soient X_1 et X_2 des espaces normés. Munissons leur produit direct $Z = X_1 \times X_2$ de la norme suivante : si $z = (x_1, x_2)$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, alors

$$\| z \| = \max(\| x_1 \|, \| x_2 \|).$$

L'espace normé Z est évidemment complet si X_1 et X_2 sont des B-espaces.

Soient X un espace normé, X_0 un sous-espace fermé de X. Considérons l'espace quotient X/X_0 (II.1.6). Notons que X_0 étant fermé, la classe $\bar{x} = x + X_0$ est aussi un ensemble fermé dans X.

Si pour $\bar{x} \in X/X_0$ l'on pose

$$\| \bar{x} \| = \inf_{x \in \bar{x}} \| x \|,$$

alors X/X_0 est un espace normé. En effet, si $\bar{x} = 0$, pour $x \in \bar{x}$ on peut prendre l'élément nul de l'espace X et par conséquent $\| \bar{x} \| = 0$.

Inversement, si $\|\bar{x}\| = 0$, par définition de $\|x\|$ il existe une suite $\{x_n\} \subset \bar{x}$ telle que $x_n \to 0$. La classe $\bar{x}$ étant un ensemble fermé, elle contient $\{x_n\}$ avec sa limite, c'est-à-dire $0 \in \bar{x}$ donc $\bar{x}$ est l'élément nul de X/X_0.

On vérifie sans peine que la norme est homogène. Traitons le cas $\lambda \neq 0$. On a

$$|\lambda| \, \|\bar{x}\| = |\lambda| \inf_{x \in \bar{x}} \|x\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\|.$$

Lorsque x parcourt la classe $\bar{x}$, l'élément λx parcourt la classe $\lambda\bar{x}$, d'où il suit que

$$\inf_{x \in \bar{x}} \|\lambda x\| = \inf_{z \in \lambda\bar{x}} \|z\| = \|\lambda\bar{x}\|.$$

Démontrons enfin l'inégalité triangulaire. Quels que soient $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ ($\bar{x}$, $\bar{y} \in X/X_0$), on a $x + y \in \bar{x} + \bar{y}$, donc

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

L'inégalité cherchée s'obtient par passage aux bornes inférieures au second membre.

En associant à chaque élément $x \in X$ la classe $\bar{x} = x + X_0 = \varphi(x)$ qui le contient, on obtient une application φ appelée *homomorphisme naturel* (ou *homomorphisme canonique*) de l'espace X sur l'espace quotient X/X_0. Il est évident que l'opérateur φ est linéaire. Comme

$$\|\varphi(x_0)\| = \inf_{x \in \varphi(x_0)} \|x\| \leqslant \|x_0\| \quad (x_0 \in X),$$

l'opérateur φ est continu. D'autre part, pour tout $\bar{x} \in X/X_0$, il existe un $x \in X$ tel que

$$\bar{x} = \varphi(x), \quad \|\bar{x}\| \geqslant \frac{1}{2} \|x\|. \tag{4}$$

Utilisons la propriété indiquée pour prouver que si l'espace X est complet, X/X_0 le sera également. Soit en effet $\{\bar{x}_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de l'espace X/X_0. Quitte à raréfier cette suite, on peut faire en sorte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\|$ soit convergente. En vertu de (4), trouvons un élément $x_n \in X$ tel que

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = \varphi(x_n), \quad \|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n\| \geqslant \frac{1}{2} \|x_n\|$$

$$(n = 0, 1, \ldots, \bar{x}_0 = 0).$$

Il est clair que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ est convergente. Donc, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ l'est aussi en vertu de la complétude de l'espace X. En notant cette somme x et en posant $\bar{x} = \varphi(x)$, on trouve

$$\bar{x} = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n,$$

c'est-à-dire la suite $\{\bar{x}_n\}$ converge vers $\bar{x}$.

1.9. Un opérateur linéaire continu P d'un espace normé X dans un sous-espace fermé $Y \subset X$ est appelé *projecteur* (de X sur Y) s'il laisse invariants les éléments de Y, c'est-à-dire $P(y) = y$ pour tout $y \in Y$.

On dit qu'un sous-espace fermé Y d'un B-espace X est *complémentable* dans X si existe un projecteur P de X sur Y. Il vient immédiatement que $X/Y = P^{-1}(0)$ *). Le problème de l'existence d'un projecteur sur un sous-espace sera étudié plus loin (voir V.3.5).

§ 2. Inégalités auxiliaires

Dans ce paragraphe, on se propose d'établir quelques inégalités qui seront appliquées à l'étude d'exemples concrets de B-espaces (voir § 3). Pour la bibliographie relative au sujet traité dans ce paragraphe, voir Hardy, Littlewood, Polya.

2.1. Nous commençons par démontrer un lemme.

LEMME 1. *Soient p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

Quels que soient a et b on a

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. On peut considérer que a et b sont strictement positifs. Posons $m = 1/p$ (alors $0 < m < 1$) et considérons la fonction

$$\varphi(t) = t^m - mt \quad (t > 0).$$

Vu que $\varphi'(t) = m(t^{m-1} - 1)$, alors $\varphi(t)$ présente son maximum pour $t = 1$. Donc $\varphi(t) \leqslant \varphi(1)$ $(t > 0)$, d'où $t^m - 1 \leqslant m(t-1)$. En posant $t = a^p/b^q$ dans la dernière inégalité, on obtient

$$ab^{-q/p} - 1 \leqslant (1/p)(a^p b^{-q} - 1),$$

*) L'égalité exprime l'isomorphisme des B-espaces.

d'où l'on déduit (2) en multipliant les deux membres par b^q et en tenant compte de ce que $q - q/p = 1$.

2.2. Inégalité de Hölder. Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ et $\eta_1, \eta_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n$ des nombres quelconques. On a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right\}^{1/q}$$

(où p et q sont reliés par la relation (1)).

Démonstration. Posons

$$A^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \quad \text{et} \quad B^q = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q.$$

On peut admettre que $A, B > 0$. Soient $\xi'_k = \xi_k/A$, $\eta'_k = \eta_k/B$. Alors, en vertu de l'inégalité (2)

$$|\xi'_k \eta'_k| \leqslant \frac{|\xi'_k|^p}{p} + \frac{|\eta'_k|^q}{q}$$

ou en sommant

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi'_k \eta'_k| \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} |\xi'_k|^p}{p} + \frac{\sum_{k=1}^{n} |\eta'_k|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k| \leqslant AB,$$

c.q.f.d.

Remarque. L'inégalité de Hölder est valable dans le cas où les termes sont en nombre infini (dénombrable), c'est-à-dire on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q\right]^{1/q}, \tag{3}$$

la convergence des séries du second membre entraînant celle de la série du premier.

En effet, cette inégalité est prouvée pour les sommes partielles des séries de (3). Le passage à la limite nous conduit à (3).

2.3. Inégalité intégrale de Hölder. Soient $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions mesurables sur un espace mesuré (T, Σ, μ). On a l'inégalité

$$\int_T |x(t)\, y(t)|\, d\mu \leqslant \left[\int_T |(x(t)|^p\, d\mu\right]^{1/p} \left[\int_T |y(t)|^q\, d\mu\right]^{1/q}$$

(p et q sont toujours reliés par la relation (1)).

DÉMONSTRATION. C'est en fait une répétition de la démonstration de l'inégalité de Hölder pour les sommes. Plus exactement, on peut admettre que

$$0 < A^p = \int |x(t)|^p d\mu < \infty, \quad 0 < B^q = \int_T |y(t)|^q d\mu < \infty,$$

puisque si l'une de ces intégrales était nulle ou infinie, l'inégalité à démontrer serait triviale.

Posons $\tilde{x}(t) = x(t)/A$ et $\bar{y}(t) = y(t)/B$. Pour chaque $t \in T$, en vertu de (1), on obtient l'inégalité

$$|\tilde{x}(t)\bar{y}(t)| \leqslant \frac{|\tilde{x}(t)|^p}{p} + \frac{|\bar{y}(t)|^q}{q}.$$

dont l'intégration donne

$$\int_T |\tilde{x}(t)\bar{y}(t)|\, d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_T |\tilde{x}(t)|^p d\mu +$$

$$+\frac{1}{q}\int_T |\bar{y}(t)|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

d'où

$$\int_T |x(t)y(t)|\, d\mu \leqslant AB,$$

c.q.f.d.

On observera, tout comme dans le cas de l'inégalité pour les sommes, que la finitude des intégrales du second membre entraîne celle de l'intégrale du premier.

REMARQUE. Si $p = 2$ (alors $q = 2$ aussi) les inégalités de Hölder se spécialisent en les inégalités classiques de Cauchy et de Bouniakovski pour les sommes et les intégrales

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leqslant \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2\Big]^{1/2},$$

$$\int_T |x(t)y(t)|\, d\mu \leqslant \Big[\int_T |x(t)|^2 d\mu\Big]^{1/2} \Big[\int_T |y(t)|^2 d\mu\Big]^{1/2}.$$

2.4. INÉGALITÉ GÉNÉRALISÉE DE HÖLDER. Soient des nombres strictement positifs p, q, r liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Alors quelles que soient les fonctions mesurables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, définies sur un ensemble T, on a l'inégalité

$$\int_T |x(t)\,y(t)\,z(t)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right]^{1/p} \left[\int_T |y(t)|^q\,d\mu\right]^{1/q} \left[\int_T |z(t)|^r\,d\mu\right]^{1/r}.$$

Démonstration. Définissons p' à partir de $\frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Alors puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_T |x(t)\,y(t)\,z(t)|\,d\mu \leqslant \left[\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right]^{1/p} \left[\int_T |y(t)\,z(t)|^{p'}\,d\mu\right]^{1/p'}. \tag{4}$$

Appliquons de nouveau l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{q}{p'}$ et $\frac{r}{p'}$ $\left(\frac{p'}{q} + \frac{p'}{r} = 1\right)$ à la deuxième intégrale. On obtient

$$\int_T |y(t)\,z(t)|^{p'}\,d\mu \leqslant \left\{\int_T |y(t)|^{p'\frac{q}{p'}}\,d\mu\right\}^{\frac{p'}{q}} \left\{\int_T |z(t)|^{p'\frac{r}{p'}}\,d\mu\right\}^{\frac{p'}{r}}.$$

En portant cette expression dans (4) on obtient l'inégalité désirée.

Remarque. L'inégalité généralisée de Hölder est valable bien entendu pour les sommes.

On laisse au lecteur le soin de déduire une inégalité semblable à celle qui vient d'être prouvée et contenant une intégrale d'un produit de n fonctions au premier membre.

2.5. Inégalité de Minkowski. Soient $\{\xi_k\}$ et $\{\eta_k\}$ des suites de nombres. On a l'inégalité

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right]^{1/p} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right]^{1/p} \qquad (p \geqslant 1).$$

Démonstration. De toute évidence, on peut se limiter au cas où $p > 1$ et tous les ξ_k et η_k sont positifs. D'autre part on peut admettre que les sommes figurant dans l'inégalité possèdent un nombre fini de termes (le passage aux séries s'obtient par un passage à la limite). Sous ces hypothèses, on a

$$\sum_{k=1}^{n} [\xi_k + \eta_k]^p = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\,[\xi_k + \eta_k]^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k\,[\xi_k + \eta_k]^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chaque somme du second membre, on obtient $(1/p + 1/q = 1)$

$$\sum_{k=1}^{n} [\xi_k + \eta_k]^p \leqslant [\sum_{k=1}^{n} \xi_k^p]^{1/p} [\sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)}]^{1/q} + \\ + [\sum_{k=1}^{n} \eta_k^p]^{1/p} [\sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k)^{q(p-1)}]^{1/q}.$$

Or $1/p + 1/q = 1$ entraîne $q(p-1) = p$; donc en multipliant les deux membres de la dernière inégalité par $[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k)^p]^{-1/q}$ on est conduit à l'inégalité

$$[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k + \eta_k)^p]^{1-1/q} \leqslant [\sum_{k=1}^{n} \xi_k^p]^{1/p} + [\sum_{k=1}^{n} \eta_k^p]^{1/p}.$$

Comme $1 - 1/q = 1/p$, ceci n'est autre que l'inégalité à démontrer.

2.6. Inégalité intégrale de Minkowski. Soient $x(t)$ et $y(t)$ des fonctions mesurables sur un ensemble T. On a l'inégalité

$$\left[\int_T |x(t) + y(t)|^p d\mu\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_T |x(t)|^p d\mu\right]^{1/p} + \\ + \left[\int_T |y(t)|^p d\mu\right]^{1/p} \qquad (p \geqslant 1).$$

Démonstration. Si l'une des intégrales du second membre est infinie, cette inégalité est évidente. Si l'intégrale du premier membre est infinie, la majoration

$$\int_T |x(t) + y(t)|^p d\mu \leqslant \int_T (|x(t)| + |y(t)|)^p d\mu \leqslant \\ \leqslant 2^{p/q} \left(\int_T |x(t)|^p d\mu + \int_T |y(t)|^p d\mu\right),$$

qui découle de l'inégalité numérique

$$(|a| + |b|) \leqslant (|a|^p + |b|^p)^{1/p} (1^q + 1^q)^{1/q} = 2^{1/q} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} \\ \text{(voir 2.2)},$$

entraîne qu'une intégrale au moins du second membre est infinie. On peut donc admettre que toutes les intégrales sont finies et effectuer alors la démonstration d'après le schéma de 2.5.

Signalons que les inégalités de Hölder et de Minkowski pour les suites sont des cas particuliers des inégalités intégrales correspondantes. Pour s'en assurer, il suffit de prendre pour (T, Σ, μ) la série des entiers naturels $\mathbb{N}$, la mesure de chaque point étant égale à l'unité.

§ 3. Espaces normés de fonctions mesurables et de suites

3.1. Dans ce paragraphe, nous étudions des espaces dont les éléments sont des fonctions mesurables, c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de l'espace $S(T, \Sigma, \mu)$. De plus nous identifions les fonctions équivalentes comme dans $S(T, \Sigma, \mu)$. Les opérations algébriques sont définies de façon naturelle sur ces espaces. En particulier l'élément nul est une fonction équivalente à zéro. Nous examinons d'abord la théorie générale de ces espaces et ensuite nous considérons des exemples concrets.

Soient (T, Σ, μ) un espace de mesure σ-finie, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables réelles ou complexes sur (T, Σ, μ). Pour les fonctions réelles $x, y \in S$, la notation $x \geqslant y$ signifie que $x(t) \geqslant y(t)$ p.p. Nous définissons le *support* de tout élément $x \in S$ par:

$$\operatorname{supp} x = \{t \in T : x(t) \neq 0\}.$$

Il est clair que le support d'une fonction est défini à un ensemble de mesure nulle près. Pour un ensemble $E \subset S$ on ne peut définir le support de E comme la réunion des supports de toutes les fonctions de E, puisque dans ce cas on ne peut en garantir ni l'unicité à un ensemble de mesure nulle près, ni même la mesurabilité. On procède donc de la manière suivante. Pour toute partie $E \subset S$, le support de E est un ensemble, noté $\operatorname{supp} E \in \Sigma$, possédant les propriétés suivantes:

1) $\operatorname{supp} x \subset \operatorname{supp} E$ (mod. μ), pour tout $x \in E$;

2) si une partie $A \in \Sigma$ est telle que $\operatorname{supp} x \subset A$ (mod. μ) pour tout $x \in E$, alors $\operatorname{supp} E \subset A$ (mod. μ).

Etant donné que 2) entraîne l'unicité du support à un ensemble de mesure nulle près, pour justifier la définition donnée, il faut montrer que l'ensemble $\operatorname{supp} E$ vérifiant 1) et 2) existe bien. Le théorème I.6.17 affirme l'existence de $x_0 = \sup\{\chi_A : A = \operatorname{supp} x,\ x \in E\}$. Si l'on pose $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} x_0$, il est évident que cet ensemble est l'ensemble cherché.

Posons $|x|(t) = |x(t)|$ pour toute fonction $x \in S$.

Si $x, y \in S$ sont des fonctions réelles, leur suprémum et leur infimum sont respectivement définis par

$$(\sup(x, y))(t) = \max(x(t), y(t)), \quad (\inf(x, y))(t) = \min(x(t), y(t)).$$

Posons également

$$x_+ = \sup(x, 0), \quad x_- = \sup(-x, 0),$$

pour une fonction réelle x.

Alors $|x| = x_+ + x_-$ et $x = x_+ - x_-$. Si x est une fonction complexe, alors $x(t) = \operatorname{Re} x(t) + i \operatorname{Im} x(t)$. Ces égalités permettent très souvent de ramener le cas étudié au cas de fonctions positives. Posons

$$X_+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}.$$

On dit que des éléments $x, y \in S$ sont *étrangers* si $\sup(|x|, |y|) = 0$. La notation $x_n \downarrow$ signifie que $x_m \geqslant x_n$ pour $n \geqslant m$; $x_n \downarrow x$ que $x_n \downarrow$ et $x_n(t) \to x(t)$ p.p. On définit $x_n \uparrow$ et $x_n \uparrow x$ de façon analogue.

On appelle *espace idéal* (en abrégé e.i.) sur (T, Σ, μ) un sous-espace vectoriel X de S tel que

$$x \in X, \quad y \in S, \quad |y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in X.$$

On appelle *espace fondamental* (en abrégé e.f.) *sur* (T, Σ, μ) un e.i. X tel que $\operatorname{supp} X = T$. Il est évident que tout e.i. X peut être traîté comme un e.f. sur supp X.

LEMME 1. *Si* X *est un e.f. sur* (T, Σ, μ), *alors pour toute fonction positive* $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ *il existe une suite* $x_n \uparrow x$, $0 \leqslant x_n \in X$.

DÉMONSTRATION. Soit l'ensemble $E = \{y \in X_+ : y \leqslant x\}$. D'après le théorème I.6.17 il existe $\tilde{y} = \sup E$ et de plus on peut exhiber un ensemble dénombrable $\{y_n\} \subset E$ tel que $\tilde{y}(t) = \sup y_n(t)$ p.p. Montrons que $\tilde{y} = x$. Il est évident que $\tilde{y} \leqslant x$. Considérons la fonction $z = x - \tilde{y} \geqslant 0$ et l'ensemble $A = \{t : z(t) > 0\}$. Supposons que $\mu(A) > 0$. Il existe alors une fonction positive $y_0 \in X$ pour laquelle $\mu(\operatorname{supp} y_0 \cap A) > 0$. Donc la fonction $\tilde{y}_0 = \sup(y_0\chi_A, z) > 0$ et $\tilde{y}_0 \in X$, puisque $0 \leqslant \tilde{y}_0 \leqslant y_0$. Donc $\tilde{y} + \tilde{y}_0 > \tilde{y} = \sup E$, or d'autre part $\tilde{y} + \tilde{y}_0 \in X$ et $\tilde{y} + \tilde{y}_0 \leqslant (x - z) + z = x$, ce qui est absurde. Donc $x = \tilde{y} = \sup E = \sup y_n$. Posons $x_n = \sup(\ldots(\sup(y_1, y_2), \ldots), y_n)$. De toute évidence $x_n \in X$ et $0 \leqslant x_n \uparrow x$.

COROLLAIRE 1. *Si* X *est un e.f. sur* (T, Σ, μ), *alors pour toute fonction positive* $x \in S(T, \Sigma, \mu)$ *il existe une suite croissante d'ensembles* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ *telle que* $x\chi_{B_n} \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ *et* $x\chi_{B_n} \uparrow x$.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 1, il existe une suite $x_n \uparrow x$, $x_n \in X$ Posons

$$B_n = \{t \in T : 2x_n(t) \geqslant x(t)\}.$$

De $x_n \uparrow x$ il suit que $x\chi_{B_n} \uparrow x$ et de $x\chi_{B_n} \leqslant 2x_n \in \mathrm{X}$ que $x\chi_{B_n} \in \mathrm{X}$.

COROLLAIRE 2. *Si* X *est un e.f. sur* (T, Σ, μ), *il existe une partition* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de l'ensemble* T *telle que* $A_n \in \Sigma(\mu)$ *et* $\chi_{A_n} \in \mathrm{X}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION. Il suffit dans le corollaire 1 de prendre pour x la fonction 1 qui est identiquement égale à l'unité sur T, de poser $A'_1 = B_1$, $A'_n = B_n \setminus B_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ et de partitionner ensuite chaque ensemble A'_n en ensembles de mesure finie.

On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur un e.i. X est *monotone* si $|x| \leqslant |y|$ $(x, y \in \mathrm{X})$ entraîne $\|x\| \leqslant \|y\|$.

On appelle *espace idéal normé* (en abrégé e.i.n.) *sur* (T, Σ, μ) un e.i. muni d'une norme monotone. Un e.i.n. qui est e.f. s'appelle *espace fondamental normé* (en abrégé e.f.n.). Enfin on appelle *espace idéal de Banach* (en abrégé e.i. de Banach) un e.i.n. complet pour la norme, et *espace fondamental de Banach* (en abrégé e.f. de Banach) un e.f.n. complet pour la norme.

Déduisons les corollaires élémentaires de la monotonie de la norme dans un e.i.n. X. Supposons que $x_n \to x$ en norme dans X. On a alors les propositions suivantes (dans lesquelles la convergence est une convergence en norme dans X).

1) $|x_n - x| \to 0$.

2) Si $y_n \to y$, alors $\sup(x_n, y_n) \to \sup(x, y)$ et $\inf(x_n, y_n) \to \inf(x, y)$.

3) $(x_n)_+ \to x_+$, $(x_n)_- \to x_-$, $|x_n| \to |x|$.

4) Si $x_n \geqslant y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $y_n \to y$, alors $x \geqslant y$.

5) Si $A \in \Sigma$, alors $x_n\chi_A \to x\chi_A$.

La proposition 1) est évidente ; 2) découle de l'inégalité $|\sup(x_n, y_n) - \sup(x, y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$ et de l'égalité $\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$; 3) est une conséquence immédiate de 2) ; 4) résulte aussi de 2) : en effet, d'une part $\sup(x_n, y_n) \to \sup(x, y)$, de l'autre $\sup(x_n, y_n) = x_n \to x$. Donc, $\sup(x, y) = x$, d'où $x \geqslant y$. Enfin 5) découle de l'inégalité $|x_n\chi_A - x\chi_A| \leqslant |x_n - x|$.

Nous énonçons quelques théorèmes relatifs aux classes d'espaces introduits.

THÉORÈME 1. *Soit* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un e.i.n. sur* (T, Σ, μ).

1) *Si* $x_n, x \in \mathrm{X}$ *et* $\|x_n - x\| \to 0$, *alors* $x_n \to x$ (μ).

2) *Si* $\{x_n\} \subset \mathrm{X}$ *est une suite de Cauchy, elle converge en mesure vers un* $x \in \mathrm{S}$.

DÉMONSTRATION. 1) En vertu du corollaire 2 du lemme 1, il existe une partition $\{A_p\}_{p=1}^{\infty}$ de l'ensemble supp X, telle que $A_p \in \Sigma(\mu)$, $\chi_{A_p} \in \mathrm{X}$ $(p \in \mathbb{N})$. Supposons que $x_n \not\to x$ (μ). Alors, en vertu de la remarque suivant la définition de la propriété de somme directe (cf. I.6.10), on a $x_n \not\to x$ (μ) sur un A_p. D'après la propriété

5) de convergence en norme dans un e.i.n., on peut admettre que la fonction 1, qui est identiquement égale à l'unité sur T, appartient à X et $\mu(T) < \infty$.

En passant au besoin à une suite partielle, on peut admettre aussi qu'il existe des nombres ε, $\delta > 0$, tels que

$$\mu(\{t \in T : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \delta. \tag{1}$$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon/2^n. \tag{2}$$

Posons

$$B_n = \{t \in T : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\},$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n+1}^{\infty} B_m. \tag{3}$$

En vertu de (1) on a

$$\mu(B_n) \geqslant \delta \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \mu(B) \geqslant \delta. \tag{4}$$

En vertu de (2) et compte tenu de $\varepsilon\chi_{B_n} \leqslant |x_n - x|$, on obtient

$$\|\chi_{B_n}\| < 1/2^n. \tag{5}$$

Soient les ensembles

$$C_{ns} = \bigcup_{m=n+1}^{n+s} (B_m \cap B).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\{C_{ns}\}_{s=1}^{\infty}$ est croissante et en vertu de (3)

$$B = \bigcup_{s=1}^{\infty} C_{ns}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, existe un indice s_n tel que

$$\mu(B \setminus C_{ns_n}) < 1/2^{n+1}. \tag{6}$$

Posons

$$D_n = \bigcap_{m=n+1}^{\infty} C_{ms_m}.$$

Il est évident que la suite $\{D_n\}$ est croissante, et du fait que

$$B \setminus \bigcap_{m=n+1}^{\infty} C_{ms_m} = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B \setminus C_{ms_m})$$

on déduit, en vertu de (6),

$$\mu(B \setminus D_n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B \setminus C_{ms_m}) < 1/2^n.$$

Donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = B$ (mod. μ). D'après (5), pour $m > n$ on a

$$\|\chi_{D_n}\| \leqslant \|\chi_{C_{ms_m}}\| \leqslant \Big\|\sum_{k=m+1}^{m+s_m} \chi_{B_k}\Big\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{m+s_m} \|\chi_{B_k}\| < 1/2^m,$$

d'où $\chi_{D_n} = 0$, c'est-à-dire $\mu(D_n) = 0$. Donc $\mu(B) = 0$, ce qui contredit (4).

2) L'espace S (T, Σ, μ) étant complet (théorème I.6.15), il suffit de démontrer que si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X, elle est également suite de Cauchy dans S (T, Σ, μ). Supposons le contraire. Alors si ρ est une métrique dans S, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut exhiber m_n et k_n $(m_n, k_n > n)$ tels que $\rho(x_{m_n}, x_{k_n}) \geqslant \varepsilon$. Alors $m_n, k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et $\|x_{m_n} - x_{k_n}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où, en vertu de 1) $\rho(x_{m_n}, x_{k_n}) \to 0$, ce qui est absurde.

Corollaire. *Tout ensemble E borné en norme dans un e.i.n.* X *est borné dans l'e.v.t.* S.

Démonstration. D'après le théorème 1, l'immersion identique de X dans S est continue, or toute application continue envoie des ensembles bornés dans des bornés.

Lemme 2. *Soit* X *un e.i. de Banach. Si une suite $x_n \to x$ en norme dans* X, *il existe une suite partielle $\{x_{n_k}\}$, une fonction $r \in X_+$ et une suite de nombres $\varepsilon_{n_k} \downarrow 0$, telles que $|x_{n_k} - x| \leqslant \varepsilon_{n_k} r$.*

Démonstration. Choisissons une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ telle que $\|x - x_{n_k}\| < 1/2^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|k(x - x_{n_k})\| < \sum_{k=1}^{\infty} k/2^k < \infty, \tag{7}$$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|x - x_{n_k}|$ est convergente en norme dans le B-espace X (cf. 1.5). Posons

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} k\,|x - x_{n_k}| \in X, \quad \varepsilon_{n_k} = 1/k.$$

La propriété 4) de convergence en norme dans un e.i.n. donne $k\,|x - x_{n_k}| < r$ $(k \in \mathbb{N})$, d'où $|x_{n_k} - x| \leqslant \varepsilon_{n_k} r$.

A noter que si X est un e.i. de Banach, le lemme 1 nous fournit une démonstration plus simple du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Deux normes monotones quelconques* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *définies sur un e.i.* X *et munissant* X *d'une structure de e.i. de Banach sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. On a vu au 1.3 qu'il suffit de montrer que l'opérateur identique de $(X, \|\cdot\|_1)$ dans $(X, \|\cdot\|_2)$ est un isomorphisme, c'est-à-dire il suffit de montrer par exemple que $\|x_n\|_1 \to 0$ entraîne $\|x_n\|_2 \to 0$. Supposons que $\|x_n\|_2 \not\to 0$. En passant au besoin à une suite partielle, on peut admettre que $\|x_n\|_2 \geqslant \varepsilon > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. En vertu du lemme 2, il existe $\{x_{n_k}\}$, $r \in X_+$ et $\varepsilon_{n_k} \downarrow 0$, tels que $|x_{n_k}| \leqslant \varepsilon_{n_k} r$. La norme $\|\cdot\|_2$ étant monotone, il s'ensuit que $\|x_{n_k}\|_2 \leqslant \varepsilon_{n_k} \|r\|_2 \to 0$. Cette contradiction prouve le théorème.

3.2. Voici quelques propriétés importantes susceptibles d'être possédées par la norme dans un e.i.n. X.

On dit qu'une norme est *continue pour la structure d'ordre* *) dans un e.i.n. X ou que dans X est réalisée la condition (A) si

$$x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0.$$

LEMME 3. *Si* X *est un e.i.n. avec la condition* (A), *alors l'ensemble*

$$E = \{y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k} \colon A_k \in \Sigma(\mu),\ A_k \cap A_{k'} = \varnothing \quad (k \neq k'),\quad \chi_{A_k} \in X,\quad m \in \mathbb{N}\}$$

est dense pour la norme de X.

DÉMONSTRATION. Il est évident qu'il suffit de prouver que toute fonction $x \in X_+$ appartient à l'adhérence de E. Vu que $[x]_n \uparrow x$ (cf. I.6.4) et que la condition (A) est réalisée dans X, il vient $[x]_n \to x$ en norme dans X. Il suffit donc de considérer des fonctions bornées x. La mesure μ étant σ-finie, on a $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, où $T_n \subset T_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $\mu(T_n) < \infty$. En vertu de la condition (A) on a encore $x\chi_{T_n} \to x$ en norme. Il suffit donc d'étudier le cas d'une fonction bornée x et d'une mesure finie μ. D'après le théorème I.6.3, il existe des fonctions x_n à valeurs finies, pour lesquelles $0 \leqslant x_n \uparrow x$. Donc $x_n \to x$ en norme. De toute évidence $x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$.

Pour vérifier la séparabilité d'espaces concrets il est souvent commode d'utiliser le

THÉORÈME 3. *Pour qu'un e.f. de Banach* X *sur* (T, Σ, μ) *soit séparable il faut et il suffit que la mesure* μ *soit séparable et que la condition* (A) *soit satisfaite dans* X.

---

*) Ici et dans la suite on dira (o)-continuité pour continuité pour la structure d'ordre.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1, l'e.f.n. X est dense dans l'espace métrique S. Dons, si X est séparable, S le sera également, et en vertu du théorème I.6.16, la mesure μ est séparable. La réalisation de la condition (A) sera prouvée dans une situation plus générale ultérieurement (cf. corollaire du théorème X.4.4).

Grâce au lemme 3 on démontre la condition suffisante exactement comme le théorème I.6.16.

On dit qu'une norme est *(o)-semi-continue* dans un e.i.n. X ou que dans X est réalisée la condition (C) si

$$0 \leqslant x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \| x_n \| \to \| x \|.$$

Il est évident que la condition (A) entraîne la condition (C).

LEMME 4. *La condition* (C) *est réalisée dans un e.i.n.* X *si et seulement si* $x_n \to x$ (μ) (x_n, $x \in X$) *entraîne* $\| x \| \leqslant \underline{\lim} \| x_n \|$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la condition (C) est réalisée dans X. D'après le théorème I.6.4, on peut admettre que $x_n \to x$ p.p. ; donc $| x_n | \to | x |$ p.p. Posons $y_n = \inf \{| x_m | : m \geqslant n\}$ (cet infimum existe d'après le corollaire du théorème I.6.17). Il est évident que $0 \leqslant y_n \uparrow | x |$. Alors, comme $0 \leqslant y_n \leqslant | x_n |$, on a

$$\| x \| = \lim_{n \to \infty} \| y_n \| \leqslant \underline{\lim} \| x_n \|.$$

Prouvons la réciproque. Soit $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X$. Alors $x_n \to x$ (μ) et par hypothèse $\| x \| \leqslant \underline{\lim} \| x_n \| = \lim \| x_n \|$. Comme $\| x \| \geqslant \geqslant \| x_n \|$ ($n \in \mathbb{N}$) en vertu de la monotonie de la norme, on obtient $\| x_n \| \to \| x \|$.

On dit qu'une norme est *monotone complète* dans un e.i.n. X ou que dans X est réalisée la condition (B) si

$$0 \leqslant x_n \uparrow, \quad x_n \in X \quad (n \in \mathbb{N}), \ \sup \| x_n \| < \infty$$

entraîne l'existence d'un $x \in X$ tel que $x_n \uparrow x$.

LEMME 5. *Soit* X *un e.i.n. sur* (T, Σ, μ). *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *les conditions* (B) *et* (C) *sont réalisées dans* X ;

2) *la boule unité* $B_X = \{x \in X : \| x \| \leqslant 1\}$ *est fermée dans* S (T, Σ, μ), *c'est-à-dire si* $x_n \in X$, $x \in S$, $\| x_n \| \leqslant 1$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \to x$ (μ), *alors* $x \in X$ *et* $\| x \| \leqslant 1$.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que la suite $\{x_n\}$ vérifie les conditions 2). Alors, comme dans la démonstration du lemme 4, on peut admettre que $x_n \to x$ p.p. Si l'on pose $y_n = \inf \{| x_n | : m \geqslant n\} \in X$, alors $0 \leqslant y_n \uparrow | x |$ et $\sup \| y_n \| \leqslant \sup \| x_n \| \leqslant 1$, d'où $x \in X$ en vertu de (B). Le lemme 4 nous dit que $\| x \| \leqslant 1$.

2) $\Rightarrow$ 1). Il faut prouver que si $0 \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sup \| x_n \| < \infty$, alors existe $x \in X$ tel que $x_n \uparrow x$ et $\| x_n \| \to \| x \|$.

On peut admettre que $\sup \| x_n \| = 1$. Alors $x_n \in B_X$. L'ensemble B_X est borné dans l'e.v.t. S d'après le corollaire du théorème 1. Alors le lemme III.1.1. (cf. III.1.4) affirme l'existence d'un élément $x \in S$ tel que $x_n \uparrow x$, d'où, en vertu de la condition 2), $x \in X$ et $\| x \| \leqslant 1$. Or $\| x \| \leqslant \sup \| x_n \| = 1$, donc $\| x \| = 1$, c.q.f.d.

THÉORÈME 4. *Un e.i.n.* X *dans lequel sont vérifiées les conditions* (B) *et* (C) *est complet pour la norme.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Toute suite de Cauchy étant bornée, on peut admettre que $\| x_n \| \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Le théorème 1 nous dit que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans S, et du fait que S est complet (théorème I.6.15) il existe $x \in S$ tel que $x_n \to x$ (μ). D'après le lemme 5, on a $x \in X$. Montrons que $x_n \to x$ en norme.

$\{x_n\}$ étant une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre N tel que pour $n, m \geqslant N$ on a

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon. \tag{8}$$

Figeons $n \geqslant N$ et considérons la suite $y_n = x_n - x_m \to x_n - x$ (μ). Le lemme 4 et la majoration (8) donnent

$$\| x_n - x \| \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \| x_n - x_m \| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $x_n \to x$ en norme, ce qui démontre la complétude de X.

Nous verrons plus loin (cf. chapitre X) que la condition (C) est superflue dans le théorème 4. Formulons le critère le plus commode de complétude d'un e.i.n. (cf. Abramovitch [1]).

Un e.i.n. X *est complet pour la norme si et seulement si de* $x_n \in X_+$, $\inf(x_n, x_m) = 0$ $(n \neq m)$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < +\infty$, *il résulte que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$ (*la somme est comprise au sens de la convergence p.p.*).

Ce critère est commode en ce sens que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ existe toujours en tant qu'élément de S, et il suffit de prouver que cet élément appartient à X.

La théorie des espaces idéaux est une partie de la théorie générale des espaces de Riesz que nous examinerons en détail au chapitre X *). Notons que la théorie des espaces de Riesz a été élaborée antérieurement et de nombreux faits fondamentaux de la théorie des espaces

*) On donnera également les indications bibliographiques; rappelons ici seulement l'aperçu de Zabreko [1] et le livre de Zaanen [II] où l'étude des e. i. ne fait pas appel à la théorie des treillis vectoriels. Des résultats intéressants sur les e. f. de Banach figurent dans l'article de Lozanovski [2].

idéaux ont été initialement obtenus comme application des théorèmes généraux sur les espaces de Riesz.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons également des fonctionnelles et des opérateurs dans des espaces idéaux. Passons dès maintenant à l'étude d'exemples concrets d'espaces idéaux de Banach.

3.3. Les espaces $\mathbf{L}^p$ que nous allons envisager maintenant jouent un rôle considérable en analyse fonctionnelle et dans les problèmes traîtés dans ce livre.

Supposons comme toujours que (T, Σ, μ) est un espace de mesure σ-finie, bien qu'en fait la condition de σ-finitude soit généralement superflue dans l'étude des espaces $\mathbf{L}^p$. Fixons un nombre $p \in [1, \infty]$ Désignons par $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ l'espace de toutes les fonctions $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ pour lesquelles est finie l'expression

$$\|x\| = \left[\int_T |x(t)|^p \, d\mu\right]^{1/p}. \tag{9}$$

L'inégalité intégrale de Minkowski nous dit que $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ est un espace vectoriel et que la fonctionnelle définie par la formule (9) est une norme. D'où il est évident que $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ est un e.i.n.

La convergence dans $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ est appelée *convergence en moyenne d'exposant* p:

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu \to 0.$$

Les théorèmes de Lebesgue et B. Levi (I.6.6) nous montrent que les conditions (A) et (B) sont réalisées dans l'e.i.n. $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$; donc, d'après le théorème 4, l'espace $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ est un B-espace. Du fait que $\chi_A \in \mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ si $A \in \Sigma(\mu)$, il vient que $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ est un e.f., puisque la mesure est localement finie (I.6.2). On peut rassembler tout ce qu'on vient de dire dans le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Pour* $1 \leqslant p < \infty$, *l'espace* $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ *est un e.f. de Banach avec les conditions* (A) *et* (B).

Considérons maintenant l'espace $\mathbf{L}^p$ pour $p = \infty$. Cet espace est composé de toutes les fonctions $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ pour lesquelles existe un nombre α_x tel que $|x(t)| \leqslant \alpha_x$ p.p. *). Définissons pour la fonction $x \in \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ le suprémum vrai de son module $\operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} |x(t)|$ comme l'infimum de l'ensemble des nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu(\{t \in T: \quad |x(t)| > \alpha\}) = 0.$$

*) De telles fonctions sont dites *essentiellement bornées*.

Il est évident que $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est un sous-espace vectoriel de S. Définissons la norme sur $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ par la formule

$$\| x \| = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T} | x(t) |.$$

On laisse au lecteur le soin de la vérification, peu compliquée, du fait que $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est un e.f. de Banach avec les conditions (B) et (C). La condition (A) n'est pratiquement jamais réalisée dans l'espace $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$. La seule exception est le cas dégénéré où l'espace $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est de dimension finie, ce qui équivaut au fait que (T, Σ, μ) est composé d'un nombre fini d'atomes. En effet, supposons que $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est de dimension infinie. Il existe alors une suite $\{A_n\} \subset \Sigma(\mu)$ d'ensembles deux à deux disjoints de mesure positive. Soient les ensembles

$$B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B_1 = B_0 \setminus A_1, \ldots, \quad B_k = B_{k-1} \setminus A_k, \ldots$$

Si $x_n = \chi_{B_n}$, alors $x_n \in \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ et $x_n \downarrow 0$. Or, il est évident que $\| x_n \| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, donc la condition (A) n'est pas vérifiée dans $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

Si l'on sait de quelle mesure μ il est question ou au contraire si cela n'a aucune importance, on écrira $\mathbf{L}^p$ pour $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$. Si, pour espace mesuré on considère un ensemble mesurable $D \subset \mathbf{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue mes, alors on écrira $\mathbf{L}^p(D)$ au lieu de $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$, et $\mathbf{L}^p(a, b)$ si (T, Σ, μ) est l'intervalle $[a, b]$ muni de la mesure de Lebesgue. Nous conserverons ces abréviations pour les autres espaces.

Des résultats de I.6.10 et des théorèmes 3 et 5, il résulte que les espaces $\mathbf{L}^p(D)$ sont séparables pour $1 \leqslant p < \infty$. L'espace $\mathbf{L}^\infty(D)$ n'est pas séparable, puisque la condition (A) n'y est pas réalisée. Pour ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{L}^p(a, b)$ on peut prendre par exemple l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels ou encore l'ensemble des fonctions en escalier qui prennent des valeurs rationnelles sur des intervalles d'extrémités rationnelles.

Pour établir ce fait, remarquons avant tout que si $[x]_n$ désigne la « troncature » de la fonction x (cf. I.6.4), alors

$$\int_a^b |x(t) - [x]_n(t)|^p \, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

puisque l'intégrant tend vers zéro et le passage à la limite sous le signe somme est licite car l'intégrant est majoré par la fonction sommable $| x(t) |^p$.

Prenons n tel que $\| x - [x]_n \| \leqslant \varepsilon$, puis trouvons une fonction continue $y(t)$, confondue partout avec $[x]_n(t)$ sauf sur un ensemble A

de mesure $<\varepsilon^p/(2n)^p$, et $\leqslant n$ (voir I.6.9). On aura alors

$$\| x_n - y \| = \left\{ \int_A |x_n(t) - y(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_A (2n)^p \, dt \right\}^{1/p} = 2n \, [\text{mes } A]^{1/p} < \varepsilon.$$

Considérons enfin un polynôme $P(t)$ à coefficients rationnels, tel que $| y(t) - P(t) | < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(t \in [a, b])$. Il est clair que $\| y - P \| < \varepsilon$ et en définitive $\| x - P \| < 3\varepsilon$.

Comme ensembles dénombrables denses dans $\mathbf{L}^p(-\infty, \infty)$ on a, par exemple, l'ensemble de toutes les fonctions en escalier sur des intervalles rationnels, ne prenant que des valeurs rationnelles dont seul un nombre fini sont non nulles.

Voyons maintenant comment sont reliés entre eux les espaces $\mathbf{L}^p$ pour divers p.

THÉORÈME 6. *Supposons que la mesure* μ *est finie et* $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$. *Alors* $\mathbf{L}^r(T, \Sigma, \mu) \subset \mathbf{L}^s(T, \Sigma, \mu)$ *et de plus si*

$$K(r, s) = \begin{cases} \mu(T)^{(r-s)/(rs)} & \textit{pour} \quad r < \infty, \\ \mu(T)^{1/s} & \textit{pour} \quad r = \infty, \end{cases}$$

alors

$$\| x \|_{\mathbf{L}^s} \leqslant K(r, s) \| x \|_{\mathbf{L}^r}.$$

DÉMONSTRATION. Le cas $r = \infty$ est laissé au soin du lecteur. Soit $r < \infty$. En posant $p = r/s$, $q = r/(r-s)$ $(p, q > 0, 1/p + 1/q = 1)$, on obtient à partir de l'inégalité intégrale de Hölder

$$\| x \|_{\mathbf{L}^s} = \left[\int_T |x(t)|^s \, d\mu \right]^{1/s} \leqslant \left[\int_T |x(t)|^{ps} \, d\mu \right]^{1/(ps)} \left[\int_T 1^q \, d\mu \right]^{1/(qs)} =$$

$$= \| x \|_{\mathbf{L}^r} \mu(T)^{1/(qs)} = K(r, s) \| x \|_{\mathbf{L}^r}.$$

Remarquons que $\| x \|_{\mathbf{L}^\infty} = \lim_{p \to \infty} \| x \|_{\mathbf{L}^p}$ (Hardy, Littlewood, Polya, page 173), mais $\mathbf{L}^\infty \neq \bigcap_{1 \leqslant p < \infty} \mathbf{L}^p$. Le théorème 6 est faux dans le cas d'une mesure infinie.

Les espaces $\mathbf{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ ont été introduits par F. Riesz [1], l'espace $\mathbf{L}^1$ par Steinhaus [1].

3.4. Nous allons étudier un cas particulier important d'espaces de fonctions mesurables: l'espace des suites. On rappelle que si $T = \mathbb{N}$, Σ est l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$ et la mesure μ de tout point est égale à l'unité, alors $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ est l'espace s

de toutes les suites. Les définitions et résultats des paragraphes précédents sont de ce fait tous valables pour les sous-espaces de **s**.

Dans le cas traité, les espaces $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ sont notés $\mathbf{l}^p$. Si $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, alors par définition de la norme dans $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$, on obtient

$$\|x\|_{\mathbf{l}^p} = \begin{cases} [\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p]^{1/p} & \text{pour } 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup_{k=1}^{\infty} |\xi_k| & \text{pour } p = \infty. \end{cases}$$

Les résultats de 3.3 entraînent que $\mathbf{l}^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ est un espace de Banach séparable, et $\mathbf{l}^\infty$ un espace de Banach non séparable.

Introduisons encore deux espaces de suites qui sont des sous-espaces de $\mathbf{l}^\infty$. Notons **c** l'espace de toutes les suites convergentes et $\mathbf{c}_0$ celui de toutes les suites convergeant vers zéro. Munissons **c** et $\mathbf{c}_0$ de la norme induite de $\mathbf{l}^\infty$. Il est évident que **c** et $\mathbf{c}_0$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{l}^\infty$. Montrons qu'ils sont fermés dans $\mathbf{l}^\infty$ d'où il résultera qu'ils sont des espaces de Banach. Etablissons ce fait seulement pour l'espace **c**.

Si $\{x_n\}$ est une suite d'éléments de **c**, convergeant vers $x_0 \in \mathbf{l}^\infty$, alors $\|x_n - x_0\| \to 0$. En posant $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant N_\varepsilon$ on a :

$$\|x_n - x_0\| = \sup_k |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon/3,$$

ce qu'on peut encore noter :

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| < \varepsilon/3 \quad (k = 1, 2, \ldots; n \geqslant N_\varepsilon).$$

Fixons $n \geqslant N_\varepsilon$. L'élément $x_n \in \mathbf{c}$, donc la suite $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ $\ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots$ est convergente. Donc, pour k et k' assez grands, on aura $|\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| < \varepsilon/3$. Donc, pour les mêmes k et k' on obtient

$$|\xi_k^{(0)} - \xi_{k'}^{(0)}| \leqslant |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)} - \xi_{k'}^{(n)}| + \\ + |\xi_{k'}^{(n)} - \xi_{k'}^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)}, \ldots$ est convergente, c'est-à-dire $x_0 \in \mathbf{c}$.

Remarquons que $\mathbf{c}_0$ est un e.f. de Banach avec la condition (A) (c'est donc un B-espace séparable), mais sans la condition (B). Donc, la condition (B) n'est pas nécessaire à la complétude d'un e.i.n. L'espace **c** n'est pas un espace idéal.

Signalons que les espaces $\mathbf{l}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ sont justiciables d'inclusions et d'inégalités pour la norme (avec $K(r, s) = 1$) inverses de celles formulées dans le théorème 6.

Citons enfin l'exemple de l'espace φ des suites tronquées. Cet espace est constitué de toutes les suites $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dont un ensemble au plus fini de coordonnées est différent de zéro. La norme dans φ est induite de $\mathbf{l}^\infty$. Il est évident que φ est un e.f.n., mais pas un B-espace, puisque l'espace φ est dense dans $\mathbf{c}_0$.

Les espaces $\mathbf{l}^p$ ont été introduits et étudiés par F. Riesz [3], l'espace $\mathbf{l}^2$ avant lui par D. Hilbert (cf. Hilbert).

3.5. Indiquons les espaces $\mathbf{l}_n^p$ de dimension n finie liés avec les espaces de suites $\mathbf{l}^p$. Deux espaces de même dimension finie étant isomorphes, ils ne peuvent être distincts que par le procédé de définition de la norme. Plus exactement, dans l'espace $\mathbf{l}_n^p$ la norme est définie comme suit: si $x = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, alors

$$\|x\|_{\mathbf{l}_n^p} = \begin{cases} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right]^{1/p} & \text{pour } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

(pour $p = 2$ on obtient la norme euclidienne).

Le corollaire 1 du théorème 1.2 nous apprend que malgré la différence de définition des normes sur ces espaces, la convergence possède le même sens: c'est une convergence en coordonnées. (Ceci découle directement de l'inégalité $|\xi_k| \leqslant \|x\|$ qui est valable dans chacun des espaces de dimension finie considérés).

L'espace $\mathbf{l}_n^p$ peut être considéré comme sous-espace de $\mathbf{l}^p$. Pour cela il faut identifier l'élément $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{l}_n^p$ et l'élément $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0 \ldots) \in \mathbf{l}^p$.

3.6. Outre les espaces $\mathbf{L}^p$ on étudie en analyse fonctionnelle de nombreux autres espaces de fonctions mesurables.

Commençons par la définition des espaces d'Orlicz, qui généralisent les espaces $\mathbf{L}^p$. On appelle *N-fonction* une fonction $M(u)$ continue, paire, convexe, positive pour $u \neq 0$, définie sur $]-\infty, \infty[$, telle que

$$\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty.$$

L'égalité

$$M^*(u) = \sup_{-\infty < v < \infty} (uv - M(v))$$

définit une N-fonction *complémentaire* pour chaque N-fonction. Il est évident que la N-fonction M est monotone croissante sur $[0,$

$+\infty[$ et $M(0) = 0$. On démontre que M^* est une N-fonction et que M^{**} $(=(M^*)^*) = M$.

Soit (T, Σ, μ) un espace de mesure finie. Fixons une N-fonction M. On appelle *classe d'Orlicz* $\mathbf{L}_M^0(T, \Sigma, \mu)$ (plus brièvement $\mathbf{L}_M^0$) l'ensemble de toutes les fonctions $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ telles que

$$\int_T M(|x(t)|)\, d\mu < +\infty.$$

Une classe d'Orlicz peut ne pas être munie d'une structure d'espace vectoriel, plus exactement pour $x \in \mathbf{L}_M^0$ il peut arriver que $2x \notin \mathbf{L}_M^0$. Il est évident que $\mathbf{L}^\infty \subset \mathbf{L}_M^0$.

On appelle *espace d'Orlicz* $\mathbf{L}_M(T, \Sigma, \mu)$ (plus brièvement $\mathbf{L}_M$) l'ensemble de toutes les fonctions $x \in \mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ telles qu'il existe un nombre $\lambda = \lambda(x) > 0$ pour lequel

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda)\, d\mu < \infty.$$

De toute évidence $\mathbf{L}_M^0 \subset \mathbf{L}_M$. Nous verrons plus bas que ces ensembles peuvent être inégaux. L'espace $\mathbf{L}_M$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathbf{S}$. En effet, il est évident que le produit d'un élément de $\mathbf{L}_M$ par un nombre est un élément de $\mathbf{L}_M$. Si

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_1)\, d\mu < \infty \quad \text{et} \quad \int_T M(|y(t)|/\lambda_2)\, d\mu < \infty,$$

alors en vertu de la convexité de M on a

$$\int_T M\left(\frac{|x(t)+y(t)|}{\lambda_1+\lambda_2}\right) d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \int_T M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda_1}\right) d\mu + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \int_T M\left(\frac{|y(t)|}{\lambda_2}\right) d\mu, \qquad (10)$$

d'où $x + y \in \mathbf{L}_M$. M étant monotone, $\mathbf{L}_M$ est de toute évidence un espace fondamental sur (T, Σ, μ). Munissons l'espace d'Orlicz des deux normes suivantes:

$$\|x\|_1 = \sup\left\{\int_T |xy|\, d\mu : \int_T M^*(y)\, d\mu \leqslant 1\right\},$$

$$\|x\|_2 = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_T M(|x(t)|/\lambda)\, d\mu \leqslant 1\right\}.$$

Montrons que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes. De la définition de M^*, déduisons l'*inégalité de Young*

$$|uv| \leqslant M(u) + M^*(v).$$

Supposons que $\int_T M(|x(t)|/\lambda)\,d\mu < \infty$. L'inégalité de Young entraîne

$$\int_T |xy|\,d\mu = \lambda \int_T |x/\lambda|\,|y|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \int_T M(|x|/\lambda)\,d\mu + \lambda \int_T M^*(|y|)\,d\mu. \qquad (11)$$

De (11) il suit que $\|x\|_1 < \infty$. Comme $\mathbf{L}^\infty \subset \mathbf{L}^0_{M^*}$, de $\|x\|_1 = 0$ il résulte que $x = \mathbf{0}$. Les autres propriétés de la norme sont évidentes pour $\|\cdot\|_1$.

Par définition il est évident que $\|x\|_2 < \infty$. L'homogénéité est immédiate; l'inégalité triangulaire se déduit sans peine à partir de l'inégalité (10). Si $\|x\|_2 = 0$, alors $x = \mathbf{0}$, puisque $M(u) > 0$ pour $u > 0$. Donc, $\|\cdot\|_2$ est une norme. De l'inégalité (11) on déduit que $\|x\|_1 \leqslant 2\,\|x\|_2$. On démontre que $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$. Nous ne le ferons pas, mais nous démontrerons seulement l'existence d'une constante $k_1 > 0$ telle que $\|x\|_1 \geqslant k_1\,\|x\|_2$ $(x \in \mathbf{L}_M)$, c'est-à-dire les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. Le dernier fait découle de ce que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes monotones munissant $\mathbf{L}_M$ d'une structure d'e.f. de Banach (cf. théorème 2).

THÉORÈME 7. *Muni de la norme* $\|\cdot\|_1$ *ou de la norme* $\|\cdot\|_2$ *l'espace d'Orlicz* $\mathbf{L}_M$ *est un e.f. de Banach dans lequel sont satisfaites les conditions* (B) *et* (C).

DÉMONSTRATION. Un e.f.n. avec les conditions (B) et (C) étant complet (théorème 4), il suffit de montrer que dans $(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_i)$ sont réalisées les conditions (B) et (C), c'est-à-dire de $\mathbf{0} \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in \mathbf{L}_M$, $\sup_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_i < \infty$, il résulte qu'existe $x \in \mathbf{L}_M$ pour lequel $x_n \uparrow x$ et $\sup_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_i = \|x\|_i$ $(i = 1, 2)$.

Supposons tout d'abord que $i = 1$. Posons $x(t) = \sup_n x_n(t)$. La fonction x peut *a priori* prendre des valeurs infinies sur un ensemble de mesure positive, mais d'après le corollaire du théorème I.6.7, pour tout y vérifiant $\int_T M^*(y)\,d\mu \leqslant 1$ on obtient

$$\int_T x\,|y|\,d\mu = \sup_n \int_T x_n\,|y|\,d\mu \leqslant \sup \|x_n\|_1. \qquad (12)$$

L'inégalité (12) montre que les conditions (B) et (C) sont satisfaites dans $(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_1)$.

Traitons le cas $i = 2$. Comme $\|x\|_1 \leqslant 2\,\|x\|_2$, la condition (B) est réalisée dans $(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_2)$. Il reste à vérifier que $\mathbf{0} \leqslant x_n \uparrow$ $\uparrow x \in \mathbf{L}_M$ entraîne $\|x_n\|_2 \to \|x\|_2$.

Mentionnons d'abord la propriété suivante de $\|\cdot\|_2$: pour tout $x \neq 0$ on a

$$\int_T M(|x(t)|/\|x\|_2)\,d\mu \leqslant 1. \tag{13}$$

En effet, prenons $\lambda_n \to \|x\|_2$ $(\lambda_n \neq 0)$ et de plus

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda_n)\,d\mu \leqslant 1. \tag{14}$$

En passant à la limite dans l'inégalité (14), on obtient (13) d'après le théorème de Fatou.

Posons $\lim \|x_n\|_2 = \lambda$. En vertu de (13)

$$\int_T M(|x_n(t)|/\|x_n\|_2)\,d\mu \leqslant 1. \tag{15}$$

En passant à la limite dans (15), on obtient, toujours en vertu du théorème de Fatou,

$$\int_T M(|x(t)|/\lambda)\,d\mu \leqslant 1.$$

D'où $\|x\|_2 \leqslant \lambda = \lim \|x_n\|_2 \leqslant \|x\|_2$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Etudions maintenant le problème qui se pose lorsque la condition (A) est satisfaite dans l'espace d'Orlicz. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ étant équivalentes, la condition (A) est ou n'est pas réalisée simultanément pour ces normes.

On a déjà signalé que $\mathbf{L}^\infty \subset \mathbf{L}_M^0 \subset \mathbf{L}_M$. Désignons par $\mathbf{E}_M$ l'adhérence de $\mathbf{L}^\infty$ dans l'espace d'Orlicz $\mathbf{L}_M$. Etudions aussi les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbf{E}_M$.

LEMME 6. 1) *Si* $\{x_n\} \subset \mathbf{L}_M$ *et* $x_n \to x$ *en norme dans* $\mathbf{L}_M$, *alors la suite* $\{x_n\}$ *converge en moyenne vers une fonction, c'est-à-dire*

$$\int_T M(|x_n(t) - x(t)|)\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,^{*)}.$$

2) *Si dans les hypothèses de* 1) $2x_n \in \mathbf{L}_M^0$ $(n \in \mathbb{N})$, *alors* $x \in \mathbf{L}_M^0$.

3) $\mathbf{E}_M \subset \mathbf{L}_M^0$.

DÉMONSTRATION. 1) Remarquons tout d'abord que l'égalité $M(0) = 0$ et la convexité de M entraînent

$$M(\alpha u) \leqslant \alpha M(u) \quad \text{pour } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{16}$$

*) Un nombre fini de ces intégrales peuvent être infinies.

Comme $\| x_n - x \|_2 \to 0$, alors $\| x_n - x \|_2 \leqslant 1$ pour $n \geqslant N$. Pour de tels n, en vertu de (16) on a ($\alpha = \| x_n - x \|_2$)

$$1 \geqslant \int_T M\left(\frac{x_n - x}{\| x_n - x \|_2}\right) d\mu \geqslant \frac{1}{\| x_n - x \|_2} \int_T M(|x_n - x|)\, d\mu, \quad (17)$$

d'où

$$\int_T M(|x_n - x|)\, d\mu \leqslant \| x_n - x \|_2 \to 0.$$

2) découle de l'inégalité

$$\int_T M(|x|)\, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \int_T M(|2x - 2x_n|)\, d\mu + \frac{1}{2} \int_T M(|2x_n|)\, d\mu.$$

3) Si $x \in \mathbf{E}_M$, il existe $\{x_n\} \subset \mathbf{L}^\infty$ telle que $x_n \to x$ en norme. Comme $2x_n \subset \mathbf{L}^\infty \subset \mathbf{L}_M^0$, alors en vertu de 2) on a $x \in \mathbf{L}_M^0$.

THÉORÈME 8. *L'espace* $\mathbf{E}_M$ *est un e.f. de Banach dans lequel est réalisée la condition* (A).

DÉMONSTRATION. Il nous faut simplement vérifier que la condition (A) est réalisée dans $\mathbf{E}_M$. Supposons le contraire.

Il existe alors une suite $\{x_n\} \subset \mathbf{E}_M$ telle que $x_n \downarrow 0$, $\| x_n \|_2 > \delta > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). En vertu de (13), on a

$$\int_T M(|x_n|/\delta)\, d\mu > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, $x_1/\delta \in \mathbf{E}_M \subset \mathbf{L}_M^0$ en vertu du lemme 6.

Le théorème de Lebesgue nous donne alors

$$\int_T M(|x_n|/\delta)\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

ce qui est absurde.

On dit qu'une N-fonction $M(u)$ vérifie une Δ_2-*condition* si existent des constantes $k > 0$, $u_0 \geqslant 0$ telles que

$$M(2u) \leqslant kM(u) \quad (u \geqslant u_0).$$

Dans le théorème suivant nous supposons que l'espace (T, Σ, μ) est continu *).

THÉORÈME 9. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *la condition* (A) *est satisfaite dans* $\mathbf{L}_M$;

2) $\mathbf{L}_M = \mathbf{E}_M$;

3) *la condition* (B) *est réalisée dans* $\mathbf{E}_M$;

*) Cette condition n'est utilisée que pour la démonstration de 5) $\Rightarrow$ 6).

4) $\mathbf{L}_M = \mathbf{L}_M^0$;
5) $\mathbf{L}_M^0$ *est un espace vectoriel*;
6) *toute N-fonction M vérifie une Δ_2-condition.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Si dans $\mathbf{L}_M$ est réalisée la condition (A), le lemme 3 dit que $\mathbf{L}^\infty$ est dense dans $\mathbf{L}_M$, et alors $\mathbf{E}_M = \mathbf{L}_M$
2) $\Rightarrow$ 3) puisque la condition (B) est réalisée dans $\mathbf{L}_M$ (théorème 7).
3) $\Rightarrow$ 2) en vertu du lemme 1.
2) $\Rightarrow$ 4) puisque $\mathbf{E}_M \subset \mathbf{L}_M^0$ d'après le lemme 6.
4) $\Rightarrow$ 5) puisque $\mathbf{L}_M$ est un espace vectoriel.
5) $\Rightarrow$ 4). En effet, si $x \in \mathbf{L}_M$, $x \neq 0$, alors en vertu de (13) on a $x / \| x \|_2 \in \mathbf{L}_M^0$ et $x = \| x \|_2 (x / \| x \|_2) \in \mathbf{L}_M^0$.
4) $\Rightarrow$ 1) se démontre exactement comme le théorème 8.
6) $\Rightarrow$ 5). Supposons que $m \in \mathbb{N}$. Il est aisé de voir qu'une Δ_2-condition implique l'inégalité (pour $u \geqslant u_0$)

$$M(2^m u) \leqslant k^m M(u).$$

Soient maintenant $x \in \mathbf{L}_M^0$, λ un nombre quelconque. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda| \leqslant 2^m$. On obtient

$$\int_T M(|\lambda x|)\, d\mu \leqslant k^m \int_T M(|x|)\, d\mu + \mu(T)\, M(2^m u_0) < \infty,$$

d'où $\lambda x \in \mathbf{L}_M^0$.
5) $\Rightarrow$ 6). Supposons que la N-fonction M ne vérifie pas une Δ_2-condition. Il existe alors une suite numérique $\{u_n\}$ telle que $0 < u_n \uparrow +\infty$, $M(u_1) > 1$ et

$$M(2u_n) > 2^n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

L'espace (T, Σ, μ) étant continu, il existe des ensembles $A_n \in \Sigma$ disjoints, tels que

$$\mu(A_n) = \frac{\mu(T)}{2^n M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Définissons une fonction $x(t)$ par

$$x(t) = \begin{cases} u_n & \text{pour } x \in A_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{pour } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

En vertu de (19)

$$\int_T M(x(t))\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} M(x(t))\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n)\, \mu(A_n) \leqslant \mu(T) < \infty,$$

d'où $x \in \mathbf{L}_M^0$. D'autre part, (18) et (19) entraînent

$$\int_{A_n} M(2x(t))\,d\mu = M(2u_n)\,\mu(A_n) > 2^n M(u_n)\,\mu(A_n) = \mu(T),$$

d'où

$$\int_T M(2x(t))\,d\mu \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} M(2x(t))\,d\mu = +\infty.$$

Donc $2x \notin \mathbf{L}_M^0$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Soit D un domaine de $\mathbf{R}^n$ de mesure de Lebesgue finie. Les théorèmes 3 et 9 impliquent le

COROLLAIRE. *L'espace d'Orlicz* $\mathbf{L}_M(D)$ *est séparable si et seulement si une N-fonction* M *vérifie une* Δ_2*-condition.*

Notons en conclusion que les espaces $\mathbf{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ appartiennent à la classe des espaces d'Orlicz. En effet, posons $M(u) = u^p/p$. La norme de l'espace d'Orlicz $\mathbf{L}_M$ est alors équivalente à celle de $\mathbf{L}^p$. Prouvons que

$$\|x\|_{\mathbf{L}^p} = p^{1/p}\,\|x\|_2. \tag{20}$$

Si $\int_T M(|x|/\|x\|_2)\,d\mu \leqslant 1$, alors $\int_T |x(t)|^p/\|x\|_2^p\,d\mu \leqslant p$, d'où

$$\left(\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} \leqslant p^{1/p}\,\|x\|_2.$$

D'autre part

$$\int_T M\left(\frac{|x(t)|}{p^{-1/p}\left(\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p}}\right) d\mu = 1,$$

d'où $\|x\|_{\mathbf{L}^p} \geqslant p^{1/p}\,\|x\|_2$. En comparant les inégalités prouvées on obtient (20).

Les espaces d'Orlicz et leurs applications à la résolution des équations intégrales non linéaires sont traités plus en détail dans le livre de Krasnosselski et Routitski dont nous avons par endroit suivi l'exposé (voir également Zaanen [I]).

3.7. Arrêtons-nous brièvement sur deux classes d'espaces, importantes en théorie de l'interpolation des opérateurs linéaires (cf. Birman et autres).

Etant donné $x \in \mathbf{S}(0, 1)$, on appelle permutation équimesurable du module de x dans un ordre décroissant une fonction $x^*(\tau)$ sur $[0, 1]$ donnée par

$$x^*(\tau) = \inf\{\alpha \geqslant 0 : \operatorname{mes}(\{t : |x(t)| > \alpha\}) \leqslant \tau\}.$$

Soit $\psi(t)$ une fonction continue concave, positive pour $t \neq 0$ sur $[0, 1]$, telle que $t/\psi(t) \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} 0$.

On appelle *espace de Marzinkiewicz* $\mathbf{M}(\psi)$ un espace de Banach composé de tous les $x \in \mathrm{S}(0, 1)$ pour lesquels est finie la norme

$$\| x \| = \sup \left\{ \frac{1}{\psi(\mathrm{mes}(A))} \int_A |x(t)| dt : A \subset [0,1] \text{ est mesurable et mes}(A) > 0 \right\} =$$

$$= \sup_{0<h<1} \left\{ \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(\tau) d\tau \right\}.$$

L'espace $\mathbf{M}(\psi)$ est un e.f. de Banach dans lequel sont vérifiées les conditions (B) et (C), mais pas la condition (A).

On appelle *espace de Lorentz* $\Lambda(\psi)$ un espace de Banach composé de tous les $x \in \mathrm{S}(0, 1)$ pour lesquels est finie la norme

$$\| x \| = \int_0^1 x^*(\tau) d\psi(\tau).$$

L'espace $\Lambda(\psi)$ est un e.f. de Banach dans lequel sont vérifiées les conditions (A) et (B).

Les espaces $\mathbf{M}(\psi)$ et $\Lambda(\psi)$ les plus répandus correspondent au cas où $\psi(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Dans ce cas on les désigne par $\mathbf{M}(\alpha)$ et $\Lambda(\alpha)$.

Le passage à une fonction x^* équimesurable décroissante est lié à une classe importante d'e.f. de Banach : la classe des espaces symétriques (cf. Birman et autres), c'est-à-dire à des e.f. de Banach $\mathbf{X}$ sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, tels que $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathrm{S}(0, 1)$, $x^* = y^*$ entraîne que $y \in \mathbf{X}$ et $\| x \| = \| y \|$. Les espaces $\mathbf{L}^p(0, 1)$, $\mathbf{L}_M(0, 1)$, $\mathbf{E}_M(0, 1)$, $\mathbf{M}(\psi)$ et $\Lambda(\psi)$ sont des espaces symétriques.

Signalons en conclusion qu'on peut considérer des classes d'espaces de fonctions mesurables à valeurs dans des B-espaces, analogues aux e.i. de Banach. Ces espaces sont utilisés en théorie des équations différentielles, en théorie analytique des semi-groupes, dans l'interpolation des opérateurs linéaires (cf. par exemple Bourbaki [VIII]; Dunford et Schwartz [I, II]; Dinculeanu, Yosida; Hill et Phillips; Edwards).

§ 4. Autres espaces normés de fonctions

4.1. Arrêtons-nous tout d'abord sur le B-espace $\mathbf{C}(K)$ des fonctions continues sur un compact K. Nous allons formuler le théorème de Stone-Weierstrass des ensembles denses pour la norme dans $\mathbf{C}(K)$, qui est important dans les applications.

Définissons dans $\mathbf{C}(K)$ la multiplication : $(xy)(t) = x(t)\, y(t)$. Un sous-espace vectoriel E de $\mathbf{C}(K)$ est une *sous-algèbre* si $x, y \in E \Rightarrow xy \in E$. Désignons par $\mathbf{1}$ la fonction identiquement égale à l'unité sur K.

THÉORÈME 1 (Stone-Weierstrass). *Soit E un ensemble d'un B-espace réel $\mathbf{C}(K)$. Supposons que sont vérifiées les conditions suivantes :*

1) *E est une sous-algèbre ;*

2) $\mathbf{1} \in K$;

3) *E sépare les points de K, c'est-à-dire quels que soient $t, t' \in K$ $(t \neq t')$, il existe une fonction $x \in E$ pour laquelle $x(t) \neq x(t')$.*

Alors E est dense dans $\mathbf{C}(K)$.

Du théorème 1 on déduit sans peine le résultat classique: l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathbf{C}[a, b]$.

Le théorème 1 n'est pas valable dans le cas d'un espace complexe $\mathbf{C}(K)$.

En effet, prenons $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ et considérons l'ensemble E des polynômes complexes sur K, c'est-à-dire $E = \mathscr{L}(1, z, z^2, \ldots)$. L'ensemble E vérifie les conditions du théorème 1, mais il n'est pas dense dans $\mathbf{C}(K)$ complexe. Par exemple la fonction $x(z) = \operatorname{Re} z \notin \overline{E}$, puisque dans le cas contraire elle serait analytique à l'intérieur du disque d'après le théorème de Weierstrass. Cependant, on peut facilement remédier à la situation dans le cas complexe.

THÉORÈME 2. *Soit E un ensemble de l'espace de Banach complexe $\mathbf{C}(K)$. Supposons que sont vérifiées les conditions* 1) *à* 3) *du théorème* 1 *et que de plus*:

4) *si $x \in E$, alors $\bar{x} \in E$, où $\bar{x}(t) = \overline{x(t)}$, la barre désignant la conjugaison complexe.*

Alors E est dense dans $\mathbf{C}(K)$.

On peut trouver les démonstrations des théorèmes 1 et 2 par exemple dans Dunford et Schwartz [I]; Schaefer [I].

LEMME 1 (de partition de l'unité). *Si $\{U_i\}_{i=1}^n$ est un recouvrement fini ouvert d'un compact K, il existe un système de fonctions continues réelles $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ sur K, tel que*:

1) $\varphi_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $\varphi_i(t) = 0$, $t \notin U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

3) $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) = 1$, $\forall t \in K$.

DÉMONSTRATION. Nous l'effectuerons seulement dans le cas d'un compact métrique K muni de la métrique $r(t, s)$. Notons $F_i = K \setminus U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Pour tout $t \in K$ posons

$$\varphi_i(t) = \frac{r(t, F_i)}{\sum_{k=1}^{n} r(t, F_k)}.$$

Le système $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ vérifie 1) à 3), puisque $r(t, F_i) = 0$ est équivalent à $t \in F_i$.

THÉORÈME 3. *Si K est un compact métrique, alors le B-espace $\mathbf{C}(K)$ est séparable.*

REMARQUE. Il est clair que la réciproque est aussi vraie: si le B-espace $\mathbf{C}(K)$ est séparable, le compact K est métrisable.

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité on peut considérer $\mathbf{C}(K)$ réel. D'après le corollaire 1 du théorème I.5.2 le compact K est séparable. Soit M un ensemble dénombrable partout dense dans K. K étant compact, pour chaque $m \in \mathbb{N}$ il existe un recouvrement fini de K par des ensembles ouverts $U_i^m = \{s \in K: r(t_i, s) < 1/m\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n(m))$, où $t_i \in M$. Soit $\{\varphi_i^m(t)\}_{i=1}^{n(m)}$ la partition de l'unité construite d'après $\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$ en vertu du lemme 1. Montrons que l'ensemble dénombrable E de fonctions de la forme

$$\sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t_i) \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où r_i sont des rationnels quelconques, est dense dans $\mathbf{C}(K)$. Soient $x \in \mathbf{C}(K)$ et un nombre $\varepsilon > 0$. La fonction $x(t)$ étant uniformément continue sur K, il existe pour $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$, tel que $r(t, s) < \delta$ implique $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$. Prenons $m \in \mathbb{N}$ tel que $1/m < \delta$. On peut alors choisir des nombres rationnels r_i vérifiant $|x(t) - r_i| < 2\varepsilon$ pour tous les $t \in U_i^m$ $(i = 1, 2, \ldots, n(m))$. Posons

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t).$$

Alors $\tilde{x} \in E$ et si $t \in U_i^m$ il vient

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| = \left| \sum_{i=1}^{n(m)} x(t)\varphi_i^m(t) - \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \varphi_i^m(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n(m)} |x(t) - r_i| \varphi_i^m(t) < 2\varepsilon.$$

$\{U_i^m\}_{i=1}^{n(m)}$ étant un recouvrement de K, il résulte que $\|x - \tilde{x}\| < 2\varepsilon$, ce qui montre que E est dense dans $\mathbf{C}(K)$.

4.2. Nous verrons plus bas que l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ est étroitement lié à l'espace des fonctions à variation bornée.

Soit $x(t)$ une fonction finie donnée sur un intervalle $[a, b]$. Soient une partition quelconque τ de l'intervalle $[a, b]$ $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ et l'expression

$$v_\tau = \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|. \tag{1}$$

Si l'ensemble des sommes v_τ correspondant à toutes les partitions possibles τ de l'intervalle $[a, b]$ est borné, alors la fonction $x(t)$ est appelée *fonction à variation bornée* sur $[a, b]$ et la quantité

$$\bigvee_a^b (x) = \sup_\tau v_\tau$$

variation totale de la fonction $x(t)$.

Considérons l'ensemble **V** de toutes les fonctions à variation bornée. **V** est un espace vectoriel. En effet, toute fonction à variation bornée sur $[a, b]$ peut être représentée par la différence de deux fonctions croissantes (Fikhtengoltz, tome III):

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Il est aisé de voir qu'inversement toute fonction représentable sous la forme d'une différence de fonctions croissantes est une fonction à variation bornée. Le fait que **V** est un espace vectoriel découle immédiatement de cette remarque.

Si pour $x \in \mathbf{V}$ on pose

$$\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b (x),$$

alors **V** est un espace normé.

En effet, les deux premiers axiomes de l'espace normé sont réalisés manifestement, donc il faut simplement vérifier l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in \mathbf{V}$ et $z = x + y$. Alors pour toute partition de l'intervalle $[a, b]$ $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$

$$|z(a)| = |x(a) + y(a)| \leqslant |x(a)| + |y(a)|$$

et

$$|z(t_k) - z(t_{k-1})| \leqslant |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})|$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc

$$|z(a)| + \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leqslant |x(a)| + \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| +$$
$$+ |y(a)| + \sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

d'où suit l'inégalité voulue.

Prouvons que **V** est un e s p a c e c o m p l e t.

Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy. On remarquera tout d'abord que quel que soit $t \in [a, b]$ la suite de nombres $\{x_n(t)\}$ est convergente. puisque

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leqslant |[x_m(t) - x_n(t)] - [x_m(a) - x_n(a)]| +$$
$$+ |x_m(a) - x_n(a)| \leqslant |x_m(a) - x_n(a)| + \bigvee_a^b (x_m - x_n) = \|x_m - x_n\|.$$

Posons $x_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Supposons que $\varepsilon > 0$ et N_ε assez grand pour que pour $m, n \geqslant N_\varepsilon$ l'on ait

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

A plus forte raison pour toute partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ on aura

$$|x_m(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^{r} |[x_m(t_k) - x_n(t_k)] - [x_m(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| < \varepsilon.$$

En fixant la partition et en passant à la limite pour $m \to \infty$, on trouve

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \sum_{k=1}^{r} |[x_0(t_k) - x_n(t_k)] - [x_0(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1})]| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour toute partition, il vient

$$|x_0(a) - x_n(a)| + \bigvee_a^b (x_0 - x_n) \leqslant \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon),$$

d'où l'on déduit que $x_0 \in \mathbf{V}$ et

$$\| x_0 - x_n \| < \varepsilon \quad (n > N_\varepsilon).$$

c'est-à-dire $x_n \to x_0$.

4.3. Hormis les espaces des fonctions continues et mesurables les espaces des fonctions analytiques et lisses jouent un rôle important en analyse fonctionnelle. Comme exemples d'espaces de fonctions lisses citons les espaces $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ et les espaces de Sobolev traités plus bas. Donnons à titre d'exemple la définition des espaces de Hardy de fonctions analytiques (pour de plus amples détails voir Hoffmann).

On désigne par $\mathbf{H}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ le B-espace des fonctions analytiques $x(z)$ dans le disque unité ouvert D, pour lesquelles est finie la norme

$$\| x \| = \begin{cases} \sup\limits_{0 \leqslant r \leqslant 1} \left(\int\limits_0^{2\pi} |x(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{z \in D} |x(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Pour $1 < p < \infty$ les espaces $\mathbf{H}^p$ peuvent être de façon naturelle plongés dans $\mathbf{L}^p(0, 2\pi)$ sous forme d'un sous-espace complémentable. Pour $p = 1$ et ∞ cette opération n'est possible dans aucun $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$.

4.4. Soit D un domaine borné dans $\mathbf{R}^n$. On dira qu'une fonction $x(t)$ continue dans D est prolongeable en continuité à l'adhérence $\overline{D}$ si existe une fonction $\tilde{x}(t)$ continue sur $\overline{D}$ dont la restriction à D coïncide avec $x(t)$ (la fonction $\tilde{x}(t)$ est visiblement unique).

Appelons $\mathbf{C}(D)$ le B-espace de toutes les fonctions $x(t)$ continues dans D, prolongeables en continuité à $\overline{D}$, de norme

$$\| x \| = \sup_{t \in D} | x(t) |.$$

Il est aisé de voir que l'application $x \to \tilde{x}$ est une isométrie linéaire du B-espace $\mathbf{C}(D)$ sur $\mathbf{C}(\overline{D})$. D'où il résulte que l'espace $\mathbf{C}(\overline{D})$ est complet.

On dira qu'une fonction $x(t)$ admet l dérivées continues dans $\overline{D}$ si dans D existent toutes les dérivées partielles continues d'ordre $\leqslant l$, prolongeables en continuité à $\overline{D}$.

Appelons $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ le B-espace de toutes les fonctions $x(t)$ dans D possédant l dérivées continues dans $\overline{D}$, de norme

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \sup_{t \in D} \left| \frac{\partial^k x(t)}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}} \right|,$$

où $\sum\limits_{(k)}$ est la sommation de toutes les dérivées possibles d'ordre k.

Les espaces $\mathbf{C}(D)$ et $\mathbf{C}^{(l)}(D)$ joueront un rôle important dans les théorèmes d'immersion (voir chapitre XI et tome 2).

§ 5. Espace de Hilbert

5.1. L'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ se distingue de tous les espaces de dimension finie par le fait qu'y est défini un produit scalaire lié à la norme par une relation simple : le carré de la norme d'un élément est le produit scalaire de cet élément par lui-même.

De ce fait il y a lieu de considérer des espaces dans lesquels est défini le « produit scalaire » et qui sont munis d'une norme de la manière indiquée plus haut.

On dit qu'un espace vectoriel complexe $\mathbf{H}$ est un *espace muni du produit scalaire* si pour chaque couple d'éléments $x, y \in \mathbf{H}$ est défini le produit scalaire (x, y), nombre complexe vérifiant les conditions (axiomes) suivantes :

1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda (x_1, y) + \mu (x_2, y)$;
3) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ *).

La définition de l'espace muni du produit scalaire entraîne :

a) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda} (x, y_1) + \overline{\mu} (x, y_2)$
(axiomes 1) et 2)).

b) $(x, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, y) = 0$.
En effet $(x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0$.

---

*) Le produit scalaire est plus rarement défini sur un espace vectoriel réel. Cependant, si on le définit on admet que c'est un nombre réel et de plus l'on remplace la condition 1) par la condition $(y, x) = (x, y)$.

Dans la suite, lorsqu'on parlera d'un espace muni du produit scalaire on sous-entendra, sauf mention du contraire, que cet espace est complexe, bien que tous les résultats, à l'exception de la théorie spectrale des opérateurs, soient valables pour un espace réel.

c) $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ (inégalité de Cauchy-Bouniakovski). Pour démontrer cette proposition considérons l'expression

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y).$$

L'axiome 3) dit que cette relation est positive quel que soit λ. En supposant que $(y, y) > 0$ (dans le cas contraire $y = 0$ et l'inégalité à démontrer est évidente), posons $\lambda = -(x, y)/(y, y)$. En vertu de ce qui précède

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $(x, x)(y, y) - |(x, y)|^2 \geqslant 0$, c.q.f.d.

Si dans un espace H muni du produit scalaire l'on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (x \in \mathrm{H}), \tag{1}$$

alors H est un espace normé. En effet, des axiomes de l'espace normé seule l'inégalité triangulaire ne découle pas directement de la définition de H. Prouvons-la. Soient $x, y \in \mathrm{H}$. L'inégalité de Cauchy-Bouniakovski donne

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = [\|x\| + \|y\|]^2.$$

Un espace normé H est dit *unitaire* si on peut le munir d'un produit scalaire lié avec la norme par la relation (1).

H étant un espace normé, il en possède toutes les propriétés. En particulier, il est justiciable des faits élémentaires indiqués dans 1.1. Notons encore quelques propositions simples particulières aux espaces munis du produit scalaire.

1) Continuité du produit scalaire. Si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ alors $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

En effet, l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski donne

$$|(x, y) - (x_n, y_n)| \leqslant |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leqslant \leqslant \|x\|\,\|y - y_n\| + \|x - x_n\|\,\|y_n\|.$$

La suite convergente $\{y_n\}$ étant bornée, le second membre de cette inégalité tend vers 0, donc $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

2) On a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]\ ^{*)}, \quad \forall x, \forall y \in \mathrm{H}. \tag{2}$$

*) Cette relation est la généralisation du fait géométrique élémentaire que la somme des carrés des diagonales du parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés.

Si la relation (2) est vérifiée pour des éléments quelconques x, y d'un espace normé X, alors cet espace est unitaire, c'est-à-dire qu'on peut le munir du produit scalaire de telle sorte que la norme soit définie par l'égalité (1).

En effet, par définition de la norme on a

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,\ x+y)+(x-y,\ x-y)=$$
$$=(x,\ x)+(x,\ y)+(y,\ x)+(y,\ y)+$$
$$+(x,\ x)-(x,\ y)-(y,\ x)+(y,\ y)=2\,[\|x\|^2+\|y\|^2].$$

Le fait que H est un espace unitaire signifie que la norme est introduite dans H d'une façon spéciale au moyen du produit scalaire. La complétion $\overline{\mathrm{H}}$ de l'espace H sera également un espace normé (1.4). Montrons que le produit scalaire dans H se généralise à $\overline{\mathrm{H}}$, faisant de lui un espace unitaire.

3) La complétion $\overline{\mathrm{H}}$ d'un espace unitaire H est elle-même espace unitaire.

En effet, soient $\xi,\ \eta\in\overline{\mathrm{H}}$. Il existe des suites $\{x_n\},\ \{y_n\}\subset\mathrm{H}$ telles que $x_n\to\xi,\ y_n\to\eta$. En reprenant presque intégralement les raisonnements de la démonstration de 1), on s'assure qu'il existe $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,\ y_n)$ ne dépendant pas du choix des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ et déterminée uniquement par les éléments ξ et η. Du fait qu'en vertu de 1) $\lim(x_n,\ y_n)=(\xi,\ \eta)$ pour $\xi,\ \eta\in\mathrm{H}$, il est naturel de poser pour $\xi,\ \eta\in\overline{\mathrm{H}}$

$$(\xi,\ \eta)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y_n).$$

Il est immédiat de vérifier que par définition $\overline{\mathrm{H}}$ est un espace muni du produit scalaire. Compte tenu de la relation existant entre la norme dans $\overline{\mathrm{H}}$ et la norme dans H indiquée dans 1.4, on aura

$$\|\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\sqrt{(x_n,\ x_n)}=\sqrt{(\xi,\ \xi)}$$
$$(\xi\in\overline{\mathrm{H}},\quad x_n\to\xi,\quad x_n\in\mathrm{H},\quad n=1,\ 2,\ \ldots),$$

ce qui revient à dire que l'espace $\overline{\mathrm{H}}$ est unitaire.

Notons encore une proposition assez évidente.

4) Un sous-espace d'un espace unitaire est aussi espace unitaire.

5.2. L'espace unitaire complet présente le plus grand intérêt. Un tel espace est dit *hilbertien* (du nom du mathématicien allemand D. Hilbert) *).

L'espace hilbertien est la généralisation immédiate de l'espace euclidien, c'est pourquoi sa « géométrie » est plus proche de la géométrie euclidienne que celle de tout autre B-espace. L'espace hilbertien possède de nombreuses propriétés de l'espace euclidien que n'ont pas les B-espaces génériques (cf. par exemple la relation (2)). Cette circonstance a permis de développer l'analyse fonctionnelle

*) On exige parfois que l'espace soit de dimension infinie. L'espace hilbertien abstrait a été introduit par Neumann [1].

sur la base de l'espace hilbertien d'une manière bien plus approfondie et plus complète qu'avec les espaces normés généraux, grâce à quoi la théorie de l'espace hilbertien s'est érigée en discipline indépendante importante de l'analyse fonctionnelle avec ses résultats et méthodes qui n'entrent pas dans le cadre de l'analyse fonctionnelle générale à laquelle est essentiellement consacré ce livre. Donc, l'espace hilbertien ne servira ici et dans la suite en principe que pour illustrer des faits relatifs à la théorie générale.

5.3. Un exemple concret d'espace hilbertien est l'espace l^2. Le produit scalaire est défini dans cet espace par l'égalité

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots), \ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots)).$$

La norme, définie d'après (1) au moyen du produit scalaire

$$\| x \| = [\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2]^{1/2}.$$

est confondue avec celle définie dans 2.3. Pour cette raison nous conserverons la notation précédente l^2 pour l'espace envisagé. Nous avons démontré que cet espace est complet.

De façon plus générale, soit (T, Σ, μ) un espace mesuré. $L^2(T, \Sigma, \mu)$ est un espace hilbertien si l'on pose

$$(x, y) = \int_T x(t), \overline{y(t)} \, d\mu.$$

La norme dans L^2 est confondue avec celle définie par la formule (1). Voyons maintenant un cas particulier. Soit une fonction $\varphi \in L^1(a, b)$ telle que $\varphi(t) > 0$ p.p. (l'intervalle peut être infini). Posons

$$\nu(A) = \int_A \varphi(t) \, dt$$

pour tous les ensembles A mesurables Lebesgue et désignons par $L^2_\varphi(a, b)$ l'espace hilbertien des fonctions de carrés sommables pour la mesure ν. Ceci étant, le produit scalaire se définit de toute évidence par la formule

$$(x, y) = \int_a^b \varphi(t) \, [x(t) \overline{y(t)}] \, dt.$$

Si $\varphi(t) = 1$, alors $L^2_\varphi(a, b) = L^2(a, b)$. On a déjà démontré que les espaces l^2 et $L^2_\varphi(a, b)$ sont séparables.

Un exemple d'espace hilbertien non séparable est l'ensemble H_c des fonctions définies sur la droite numérique tout entière et pos-

sédant un nombre au plus dénombrable de valeurs distinctes de zéro. Ceci étant, on admet que

$$\sum_t |x(t)|^2 < \infty \text{ *)}.$$

Définissons le produit scalaire dans $\mathbf{H}_c$ par la formule

$$(x, y) = \sum_t x(t)\,\overline{y(t)}.$$

On laisse au lecteur le soin de prouver la complétude de cet espace en utilisant celle de $\mathbf{l}^2$.

Si l'on désigne par x_τ l'élément de $\mathbf{H}_c$:

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, & t = \tau, \\ 0, & t \neq \tau, \end{cases}$$

il est immédiat que $\| x_\tau - x_{\tau'} \| = \sqrt{2}$ (si $\tau \neq \tau'$), d'où il suit que $\mathbf{H}_c$ n'est pas séparable.

5.4. La notion d'orthogonalité est particulièrement importante dans l'étude des espaces hilbertiens.

On dit que deux éléments x et y d'un espace hilbertien $\mathbf{H}$ sont *orthogonaux* si $(x, y) = 0$ et l'on note $x \perp y$.

Si un élément fixe $x \in \mathbf{H}$ est orthogonal à chaque élément d'un ensemble $E \subset \mathbf{H}$, on dit que *x est orthogonal à E* et l'on écrit $x \perp E$.

Enfin si les éléments de deux ensembles E_1 et E_2 sont deux à deux orthogonaux on dit que ces ensembles sont *orthogonaux* et l'on écrit $E_1 \perp E_2$.

Indiquons quelques faits simples relatifs à ces notions.

a) Si $x \perp y_1$ et $x \perp y_2$, alors $x \perp \lambda y_1 + \mu y_2$.

b) Si $x \perp y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $y_n \to y$, alors $x \perp y$.

Ceci est une conséquence immédiate de la continuité du produit scalaire (cf. 1) 5.1).

c) Si $x \perp E$, alors $x \perp \overline{\mathscr{L}}(E)$.

Pour le prouver il faut utiliser a) et b).

d) Si $x \perp E$, où E est un ensemble fondamental dans $\mathbf{H}$, c'est-à-dire si $\overline{\mathscr{L}}(E) = \mathbf{H}$, alors $x = \mathbf{0}$.

En effet, on a alors $x \perp \mathbf{H}$ et par suite x est orthogonal à lui-même, c'est-à-dire $(x, x) = 0$, ce qui équivaut à $x = \mathbf{0}$.

e) L'ensemble de tous les éléments orthogonaux à un ensemble donné E est un sous-espace de $\mathbf{H}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel fermé **). Ce sous-espace est appelé *orthocomplément* de l'ensemble E.

---

*) La fonction $x(t)$ est non nulle seulement pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de t. Donc la somme écrite peut être traitée comme une série ordinaire.

**) Dans le cas d'un espace hilbertien le terme « sous-espace » désignera toujours dans la suite un sous-espace vectoriel fermé.

Le théorème suivant est fondamental en théorie de l'espace hilbertien.

THÉORÈME 1. *Soient* $\mathbf{H}_1$ *un sous-espace d'un espace hilbertien* $\mathbf{H}$ *et* $\mathbf{H}_2$ *son orthocomplément. Tout élément* $x \in \mathbf{H}$ *peut être représenté de façon unique sous la forme*

$$x = x' + x'' \quad (x' \in \mathbf{H}_1,\ x'' \in \mathbf{H}_2). \tag{3}$$

De plus l'élément x' *exprime la distance de* x *à* $\mathbf{H}_1$, *c'est-à-dire*

$$\| x - x' \| = \rho\,(x,\ \mathbf{H}_1)\ ^{*)}. \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$d = \rho\,(x,\ \mathbf{H}_1)$$

et trouvons les éléments $x_n \in \mathbf{H}_1$ tels que

$$\| x - x_n \|^2 < d^2 + 1/n^2 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

La relation (2) donne

$$\| x_n - x_m \|^2 + \| (x - x_n) + (x - x_m) \|^2 = \\ = 2\,[\| x - x_n \|^2 + \| x - x_m \|^2]. \tag{6}$$

Comme $\frac{x_m + x_n}{2} \in \mathbf{H}_1$, on a

$$\| (x - x_n) + (x - x_m) \|^2 = 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Donc, de (6) et compte tenu de (5) et de cette minoration il vient

$$\| x_n - x_m \|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Donc, la suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. L'espace $\mathbf{H}$ étant complet, il existe $x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. En outre $x' \in \mathbf{H}_1$ (puisque celui-ci est fermé). En passant à la limite dans (5), on trouve $\| x - x' \| \leqslant d$, et puisque pour tout élément de $\mathbf{H}_1$, y compris pour x', on doit avoir $\| x - x' \| \geqslant d$, il vient

$$\| x - x' \| = d. \tag{7}$$

Prouvons maintenant que l'élément $x'' = x - x'$ est orthogonal à $\mathbf{H}_1$ et appartient de ce fait à $\mathbf{H}_2$. Considérons un élément $y \in \mathbf{H}_1$ non nul. Pour tout λ on a $x' + \lambda y \in \mathbf{H}_1$, de sorte que

$$\| x'' - \lambda y \|^2 = \| x - (x' + \lambda y) \|^2 \geqslant d^2,$$

ce qu'on peut encore écrire compte tenu de (7)

$$-\bar{\lambda}\,(x'',\ y) - \lambda\,(y,\ x'') + |\lambda|^2\,(y,\ y) \geqslant 0.$$

*) Dans sa forme actuelle ce théorème a été prouvé par Rellich [1].

En particulier pour $\lambda = (x'', y)/(y, y)$ on en déduit

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$|(x'', y)|^2 \leqslant 0,$$

ce qui n'a lieu que lorsque $(x'', y) = 0$, $x'' \perp y$.

Donc l'écriture de x sous la forme (3) et la relation (4) sont établies.

Montrons que la représentation (3) est unique. En effet, si

$$x = x_1' + x_1'' \quad (x_1' \in \mathbf{H}_1 \text{ et } x_1'' \in \mathbf{H}_2),$$

en comparant avec (3) on obtient

$$x' - x_1' = x_1'' - x''.$$

L'élément du premier membre appartient à $\mathbf{H}_1$, celui du second à $\mathbf{H}_2$, donc $x' - x_1' \perp x_1'' - x''$, d'où $x' - x_1' = x_1'' - x'' = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Les éléments de x' et x'' définis de façon unique par l'élément x s'appellent *projections* de l'élément x sur les sous-espaces $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ respectivement.

On dit qu'un système d'éléments $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ est *complet* dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$ si l'ensemble $\{x_\alpha\}$ est fondamental (voir II.3.2) dans $\mathbf{H}$, c'est-à-dire $\mathbf{H} = \overline{\mathcal{L}}(\{x_\alpha\})$.

COROLLAIRE. *Pour qu'un système d'éléments* $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ *soit complet dans un espace* $\mathbf{H}$, *il faut et il suffit qu'il n'existe pas d'élément non nul orthogonal à chaque élément du système.*

En effet, la condition nécessaire résulte de la proposition d) de 5.4. La condition est suffisante, puisque si $\{x_\alpha\}$ est un système non complet, alors le sous-espace $\mathbf{H}_1 = \overline{\mathcal{L}}(\{x_\alpha\}) \neq \mathbf{H}$, et par suite en prenant un élément $x \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{H}_1$ et en le décomposant en une somme de projections $x = x' + x''$ $(x' \in \mathbf{H}_1,\ x'' \perp \mathbf{H}_1)$, on aura $x'' \neq 0$ et $x'' \perp x_\alpha$ $(\alpha \in A)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

5.5. On dit qu'un système d'éléments $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ d'un espace hilbertien $\mathbf{H}$ est *orthogonal* si deux quelconques de ses éléments sont orthogonaux. Si de plus la norme de chaque élément x_α est égale à l'unité, alors ce système est dit *orthonormal* ou *orthonormé*.

Un exemple important de système orthogonal dans $L^2(a, b)$ est le système des fonctions trigonométriques 1, $\cos \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, $\sin \frac{2\pi(t-a)}{b-a}$, ..., $\cos \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, $\sin \frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$. Ce système est complet puisque son enveloppe linéaire, l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques,

est dense dans $L^2(a, b)$. Pour s'en assurer on remarquera tout d'abord que l'ensemble de toutes les fonctions bornées (mesurables) est dense dans $L^2(a, b)$. Ensuite, grâce au théorème de Lusin, on établit que l'ensemble des fonctions périodiques (c'est-à-dire prenant des valeurs égales aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$) continues sera dense dans cet ensemble. Enfin, en vertu du théorème de Weierstrass, on conclut que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues.

Un autre exemple de système orthogonal dans $L^2(a, b)$ est le *système de Rademacher*, composé des fonctions

$$x_n(t) = (-1)^k$$

$$\left(\frac{k}{2^n}(b-a) < t-a < \frac{k+1}{2^n}(b-a); \quad k=0, 1, \ldots, 2^n-1; \quad n=0, 1, \ldots\right).$$

Ce système n'est pas complet. En effet, la fonction $x(t) = (t-a)(t-b) + \frac{(b-a)^2}{6}$ est orthogonale à toutes les fonctions du système.

Le système $\{x_n\}$, $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, est orthogonal dans l^2. Il est clair que ce système est complet.

L'ensemble $\{x_\tau\}$, où x_τ sont les éléments définis plus haut dans 5.3, est un système orthogonal dans H_c.

Si un système orthogonal ne contient pas d'élément nul il est linéairement indépendant. En effet, si existait la dépendance linéaire :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} = 0,$$

en multipliant scalairement les deux membres de cette égalité par x_{α_j}, on obtiendrait $\lambda_j \| x_{\alpha_j} \|^2 = 0$.

On passe sans peine d'un système orthogonal à un système orthonormal en divisant chaque élément par sa norme (on suppose que le système ne contient pas l'élément nul). Le passage d'un système quelconque à un système orthonormal est plus compliqué. Nous allons démontrer le théorème d'orthogonalisation (au sens de Schmidt) pour le cas de systèmes dénombrables.

THÉORÈME 3 (d'orthogonalisation). *Soit $\{y_n\}$ un système linéairement indépendant d'éléments d'un espace hilbertien* H. *Il existe un système orthonormal $\{x_n\}$ tel que*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} y_k \quad (\lambda_n^{(n)} \neq 0; \quad n=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Nous donnons deux démonstrations de ce théorème.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. Posons

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1 \quad (\lambda_1^{(1)} = 1/\| y_1 \|)$$

et admettons qu'on ait déjà construit des éléments deux à deux orthogonaux et normés $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ liés par les relations (8) à y_1,

$y_2, \ldots, y_{n-1}$. Désignons par H'_n l'enveloppe linéaire des éléments $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ et par H''_n l'orthocomplément de H'_n. Comme $y_n \notin H'_n$, dans la décomposition

$$y_n = y'_n + y''_n \quad (y'_n \in H'_n, \quad y''_n \in H''_n)$$

la projection $y''_n \neq 0$. En posant

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n \quad (\lambda_n^{(n)} = 1/\| y''_n \|),$$

on aura $\| x_n \| = 1$. Vu que $x_n \perp H'_n$ et $x_k \in H'_n$ $(k < n)$, il vient $x_n \perp x_k$ $(k < n)$.

D'autre part

$$x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n = \lambda_n^{(n)} y_n - \lambda_n^{(n)} y'_n.$$

Le fait que $y'_n \in H'_n$ entraîne

$$y'_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} y_k.$$

En posant $\lambda_k^{(n)} = -\alpha_k^{(n)} \lambda_n^{(n)}$ $(k < n)$, on trouve

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} y_k.$$

La démonstration de ce théorème s'achève par récurrence.

Remarque 1. Les éléments y_n peuvent être exprimés au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puisque $\lambda_n^{(n)} \neq 0$:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)} x_k \quad \left(\mu_n^{(n)} = \frac{1}{\lambda_n^{(n)}}; \quad n = 1, 2, \ldots\right). \tag{9}$$

Remarque 2. Les éléments x_n ne sont pas définis de façon unique par les éléments y_n. Cependant si l'on exige que $\lambda_n^{(n)} > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alors le système $\{x_n\}$ sera unique.

En effet, supposons qu'existent deux systèmes $\{x_n\}$ et $\{\tilde{x}_n\}$ vérifiant la condition imposée. En utilisant les relations (8) et (9) et les relations analogues pour le système $\{\tilde{x}_n\}$, nous pouvons exprimer les éléments du système $\{\tilde{x}_n\}$ en fonction de ceux de $\{x_n\}$, c'est-à-dire obtenir une relation de la forme

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} x_k. \tag{10}$$

Il est aisé de voir que le coefficient $\beta_n^{(n)}$ est positif (il est égal au produit $\tilde{\lambda}_n^{(n)} \mu_n^{(n)}$, où $\tilde{\lambda}_n^{(n)}$ représente le coefficient correspondant de la formule (8) pour le système $\{\tilde{x}_n\}$), d'où il résulte que $\tilde{x}_1 = x_1$. Si l'on a déjà démontré que $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$, $\ldots$, $\tilde{x}_{n-1} = x_{n-1}$, en multipliant scalairement les deux mem-

bres de l'égalité (10) par x_j, on aura $0=\beta_j^{(n)}$ $(j<n)$, c'est-à-dire $\widetilde{x}_n=\beta_n^{(n)}x_n$. Or, du fait que $\|\widetilde{x}_n\|=\|x_n\|=1$, on a $\beta_n^{(n)}=1$ et par suite $\widetilde{x}_n=x_n$.

Deuxième démonstration. Soit

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}(y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n)\\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n)\end{vmatrix},\quad \Delta_0=1 \text{ (\textit{déterminant de Gram})},$$

$$x_n'=\begin{vmatrix}(y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_{n-1}) & y_1\\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_{n-1}) & y_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_{n-1}) & y_n\end{vmatrix},$$

le dernier déterminant étant la somme des produits des éléments de la dernière colonne par les cofacteurs correspondants. Il st clair que

$$(x_n', y_n) = \Delta_n, \tag{11}$$

$$(x_n', y_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \tag{12}$$

La dernière relation découle du fait que deux colonnes (la k-ième et la n-ième) seront identiques dans le déterminant du premier membre.

Si l'on multiplie (scalairement) la dernière colonne du déterminant x_n' par x_n', alors compte tenu de (11) et de (12) on obtient un déterminant dont tous les éléments de la dernière colonne seront nuls à l'exception du dernier qui, lui, sera égal à Δ_n. En développant le déterminant obtenu suivant les éléments de la dernière colonne on est amené à la relation

$$(x_n', x_n') = \Delta_n\Delta_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Vu que l'élément $x_n' \neq 0$ (sinon les éléments $y_1, y_2, \dots, y_n$ seraient linéairement dépendants), on trouve que $\Delta_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Notons enfin que l'élément x_k' $(k<n)$ exprimé linéairement en fonction de $y_1, y_2, \dots, y_k$ sera orthogonal à x_n' en vertu de (12).

D'après ce qui précède, nous obtenons la suite orthonormale cherchée si l'on pose

$$x_n=\frac{x_n'}{\|x_n'\|}=\frac{x_n'}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}} \quad (n=1, 2, \dots). \tag{13}$$

5.6. Utilisons les résultats obtenus pour construire un système de polynômes orthogonaux par rapport au poids.

Dans l'espace $L_\varphi^2(a, b)$ prenons

$$y_n(t) = t^n \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{14}$$

pour $\{y_n\}$. L'orthogonalisation de cette suite nous conduit à une suite $\{x_n\}$ telle que

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} t^k \quad (\lambda_n^{(n)} \neq 0; \quad n = 0, 1, \ldots).$$

et de plus

$$(x_m, x_n) = \int_a^b \varphi(t)\, x_m(t)\, \overline{x_n(t)}\, dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Les polynômes $x_n(t)$ sont dits *orthogonaux de poids* $\varphi(t)$. Ils jouent un grand rôle en théorie constructive des fonctions. Le système (14) étant complet, le système de polynômes orthogonaux le sera également.

On peut expliciter les polynômes orthogonaux au moyen de la formule (13). Dans ce cas

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad c_{jk} = \int_a^b \varphi(t)\, t^{j+k}\, dt \quad (j, k = 0, 1, \ldots, n),$$

de sorte que

$$x_n(t) = \frac{x'(t)}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} = \frac{\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0n-1} & 1 \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1n-1} & t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{nn-1} & t^n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

De ces formules il résulte entre autres que les coefficients des polynômes x_n sont réels.

Si $\varphi(t) \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$, les polynômes orthogonaux sont appelés *polynômes de Legendre* et notés $P_n(t)$. On démontre que

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n] \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Pour $\varphi(t) = (1-t)^{-\alpha}(1+t)^{\beta}$, $a = -1$, $b = 1$, on obtient les *polynômes de Jacobi*

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(t) = k_n (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}], \tag{16}$$

où

$$k_n = (-1)^n \sqrt{2^{-(\alpha+\beta+2n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)} \frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!}}.$$

En particulier pour $\alpha = \beta = -1/2$ on obtient les *polynômes de Tchébychev* que l'on rencontre souvent dans divers problèmes de la théorie des fonctions.

Pour $\varphi(t) = e^{-t}$; $a = 0$, $b = \infty$ on obtient les *polynômes de Laguerre*

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t} t^n]. \tag{17}$$

Enfin, si $\varphi(t) = e^{-t^2}$; $a = -\infty$, $b = \infty$, les polynômes orthogonaux, qui sont notés $H_n(t)$ dans ce cas, s'appellent *polynômes d'Hermite*

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}] \text{ *)}. \tag{18}$$

5.7. La suite de l'exposé est essentiellement consacrée à l'espace hilbertien séparable. On constate que les systèmes orthogonaux sont tous dénombrables dans des espaces séparables. Cette circonstance n'est pas fortuite. Plus exactement on a le

THÉORÈME 3. *Un système orthonormal* $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ *d'un espace hilbertien séparable* H *est au plus dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit D un ensemble dénombrable dense dans H. Pour chaque x_α trouvons $y_\alpha \in D$ tel que

$$\| x_\alpha - y_\alpha \| < 1/2.$$

A des éléments x_α et $x_{\alpha'}$ distincts correspondent des éléments y_α et $y_{\alpha'}$ distincts. En effet

$$\| y_\alpha - y_{\alpha'} \|^2 = \| (x_\alpha - x_{\alpha'}) + (x_{\alpha'} - y_{\alpha'}) + (y_\alpha - x_\alpha) \| \geqslant$$
$$\geqslant \| x_\alpha - x_{\alpha'} \| - [\| x_{\alpha'} - y_{\alpha'} \| + \| y_\alpha - x_\alpha \|] > \sqrt{2} - 1 > 0,$$

puisque

$$\| x_\alpha - x_{\alpha'} \|^2 = (x_\alpha - x_{\alpha'}, x_\alpha - x_{\alpha'}) = (x_\alpha, x_\alpha) + (x_{\alpha'}, x_{\alpha'}) = 2.$$

Donc l'ensemble $\{x_\alpha\}$ est équivalent à une partie de l'ensemble dénombrable D et par suite il est lui-même au plus dénombrable.

Le théorème prouvé est complété par le

THÉORÈME 4. *Si un espace hilbertien séparable* H *est de dimension infinie, il contient un système dénombrable orthonormal complet.*

DÉMONSTRATION. Prenons un ensemble $D = \{z_n\}$ dénombrable, dense dans H et construisons un système $\{y_k\}$ linéairement indépendant complet dans H. A cet effet admettons que $z_1 \neq 0$ et posons $y_1 = z_1$. Ensuite pour y_2 prenons l'élément z_{n_2} d'indice minimal $n_2 \geqslant 2$ tel que y_1 et $y_2 = z_{n_2}$ soient linéairement indépendants. En poursuivant cette procédure on est amené au système $\{y_k\}$ cherché. En effet, $\{y_k\}$ est un système complet, puisque tout élément z_n est visiblement une combinaison linéaire des éléments $y_j = z_{n_j}$ $(n_j < n)$, de sorte que $D \subset \mathcal{L}(\{y_k\})$ et par suite $\overline{\mathcal{L}}(\{y_k\}) = \mathrm{H}$.

En appliquant la procédure d'orthogonalisation au système $\{y_k\}$, on obtient un système orthonormal complet qui de toute évidence est un système dénombrable.

*) Le lecteur trouvera un exposé plus complet des polynômes orthogonaux et en particulier des démonstrations des formules (15) à (18) dans le livre Natanson [I] (ou encore dans Szegö).

5.8. Soit donné un système orthonormal $\{x_k\}$ dans un espace hilbertien H. Supposons d'autre part que $x \in \mathbf{H}$. Les nombres

$$a_k = (x, x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

sont appelés *coefficients de Fourier* de l'élément x suivant le système orthonormal considéré, et la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

série de Fourier de l'élément x.

Considérons le sous-espace $\mathbf{H}_n = \mathscr{L}(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ dont les éléments sont toutes les combinaisons linéaires des n premiers éléments du système orthonormal donné.

On a le

THÉORÈME 5. *L'intervalle* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ *de la série de Fourier d'un élément* x *est la projection de cet élément sur le sous-espace* $\mathbf{H}_n$.

DÉMONSTRATION. Comme

$$x = s_n + (x - s_n)$$

et que $s_n \in \mathbf{H}_n$, il suffit de prouver que $x - s_n \perp \mathbf{H}_n$. Or, il est clair que $x - s_n \perp x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, donc en vertu du point c) de 5.4 on a $x - s_n \perp \mathbf{H}_n$, c.q.f.d.

Ceci et le théorème 1 entraînent le

COROLLAIRE 1. *Pour tout élément* $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathbf{H}_n$, *on a*

$$\| x - s_n \| = \rho(x, \mathbf{H}_n) \leqslant \| x - z \|.$$

D'autre part

$$\| x \|^2 = \| s_n \|^2 + \| x - s_n \|^2 \geqslant \| s_n \|^2 \tag{19}$$

$$\| s_n \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | a_k |^2, \tag{20}$$

d'où il résulte le

COROLLAIRE 2. *On a l'inégalité (de Bessel)* :

$$\sum_{k=1}^{n} | a_k |^2 \leqslant \| x \|^2.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |^2 \leqslant \| x \|^2. \tag{21}$$

Si dans (21) l'égalité est réalisée pour un $x \in \mathbf{H}$, on dit qu'est réalisée l'*égalité de Parseval* ou que *pour x est vérifiée l'équation de fermeture.*

THÉORÈME 6. *La série de Fourier de tout élément $x \in \mathbf{H}$ converge toujours et sa somme est la projection de x sur le sous-espace $\mathbf{H}_0 = \overline{\mathcal{L}}(\{x_k\})$.*

Pour que la somme de la série de Fourier soit égale à un élément donné x, il faut et il suffit que l'équation de fermeture soit vérifiée pour cet élément.

DÉMONSTRATION. De (21) il suit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ est convergente. En notant comme précédemment s_n la somme partielle de la série de Fourier, on obtient

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où résulte la convergence de la série de Fourier.

Soit $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Puisque $s \in \mathbf{H}_0$ et

$$x = s + (x - s),$$

on peut, comme dans la démonstration du théorème 5, se contenter de prouver que $x - s \perp \mathbf{H}_0$. Cette démonstration s'effectue encore en utilisant c) de 5.4.

Enfin si en tenant compte de (20) on récrit (19) sous la forme

$$\| x - s_n \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2,$$

on s'assure sans peine de la véracité de la deuxième partie du théorème.

Si le système $\{x_k\}$ est complet, alors $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$ et la projection de tout élément $x \in \mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}_0$ est confondue avec cet élément. Ceci nous conduit au

COROLLAIRE 1. *Si le système $\{x_k\}$ est complet, la série de Fourier de tout $x \in \mathbf{H}$ converge vers x.*

On dit qu'un système orthonormal est *fermé* si l'équation de fermeture est vérifiée pour chaque $x \in \mathbf{H}$.

De ce qui précède il suit le

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un système soit fermé il faut et il suffit qu'il soit complet.*

En effet, d'après le théorème 6 l'équation de fermeture est satisfaite pour tous les $x \in \mathbf{H}_0$ et pour eux seuls, donc la fermeture du système équivaut à l'égalité $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$ qui, à son tour, exprime la complétude de ce système.

REMARQUE. Si l'équation de fermeture est satisfaite pour un ensemble E fondamental dans $\mathbf{H}$, alors le système orthonormal donné est fermé.

En effet, $\mathbf{H}_0 \supset E$ implique $\mathbf{H}_0 = \overline{\mathcal{L}}(E) = \mathbf{H}$.

Donc, si $\{x_n\}$ est un système orthonormal complet dans $\mathbf{H}$, tout élément $x \in \mathbf{H}$ se représente par sa série de Fourier:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Pour cette raison un système orthonormal complet est appelé *base orthonormale* (ou *orthonormée*) de l'espace hilbertien $\mathbf{H}$ (cf. tome 2, XII.7.2).

THÉORÈME 7 (Riesz-Fischer). *Soit donnée une suite numérique* $\{c_k\}$ *pour laquelle la série* $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ *est convergente et soit fixé un système orthonormal* $\{x_k\}$ *dans* $\mathbf{H}$. *Il existe alors un élément unique* $x \in \mathbf{H}$ *tel que ses coefficients de Fourier* $a_k = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *et, de plus l'équation de fermeture est satisfaite pour* x.

DÉMONSTRATION. De même que dans la démonstration du théorème précédent on s'assure que la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ est convergente. Soit x sa somme. Alors

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

puisque pour $m \geqslant n$ on aura $\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n$. Que l'équation de fermeture soit vérifiée pour x découle du théorème précédent.

L'unicité de x résulte également du théorème 6, puisque l'élément pour lequel est vérifiée l'équation de fermeture doit être la somme de sa série de Fourier.

Voyons maintenant l'équation de fermeture généralisée.

Supposons que l'équation de fermeture est vérifiée pour des éléments $x, y \in \mathbf{H}$. Si $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ sont les suites correspondantes des coefficients de Fourier de ces éléments, alors

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b}_k. \tag{22}$$

En effet, en vertu du théorème 6

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k;$$

donc

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \sum_{k=1}^{n} b_k x_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k.$$

Si le système orthonormé considéré est complet, l'équation de fermeture généralisée est vérifiée quels que soient $x, y \in \mathbf{H}$.

Si dans un espace hilbertien séparable $\mathbf{H}$ de dimension infinie il existe un système orthonormal non complet $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, alors un sous-espace $\mathbf{H}_0$ engendré par $\{x_k\}$ est distinct de $\mathbf{H}$. Désignons par $\widetilde{\mathbf{H}}$ l'orthocomplément de $\mathbf{H}_0$. Le sous-espace $\widetilde{\mathbf{H}}$ est un espace hilbertien séparable, donc on peut en extraire un système orthonormal complet au plus dénombrable $\{x_k\}$ $(k = 0, -1, -2, \ldots)$. En l'unissant au système initial on obtient le système $\{x_k\}$ $(k = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ qui sera complet dans l'espace $\mathbf{H}$ tout entier. En effet, tout élément $y \in \mathbf{H}$ orthogonal à tous les x_k $(k = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ doit être orthogonal au sous-espace $\mathbf{H}_0$, c'est-à-dire on doit avoir $y \in \widetilde{\mathbf{H}}$. Alors, du fait que $\{x_k\}$ $(k = 0, -1, \ldots)$ est un système complet dans $\widetilde{\mathbf{H}}$, il vient $y = 0$.

Signalons deux faits de la théorie des fonctions à variable réelle dont la démonstration découle des résultats généraux mentionnés plus haut.

Un système trigonométrique étant complet dans l'espace $\mathbf{L}^2(a, b)$, le corollaire 1 du théorème 6 nous dit que toute fonction de carré sommable se décompose en une série (trigonométrique) de Fourier convergeant en moyenne (avec un exposant 2).

Le théorème de Riesz-Fischer et l'inégalité (21) entraînent qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction sommable donnée soit élément de $\mathbf{L}^2$ est que la série des carrés des modules de ses coefficients de Fourier suivant le système trigonométrique soit convergente.

Il est intéressant de noter que la démonstration de tels résultats pour d'autres classes de fonctions présente de grosses difficultés.

5.9. Prouvons en conclusion que deux espaces hilbertiens séparables quelconques de dimension infinie sont linéairement isométriques (cf. 1.3), plus exactement qu'entre leurs éléments on peut établir une correspondance biunivoque respectant les opérations linéaires et le produit scalaire (donc la norme). Soient $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}'$ de tels espaces. En vertu du théorème 4, il existe des systèmes orthonormaux complets dénombrables $\{x_k\}$ dans $\mathbf{H}$ et $\{x_k'\}$ dans $\mathbf{H}'$. Soit $x \in \mathbf{H}$ un élément quelconque. Désignons par $\{a_k\}$ la suite des coefficients de Fourier de cet élément. Le corollaire 1 du théorème 6 donne

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k,$$

et de plus $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ en vertu de l'inégalité (21). En appliquant le théorème de Riesz-Fischer à la suite $\{a_k\}$ (dans l'espace H') on trouve un élément $x' \in H'$ possédant les mêmes coefficients de Fourier que l'élément x. En outre

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x'_k.$$

C'est cet élément x' que nous allons associer à l'élément x. Cette correspondance vérifie toutes les conditions de 1.3 (au lieu de l'égalité des normes on a ici l'égalité des produits scalaires des éléments correspondants). Sans nous arrêter à la vérification de l'invariance des opérations algébriques, en raison de sa simplicité, montrons que si $x, y \in H$ et x' et y' sont les éléments correspondants de H', alors $(x, y) = (x', y')$. En effet, les systèmes $\{x_k\}$ et $\{x'_k\}$ étant complets, l'équation de fermeture généralisée (22) est vérifiée pour les éléments x, y, de même que pour x', y', c'est-à-dire

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k,$$

où $\{a_k\}$ désigne la suite des coefficients de Fourier de l'élément x (et de x'), et $\{b_k\}$ celle de l'élément y (et de y').

En particulier, tout espace hilbertien séparable H de dimension infinie est linéairement isométrique (au sens indiqué plus haut) à l'espace l^2. Ce résultat a été établi dans l'article de Neumann [1].

Notons, sans le démontrer, un résultat analogue pour des espaces hilbertiens quelconques. Plus exactement, on peut montrer que la puissance d'un système orthonormal complet est un invariant de l'espace (la dimension de cet espace) et que les espaces ayant la même dimension sont linéairement isométriques. Voir la démonstration de ce fait par exemple dans Ahiezer et Glazman.

CHAPITRE V

OPÉRATEURS ET FONCTIONNELLES LINÉAIRES

§ 1. Espace des opérateurs et espace dual

1.1. Notre étude portant sur les opérateurs linéaires et parfois sur les opérateurs non linéaires, nous allons dans ce point introduire des notations se rapportant à ces deux cas.

Soient **X** et **Y** deux espaces (métriques ou normés) et un ensemble $\Omega \subset \mathbf{X}$.

Si à chaque $x \in \Omega$ on associe un élément $y = U(x) \in \mathbf{Y}$, on dit qu'est défini sur Ω un *opérateur* U envoyant (ou appliquant) Ω dans **Y** (ou de Ω dans **Y**). L'ensemble Ω s'appelle *ensemble de définition* de l'opérateur U et se note Ω_U. L'ensemble Δ_U de tous les éléments de la forme $y = U(x)$ s'appelle *domaine de valeurs* de l'opérateur U *). Si $\Omega_U = \mathbf{X}$ et $\Delta_U \subset \mathbf{X}$, c'est-à-dire l'opérateur U applique **X** dans lui-même, on dira que U est un opérateur dans **X**.

Si U est un opérateur de $\Omega \subset \mathbf{X}$ dans **Y**, on désignera par $U(E)$ $(E \subset \Omega)$, l'ensemble de tous les éléments $y \in \mathbf{Y}$ représentables sous la forme $y = U(x)$, où $x \in E$, et l'on dira que l'ensemble $U(E)$ est l'*image* de l'ensemble E.

Rappelons les définitions des plus importantes classes d'opérateurs.

a) Soient **X** et **Y** des espaces métriques, U un opérateur de $\Omega \subset \mathbf{X}$ dans **Y**. On dit que l'opérateur U est *continu au point* $x_0 \in \Omega$ si pour $x_n \to x_0$ $(x_n \in \Omega)$, on a $U(x_n) \to U(x_0)$. Si U est continu en chaque point d'un ensemble $E \subset \Omega$, on dit simplement que U est *continu sur* E.

b) Si **X** et **Y** sont des espaces normés et Ω un sous-espace vectoriel de **X**, on dit que l'opérateur U de Ω dans **Y** est *homogène* si

$$U(\lambda x) = \lambda U(x) \quad (x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{K}).$$

U est *additif* si

$$U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2) \quad (x_1, x_2 \in \Omega).$$

c) U est *linéaire* s'il est additif et homogène sur Ω_U.

---

*) Souvent, au lieu de $U(x)$, on écrit Ux et dans le cas d'opérateur non linéaire on remplace le terme « opérateur » par « application ».

Notons que si X et Y sont des espaces normés et U un opérateur additif de $\Omega \subset X$ dans Y, continu en un point $x_0 \in \Omega$, alors U est continu sur Ω, c'est-à-dire en chaque point de Ω.

En effet, soit $x_n \to x$ $(x, x_n \in \Omega)$. Comme

$$x_n = [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0)$$

et

$$x_0 + (x_n - x) \to x_0,$$

alors

$$U(x_n) = U(x_0 + (x_n - x)) + U(x - x_0) \to U(x_0) + \\ + U(x - x_0) = U(x).$$

1.2. Voici le critère de continuité d'un opérateur linéaire.

On dit qu'un opérateur linéaire U d'un espace normé X dans un espace normé Y est *borné* si existe une constante C telle que

$$\| U(x) \| \leqslant C \| x \|, \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

THÉORÈME 1. *Pour qu'un opérateur linéaire U soit continu il faut et il suffit qu'il soit borné.*

DÉMONSTRATION. La *condition* est *nécessaire*. Soit U un opérateur linéaire continu. Montrons que

$$C_0 = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} \| U(x) \| < \infty.$$

Si $C_0 = \infty$, il existerait une suite $\{x_n\}$ $(x_n \in X, \| x_n \| = 1)$ telle que $\lambda_n = \| U(x_n) \| \to \infty$. Etudions la suite $\{x_n'\}$, $x_n' = x_n / \lambda_n$. Il est clair que $x_n' \to 0$; donc, en vertu de la continuité de U, on doit avoir $U(x_n') \to 0$, alors qu'en réalité $\| U(x_n') \| = 1$.

Soit maintenant $x \neq 0$ un élément quelconque de X. En posant $x' = x / \| x \|$, on voit que $\| x' \| = 1$. Donc $\| U(x') \| \leqslant C_0$. Or, $U(x') = \frac{1}{\| x \|} U(x)$ en vertu de l'homogénéité de l'opérateur, donc

$$\| U(x) \| \leqslant C_0 \| x \|$$

et (1) est réalisée avec $C = C_0$.

La *condition* est *suffisante*. La continuité de l'opérateur U en 0 résulte immédiatement de la condition (1). En vertu de 1.1. U sera continu en chaque point de l'espace X.

C.q.f.d.

Montrons que C_0 est la plus petite constante vérifiant l'inégalité (1). En effet, si $\| x \| = 1$, alors $\| U(x) \| \leqslant C$. Donc $C_0 \leqslant C$. D'autre part, C_0 vérifie l'inégalité (1).

REMARQUE. On voit sans peine que

$$C_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\|.$$

En effet, il est évident que $C_0 \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\|$. Par ailleurs, pour $x \in X$ ($\|x\| \leqslant 1$, $x \neq 0$) on a $\|U(x)\| = \|x\| \left\| U\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leqslant C_0$, ce qui nous conduit à l'inégalité inverse.

Le nombre C_0 défini par l'opérateur U s'appelle *norme* de l'opérateur linéaire U et se note $\|U\|$ *). D'après ce qui précède

$$\|U\| = C_0 = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\|.$$

Si dans (1) on fait $C = C_0 = \|U\|$, on obtient

$$\|U(x)\| \leqslant \|U\| \, \|x\|.$$

Signalons encore que si une inégalité du type (1) a été établie avec un certain C, alors $\|U\| \leqslant C$.

Pour finir attirons l'attention sur une valeur géométrique simple du nombre $\|U\|$: en effet $\|U\|$ est borne supérieure du coefficient de dilatation d'un vecteur par la transformation réalisée par l'opérateur U.

1.3. Soient deux espaces normés X et Y. L'ensemble L (X, Y) de tous les opérateurs linéaires de X dans Y est un espace vectoriel (II.2.1). Notons B (X, Y) l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y. Nous allons vérifier que B (X, Y) est un sous-espace vectoriel de L (X, Y) et que la norme $\|U\|$ est norme sur B (X, Y), c'est-à-dire B (X, Y) est un espace normé.

Si U_1, $U_2 \in B$ (X, Y), $U = U_1 + U_2$, alors

$$\|U(x)\| \leqslant \|U_1(x)\| + \|U_2(x)\| \leqslant (\|U_1\| + \|U_2\|) \, \|x\|.$$

Donc $U \in B$ (X, Y) et $\|U\| \leqslant \|U_1\| + \|U_2\|$.

Si $U \in B$ (X, Y), $\lambda \in K$, $\tilde{U} = \lambda U$, alors $\|\tilde{U}\| = \|\lambda U\| = |\lambda| \, \|U\|$.

Il est clair que $\|U\| = 0$ entraîne $\|U(x)\| = 0$, $\forall x \in X$, donc $U = 0$. Nous avons ainsi démontré que B (X, Y) est un espace normé.

Montrons que si Y, espace des images, est complet, l'espace B (X, Y) le sera aussi.

---

*) La norme d'un opérateur dans un espace hilbertien a été définie pour la première fois par Hilbert (cf. Hilbert). Voir la définition générale dans Banach [1].

Les notions d'opérateur et de fonctionnelle linéaires et continus ont été introduites auparavant par de nombreux auteurs.

En effet, soit $\{U_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de l'espace B (X, Y). En prenant $\varepsilon > 0$ quelconque on aura

$$\| U_m - U_n \| < \varepsilon \quad (m, n \geqslant N_\varepsilon),$$

c'est-à-dire pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\| U_m (x) - U_n (x) \| < \varepsilon \| x \|, \tag{2}$$

d'où il résulte que la suite $\{U_n (x)\}$ d'éléments de l'espace Y est une suite de Cauchy et par conséquent, puisque l'espace Y est complet, il existe

$$U (x) = \lim_{n \to \infty} U_n (x) \quad (x \in \mathrm{X}).$$

Il est clair que l'opérateur $U \in L$ (X, Y). En passant à la limite pour $m \to \infty$ dans l'inégalité (2), on obtient

$$\| U (x) - U_n (x) \| = \lim_{m \to \infty} \| U_m (x) - U_n (x) \| \leqslant \varepsilon \| x \| \ (n \geqslant N_\varepsilon), \tag{3}$$

c'est-à-dire l'opérateur V:

$$V (x) = U (x) - U_n (x) \quad (x \in \mathrm{X})$$

est élément de l'espace B (X, Y). Donc $U = V + U_n \in B$ (X, Y). De plus, (3) implique

$$\| U - U_n \| \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant N_\varepsilon),$$

ce qui signifie que $U_n \to U$ dans l'espace B (X, Y).

L'exposé précédent nous conduit au théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Si* X *est un espace normé et* Y *un B-espace, alors* B (X, Y) *est un B-espace.*

L'espace des scalaires K étant complet, l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continues B (X, K), noté X^*, est un B-espace. L'espace X^* s'appelle espace *dual* de l'espace normé X. Si $f \in \mathrm{X}^*$, alors

$$\| f \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} | f (x) |.$$

On rappelle (II.2.2) que si l'espace X considéré est complexe, la multiplication par les nombres complexes est définie dans X^* par la formule

$$(\lambda f) (x) = \overline{\lambda} f (x) \quad (f \in \mathrm{X}^*, \quad x \in \mathrm{X}). \tag{4}$$

La définition de la multiplication selon la formule (4) sera justifiée plus bas (cf. 3.2).

§ 2. Quelques fonctionnelles et opérateurs dans des espaces concrets

2.1. Soit dans l'espace C $[a, b]$ la fonctionnelle

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \tag{1}$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_n$ est un système de points de l'intervalle $[a, b]$. Comme exemples de telles fonctionnelles on a la valeur isolée d'une fonction en un point fixe, les différences finies d'une fonction, la somme de Riemann, la somme pondérée sur un système de nœuds.

Montrons que la fonctionnelle f définie par l'égalité (1) est linéaire et de plus

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|. \tag{2}$$

La linéarité de f est évidente :

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \sum_{k=1}^{n} c_k [\lambda x_1(t_k) + \mu x_2(t_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda x_1(t_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k \mu x_2(t_k) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

L'inégalité

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)\right| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \, \|x\|$$

entraîne la continuité de f et

$$\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Construisons maintenant sur $[a, b]$ une fonction $\tilde{x}$ linéaire par morceaux, prenant en $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les valeurs

$$\tilde{x}(t_k) = \operatorname{sign} c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

linéaire dans les intervalles $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ et constante dans les intervalles $[a, t_1]$ et $[t_n, b]$.

Il est clair que

$$|\tilde{x}(t)| \leqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\|\tilde{x}\| \leqslant 1.$$

On a alors

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \geqslant f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{x}(t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} c_k = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

ce qui avec l'inégalité inverse nous donne (2).

2.2. Soit dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ la fonctionnelle

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t)\, x(t)\, dt, \tag{3}$$

où φ est une fonction sommable donnée.

Comme exemples de telles fonctionnelles citons l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier ou sur un intervalle partiel, les moments d'une fonction, ses coefficients de Fourier, etc.

Montrons que la fonctionnelle (3) est linéaire et que

$$\|f\| = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt. \tag{4}$$

Que la fonctionnelle f soit définie pour tous les $x \in \mathbf{C}[a, b]$ et même pour $x \in \mathbf{L}^\infty(a, b)$ et soit linéaire est évident. L'inégalité

$$|f(x)| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)\, x(t)|\, dt \leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)| \int_a^b |\varphi(t)|\, dt =$$

$$= \|x\| \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

entraîne sa continuité et la majoration de sa norme:

$$\|f\| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\, dt.$$

Etablissons l'inégalité inverse. Pour cela traitons d'abord le cas où la fonction φ est continue. Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et partitionnons l'intervalle $[a, b]$ avec les points $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de telle sorte que l'oscillation de la fonction φ soit inférieure à ε dans chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$. Classons tous les intervalles partiels en deux groupes. Dans le premier on portera les intervalles $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_r'$ sur lesquels la fonction φ prend des valeurs de même signe (lequel est susceptible de varier d'un intervalle à l'autre). Les intervalles restants $\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots, \Delta_s''$ formeront le deuxième groupe. On remarquera que du fait que les valeurs de la fonction φ changent de signe dans un intervalle Δ_k'' ($k = 1, 2, \ldots, s$), il existe une valeur égale à zéro ; l'oscillation de la fonction φ

étant inférieure à ε dans chaque intervalle partiel, il vient

$$|\varphi(t)| < \varepsilon \quad (t \in \Delta''_k; \quad k = 1, 2, \ldots, s).$$

Définissons maintenant la fonction $\tilde{x} \in \mathbf{C}[a, b]$. Posons

$$\tilde{x}(t) = \operatorname{sign} \varphi(t) \quad (t \in \Delta'_j; \quad j = 1, 2, \ldots, r),$$

pour les intervalles du premier groupe. Admettons que la fonction est linéaire dans les autres points de l'intervalle $[a, b]$. En outre, si a (ou b) est extrémité d'un intervalle du deuxième groupe, on supposera que $\tilde{x}(a) = 0$ (respectivement $\tilde{x}(b) = 0$).

Minorons la quantité

$$f(\tilde{x}) = \int_a^b \varphi(t)\,\tilde{x}(t)\,dt.$$

Du fait que $|\tilde{x}(t)| \leqslant 1$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ il vient

$$\int_a^b \varphi(t)\,\tilde{x}(t)\,dt = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} \varphi(t)\,\tilde{x}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} \varphi(t)\,\tilde{x}(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{r} \int_{\Delta'_j} |\varphi(t)|\,dt - \sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,dt - 2\sum_{k=1}^{s} \int_{\Delta''_k} |\varphi(t)|\,dt > \int_a^b |\varphi(t)|\,dt - 2\varepsilon(b-a).$$

Et *a fortiori*

$$\|f\| \geqslant f(\tilde{x}) > \int_a^b |\varphi(t)|\,dt - 2\varepsilon(b-a)$$

puisque $\|\tilde{x}\| \leqslant 1$. En faisant $\varepsilon \to 0$ on arrive à l'inégalité désirée.

On admet maintenant que φ est une fonction sommable arbitraire. L'ensemble de toutes les fonctions continues étant dense dans l'espace $\mathbf{L}^1$, on peut trouver une fonction continue $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^1} = \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Utilisons la fonction $\tilde{\varphi}$ pour construire une fonction $\tilde{x} \in \mathbf{C}[a, b]$, avec $\|\tilde{x}\| \leqslant 1$, comme nous l'avons décrit plus haut, c'est-à-dire

telle que

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t)\,\tilde{x}(t)\,dt \geqslant \int_a^b |\tilde{\varphi}(t)|\,dt - 2\varepsilon(b-a) = \|\tilde{\varphi}\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a).$$

Or

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^1} \geqslant \|\varphi\|_{L^1} - \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^1} > \|\varphi\|_{L^1} - \varepsilon,$$

donc

$$f(\tilde{x}) = \int_a^b \varphi(t)\,\tilde{x}(t)\,dt = \int_a^b \tilde{\varphi}(t)\,\tilde{x}(t)\,dt + \int_a^b [\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)]\,\tilde{x}(t)\,dt >$$

$$> \|\varphi\|_{L^1} - \varepsilon - 2\varepsilon(b-a) - \int_a^b |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|\,dt >$$

$$> \|\varphi\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a+1).$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\|f\| \geqslant f(\tilde{x}) > \|\varphi\|_{L^1} - 2\varepsilon(b-a+1),$$

de sorte que pour $\varepsilon \to 0$

$$\|f\| \geqslant \|\varphi\|_{L^1},$$

c.q.f.d.

2.3. On peut considérer une fonctionnelle de la forme (3) dans l'espace $L^p(a, b)$. De façon plus générale soit (T, Σ, μ) un espace muni d'une mesure σ-finie. Montrons *) que

$$f(x) = \int_T x(t)\,y(t)\,d\mu, \tag{5}$$

où $y \in L^q(T, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1/p + 1/q = 1)$, est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $L^p(T, \Sigma, \mu)$, et de plus

$$\|f\| = \|y\|_{L^p} = \begin{cases} \left[\int_T |y(t)|^q\,d\mu\right]^{1/q}, & 1 < p \leqslant \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} |y(t)|, & p = 1. \end{cases} \tag{6}$$

1) Voyons d'abord le cas $1 < p < \infty$. L'intégrale (5) est définie pour tous les $x \in L^p$. Ceci résulte de l'inégalité intégrale de Hölder

*) Dans la suite on démontrera que les fonctionnelles représentées sous la forme (5) sont les seules fonctionnelles linéaires de l'espace L^p $(1 \leqslant p < \infty)$, c'est-à-dire (5) est la forme générale d'une fonctionnelle linéaire de L^p (cf. chap. VI, § 2).

(cf. IV.2.3). Grâce à cette inégalité on trouve

$$|f(x)| = \left|\int_T x(t)\,y(t)\,d\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_T |y(t)|^q\,d\mu\right]^{1/q} \left[\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right]^{1/p} = \|y\|_{L^q}\,\|x\|,$$

donc

$$\|f\| \leqslant \|\varphi\|_{L^q}. \tag{7}$$

Pour démontrer l'inégalité inverse nous considérons la fonction

$$\tilde{x}(t) = |y(t)|^{q-1} \operatorname{sign} y(t).$$

Comme

$$|\tilde{x}(t)|^p = |y(t)|^{p(q-1)} = |y(t)|^q,$$

il vient que $\tilde{x} \in L^p$ et de plus

$$\|x\| = \left[\int_T |\tilde{x}(t)|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_T |y(t)|^q\,d\mu\right]^{\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{p}} = [\|y\|_{L^q}]^{\frac{q}{p}},$$

ce qui entraîne

$$\|f\| \geqslant f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_a^b y(t)\,\tilde{x}(t)\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{x}\|}\int_a^b |y(t)|^q\,d\mu = [\|y\|_{L^q}]^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} = \|y\|_{L^q}.$$

Ce résultat joint à (7) nous donne l'égalité cherchée.

2) Soit maintenant $p = 1$. Posons

$$\|y\|_{L^\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in T} |y(t)| = Q.$$

L'inégalité $\|f\| \leqslant Q$ est évidente. D'autre part, prenons $\varepsilon > 0$ et appelons A l'ensemble

$$A = \{t \in T : y(t) > Q - \varepsilon\}.$$

Remarquons que $\mu(A) > 0$. Définissons la fonction

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} y(t), & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{x} \in L^1$ et $\|\tilde{x}\| = \int_a^b |\tilde{x}(t)|\, d\mu = \mu(A)$. D'autre part

$$\|f\| \geqslant f\left(\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) = \frac{1}{\mu(A)} \int_T y(t)\, \tilde{x}(t)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{\mu(A)} \int_T |\varphi(t)|\, d\mu \geqslant \frac{1}{\mu(A)} [Q - \varepsilon]\, \mu(A) = Q - \varepsilon.$$

D'où $\|f\| \geqslant Q$, puisque ε est arbitraire, et par conséquent $\|f\| = Q$.

3) Supposons enfin que $p = \infty$. L'inégalité $\|f\| \leqslant \|y\|_{L^1}$ est évidente. D'autre part, la fonction $\tilde{x}(t) = \operatorname{sign} y(t)$ appartient à L^∞ et $\|\tilde{x}\|_{L^\infty} \leqslant 1$. De l'inégalité

$$\|f\| \geqslant |f(\tilde{x})| = \int_T \operatorname{sign} y(t) \cdot y(t)\, d\mu = \int_T |y(t)|\, d\mu = \|y\|_{L^1}$$

il résulte que $\|f\| \geqslant \|y\|_{L^1}$ et finalement $\|f\| = \|y\|_{L^1}$.

Remarque. Si l'on se place dans le cas d'un espace L^p complexe, il y a intérêt à écrire la fonctionnelle (5) sous la forme

$$f(x) = \int_T x(t)\, \overline{y(t)}\, d\mu.$$

La formule (6) reste visiblement en vigueur (cf. 1.3).

2.4. Considérons l'opérateur intégral $y = U(x)$ défini par

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{8}$$

où $K(s, t)$ est une fonction continue. Comme exemple d'opérateurs de la forme (8) citons les intégrales de Dirichlet et de Fejér. Montrons que U est un opérateur linéaire continu de $C[a, b]$ dans $C[a, b]$, et de plus

$$\|U\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |K(s, t)|\, dt = M. \tag{9}$$

La linéarité de l'opérateur (8) est évidente ; sa continuité et $\|U\| \leqslant M$ découlent de l'inégalité

$$\|U(x)\| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\| \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |K(s, t)|\, dt = M \|x\|.$$

Etablissons l'inégalité inverse. L'intégrale

$$\int_a^b |K(s, t)|dt$$

étant une fonction continue de s, il existe $s_0 \in [a, b]$ tel que

$$M = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |K(s, t)|dt = \int_a^b |K(s_0, t)|dt.$$

Dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ considérons une fonctionnelle de type (3), avec $\varphi(t) = K(s_0, t)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \int_a^b K(s_0, t)\, x(t)\, dt \quad (x \in \mathbf{C}[a, b]).$$

En s'inspirant de 2.2, on peut trouver un élément $\tilde{x} \in \mathbf{C}[a, b]$, avec $\|\tilde{x}\| \leqslant 1$, tel que

$$f(\tilde{x}) \geqslant \|f\| - \varepsilon = \int_a^b |K(s_0, t)|dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

En posant $\tilde{y} = U(\tilde{x})$ on a de toute évidence

$$\|U\| \geqslant \|U(\tilde{x})\| = \|\tilde{y}\| \geqslant \tilde{y}(s_0) = \int_a^b K(s_0, t)\, \tilde{x}(t)\, dt = f(\tilde{x}) \geqslant M - \varepsilon.$$

D'où l'on déduit (9) puisque ε est arbitraire.

2.5. Montrons que l'opérateur intégral (8) peut être traité comme un opérateur linéaire de $\mathbf{L}^1(a, b)$ dans $\mathbf{L}^1(a, b)$; mais alors

$$\|U\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(s, t)|ds = M'. \tag{10}$$

L'additivité de U est évidente. Le théorème de Fubini sur le changement de l'ordre d'intégration donne

$$\|U(x)\| = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|ds \right] |x(t)|dt \leqslant M' \|x\|,$$

de sorte que

$$\|U\| \leqslant M'.$$

Choisissons maintenant comme précédemment $t_0 \in [a, b]$ tel que

$$M' = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(s, t)| ds = \int_a^b |K(s, t_0)| ds.$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ quelconque et trouvons à partir de la continuité uniforme de la fonction $K(s, t)$ un $\delta > 0$ tel que

$$| K(s', t') - K(s, t) | < \varepsilon,$$

dès que $| s' - s | < \delta$, $| t' - t | < \delta$. Comprenons le point t_0 dans un intervalle $d = [t_1, t_2]$ $(a \leqslant t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 \leqslant b)$ de sorte que sa longueur soit inférieure à δ $(t_2 - t_1 < \delta)$. Posons maintenant

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1}, & t \in d, \\ 0, & t \notin d \end{cases} \quad (\| \tilde{x} \| = 1).$$

En désignant $\tilde{y} = U(\tilde{x})$, on trouve

$$\| U \| \geqslant \| U(\tilde{x}) \| = \| \tilde{y} \| = \int_a^b |\tilde{y}(s)| ds = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t) \tilde{x}(t) dt \right| ds =$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t) dt \right| ds \geqslant \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, t_0) dt \right| ds -$$

$$- \frac{1}{t_2 - t_1} \int_a^b \left[\int_{t_1}^{t_2} |K(s, t) - K(s, t_0)| dt \right] ds = M' - \varepsilon (b - a),$$

ce qui donne (10).

Le lecteur peut s'assurer sans peine que si l'opérateur (8) est traité comme un opérateur de l'espace $\mathbf{L}^1(a, b)$ dans $\mathbf{C}[a, b]$, alors

$$\| U \| = \max_{\substack{a \leqslant s \leqslant b \\ a \leqslant t \leqslant b}} |K(s, t)|.$$

2.6. Traitons maintenant l'opérateur intégral (8) comme un opérateur de $\mathbf{L}^2(a, b)$ dans $\mathbf{L}^2(a, b)$ et affaiblissons la condition imposée à son noyau $K(s, t)$. Plus exactement, nous ne supposons pas qu'il est continu mais qu'il est mesurable sur le carré et

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds\, dt = N^2 < \infty. \tag{11}$$

Montrons qu'à cette condition l'expression (8) définit un opérateur continu de $\mathbf{L}^2$ dans $\mathbf{L}^2$ et de plus que

$$\| U \| \leqslant N. \tag{12}$$

La continuité de l'opérateur (8) et la majoration (12) de la norme découlent de l'inégalité de Bouniakovski:

$$\|U(x)\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right|^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right] ds = N^2 \|x\|^2.$$

Montrons que dans le cas d'un noyau symétrique ($K(s, t) = K(t, s)$) on a l'égalité

$$\|U\| = \frac{1}{|\lambda_1|}, \tag{13}$$

où λ_1 est la valeur caractéristique de plus petit module du noyau $K(s, t)$.

Si le noyau n'est pas symétrique, la norme de l'opérateur U a une expression plus compliquée, à savoir

$$\|U\| = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}}, \tag{14}$$

où Λ_1 est la plus petite valeur propre du noyau

$$K^*(s, t) = \int_a^b K(\tau, s)\, K(\tau, t)\, d\tau.$$

Pour établir les égalités (13) et (14) on aura besoin de quelques notions de théorie des équations intégrales *). On sait qu'une équation intégrale de noyau symétrique admet un système complet de fonctions fondamentales (normées) et de valeurs caractéristiques: $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., λ_1, λ_2, ..., ensemble des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène et des λ pour lesquelles cette équation possède des solutions non nulles:

$$\omega_k(s) = \lambda_k \int_a^b K(s, t)\, \omega_k(t)\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Le théorème de Hilbert-Schmidt **) nous dit que toute fonction représentable par un noyau, en particulier la valeur $y(s)$ de l'opérateur, se décompose en une série convergeant en moyenne dans (L^2) suivant les fonctions propres:

$$y(s) = \sum_k \frac{h_k}{\lambda_k} \omega_k(s) \quad \left(h_k = \int_a^b x(t)\, \omega_k(t)\, dt; \quad k = 1, 2, \ldots \right).$$

*) Voir par exemple Pétrovski.
**) Ibidem.

D'où (cf. théorème IV.5.6)

$$\|y\|^2=\int_a^b |y(s)|^2\,ds=\sum_k \frac{h_k^2}{\lambda_k^2}\leqslant\frac{1}{\lambda_1^2}\sum_k h_k^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1^2}\|x\|^2.$$

Ceci montre que $\|U\|\leqslant\frac{1}{|\lambda_1|}$. En prenant $\tilde{x}=\omega_1$, on aura $\tilde{y}=$ $=U(\tilde{x})=\frac{1}{\lambda_1}\tilde{x}$, donc

$$\|U\|\geqslant\|U(\tilde{x})\|=\frac{1}{|\lambda_1|}\|\tilde{x}\|=\frac{1}{|\lambda_1|}.$$

D'où l'on déduit (13).

Traitons maintenant le cas d'un noyau arbitraire. Le théorème de Fubini donne

$$\|y\|^2=\int_a^b |y(s)|^2\,ds=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,\ t)\,x(t)\,dt\int_a^b K(s,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau\right]ds=$$

$$=\int_a^b x(\tau)\,d\tau\int_a^b\left[\int_a^b K(s,\ t)\,K(s,\ \tau)\,ds\right]x(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b\int_a^a K^*(t,\ \tau)\,x(t)\,x(\tau)\,dt\,d\tau.$$

En désignant par Λ_k et $\Omega_k(t)$ les valeurs caractéristiques et les fonctions fondamentales du noyau $K^*(t,\ \tau)$ on trouve, compte tenu du théorème d'Hilbert-Schmidt,

$$\|y\|^2=\int_a^b x(\tau)\,d\tau\int_a^b K^*(t,\ \tau)\,x(t)\,dt=$$

$$=\int_a^b x(\tau)\,d\tau\sum_k\frac{H_k}{\Lambda_k}\,\Omega_k(\tau)=\sum_k\frac{H_k^2}{\Lambda_k}\leqslant\frac{1}{\Lambda_1}\|x\|$$

$$\left(H_k=\int_a^b x(t)\,\Omega_k(t)\,dt,\quad k=1,\ 2,\ \ldots\right).$$

D'où l'on voit que $\|\underset{\sim}{U}\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}}$; de même que dans le cas précédent en prenant $x=\Omega_1$ on s'assure que l'égalité est réalisée, c'est-à-dire que (14) est vérifiée.

2.7. Par des raisonnements analogues on définit la norme de l'opérateur U dans le cas où (8) contient un terme en dehors du signe

d'intégration. Soient

$$y = U(x), \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{15}$$

Limitons-nous au cas d'un noyau symétrique. Nous utilisons de nouveau le théorème d'Hilbert-Schmidt après avoir préalablement complété le système de fonctions fondamentales par les fonctions $\omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \ldots$ Désignons par $\ldots, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, \ldots$ les coefficients du développement de Fourier de la fonction x suivant ce système. La fonction y aura pour coefficients de Fourier

$$\eta_k = \int_a^b y(s)\, \omega_k(s)\, ds =$$

$$= \int_a^b \left[x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right] \omega_k(s)\, ds = h_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

$$(k = 1, 2, \ldots), \quad \eta_k = h_k \quad (k = 0, -1, -2, \ldots).$$

Signalons que dans tous les cas on pourra se servir de la première de ces formules en admettant que $\lambda_k = \infty$ pour $k = 0, -1, -2, \ldots$ On obtient en définitive

$$\| y \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2 \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \leqslant L^2 \sum |h_k|^2 = L^2 \| x \|^2,$$

où

$$L = \sup_k \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|.$$

Il est évident que

$$\| U \| = L.$$

2.8. Considérons maintenant des opérateurs dans des espaces de dimension finie. Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ des B-espaces respectivement de dimensions m et n finies, U un opérateur linéaire de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$. Désignons par e_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ l'élément de $\mathbf{X}$ dont toutes les coordonnées sont nulles à l'exception de la k-ième qui est égale à l'unité. Il en sera de même pour l'élément $g_k \in \mathbf{Y}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Si $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbf{X}$ et $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in \mathbf{Y}$, alors

$$x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k.$$

Donc si $y = U(x)$, on a

$$y = \sum_{k=1}^{m} \xi_k U(e_k).$$

Si l on désigne par $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ les coordonnées de l'élément $U(e_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, on en déduit

$$\|y\| = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} g_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k\right) g_j.$$

Les éléments $g_1, g_2, \ldots, g_n$ étant linéairement indépendants, il vient

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire les coordonnées de l'élément $y = U(x)$ se déduisent à partir des coordonnées de l'élément x par une transformation réalisée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Inversement, toute matrice de cette forme définit un opérateur linéaire de X dans Y. On laisse au lecteur le soin de vérifier ce fait *). La norme de l'opérateur U dépend de la métrique utilisée dans les espaces X et Y.

a) Traitons U comme un opérateur de l_m^∞ dans l_n^∞ (cf. IV.3.5). Alors

$$\|y\| = \|U(x)\| = \max_j |\eta_j| \leqslant \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}||\xi_k| \leqslant \|x\| \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|,$$

c'est-à-dire

$$\|U\| \leqslant \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}| = L.$$

Choisissons j_0 tel que

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{j_0 k}| = L,$$

et construisons $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_m)$ en supposant

$$\tilde{\xi}_k = \operatorname{sign} a_{j_0 k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Alors

$$\|U\| \geqslant \|U(\tilde{x})\| = \max_j \left|\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\tilde{\xi}_k\right| \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_{j_0 k}\tilde{\xi}_k = \sum_{k=1}^{m} |a_{j_0 k}| = L.$$

*) Donc, tous les opérateurs linéaires d'un B-espace de dimension finie dans un B-espace de dimension finie sont continus.

En définitive

$$\| U \| = L = \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|.$$

b) Si l'on traite U comme un opérateur de $\mathbf{l}_m^1$ dans $\mathbf{l}_n^1$ (cf. IV.3.5), on obtient

$$\| U \| = \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| = L'. \tag{16}$$

En effet, $\| U \| \leqslant L'$ est évident. D'autre part, il existe k_0 tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{jk_0}| = L'.$$

Il suffit maintenant de prendre $\tilde{x} = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (l'unité se trouve au k_0-ième rang). Alors

$$\| U \| \geqslant \| U(\tilde{x}) \| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\tilde{\xi}_k \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{jk_0}| = L',$$

de sorte que $\| U \| = L'$.

c) Considérons le même opérateur en nous plaçant dans des espaces euclidiens, c'est-à-dire $\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^2$, $\mathbf{Y} = \mathbf{l}_n^2$. Si $m = n$ et la matrice A est symétrique, alors

$$\| U \| = | \lambda_1 |.$$

De plus λ_1 est la valeur propre de plus grand module de la matrice A.

Dans le cas général

$$\| U \| = \sqrt{\Lambda_1}$$

où Λ_1 est la valeur propre de plus grand module de la matrice A^*A (A^* est la transposée conjuguée de A) *).

Etudions d'abord le premier cas. La matrice A possède des valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et des vecteurs propres linéairement indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on peut supposer être normés et deux à deux orthogonaux. Si $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, alors

$$y = U(x) = U(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) = \\ = c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \ldots + c_n\lambda_nx_n,$$

$$\| y \|^2 = | c_1\lambda_1 |^2 + |c_2\lambda_2|^2 + \ldots + | c_n\lambda_n |^2 \leqslant \\ \leqslant \lambda_1^2 (| c_1 |^2 + | c_2 |^2 + \ldots + | c_n |^2) = \lambda_1^2 \| x \|^2,$$

l'égalité étant réalisée pour $x = x_1$.

*) Les éléments a_{jk}^* de la matrice A^* sont définis par $a_{jk}^* = \overline{a_{kj}}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$). En particulier, si A est une matrice réelle, alors $a_{jk}^* = a_{kj}$.

REMARQUE. Signalons une autre expression pou· $\| U \|$, soit

$$\| U \| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x| = \sup_{\|x\|=1} \Big| \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k \Big) \bar{\xi}_j \Big| .$$

En effet

$$| (Ax, x) | \leqslant \| Ax \| \, \| x \| = \| U(x) \| \, \| x \| \leqslant \| U \| = | \lambda_1 | \qquad (\| x \| = 1).$$

Or, l'égalité est réalisée pour $x = x_1$, donc $\sup\limits_{\|x\|=1} | (Ax, x) | = \| U \|$.

Supposons maintenant que la matrice A est arbitraire. On a alors

$$\| U \|^2 = \sup_{\|x\|=1} \| U(x) \|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k \sum_{s=1}^{m} \bar{a}_{js}\bar{\xi}_s \Big) = \sup_{\|x\|=1} \sum_{s=1}^{m} \Big[\sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}a_{sj}^{*} \Big) \xi_k \Big] \bar{\xi}_s =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x) = \Lambda_1,$$

où Λ_1 est, en vertu de ce qui a été dit dans la remarque, la plus grande valeur propre de la matrice A^*A.

Pour $n = 1$ l'opérateur U se transforme en fonctionnelle. La matrice A dégénère alors en une matrice à une ligne. En modifiant les notations, on peut dire que toute fonctionnelle linéaire f dans un espace X de dimension m est définie par un système $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ de m nombres:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathrm{X}). \tag{17}$$

Etant donné qu'inversement tout système de nombres $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ définit d'après la formule (17) une fonctionnelle linéaire dans X, on peut identifier la fonctionnelle f avec le système qui la définit et écrire

$$f = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m). \tag{18}$$

La norme de la fonctionnelle (18) est définie comme suit:

$$\mathrm{X} = \mathrm{l}_m^{\infty}, \quad \| f \| = \sum_{k=1}^{m} |\varphi_k|, \tag{19}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{l}_m^{1}, \quad \| f \| = \max_{k} |\varphi_k|, \tag{20}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{l}_m^{2}, \quad \| f \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |\varphi_k|^2}. \tag{21}$$

REMARQUE. Si X est un espace complexe, il est commode d'écrire la formule (17) sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\varphi}_k \xi_k,$$

en identifiant encore f avec le système $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ (cf. remarque dans 2.3).

§ 3. Fonctionnelles et opérateurs linéaires dans un espace hilbertien

3.1. Dans un espace hilbertien séparable un opérateur *) admet une représentation matricielle analogue à celle d'un opérateur dans les espaces de dimension finie (cf. 2.8).

En effet, soit U un opérateur dans un espace hilbertien H séparable de dimension infinie. Soit un système orthonormal complet $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Chaque élément $x \in$ H peut être représenté sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k,$$

où $c_k = (x, x_k)$ sont les coefficients de Fourier de l'élément x. Donc, en vertu de la continuité de l'opérateur U

$$y = Ux = \sum_{k=1}^{\infty} c_k U x_k.$$

En identifiant les coefficients de Fourier du premier et du second membre on trouve

$$d_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k, \tag{1}$$

où d_j sont les coefficients de Fourier de l'élément y et a_{jk} ceux de l'élément Ux_k.

Ainsi, la suite des coefficients de Fourier de l'élément $y = Ux$ se déduit de celle des coefficients de Fourier de l'élément x par une transformation réalisée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jk} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2}$$

*) Dans un espace hilbertien le terme « opérateur » désignera toujours un « opérateur linéaire continu ». De plus, on écrira Ux au lieu de $U(x)$.

Donc l'opérateur U admet une représentation matricielle comme dans le cas finidimensionnel.

Cependant, il convient de noter que toute matrice (2) ne définit pas un opérateur linéaire comme dans le cas finidimensionnel. Une condition nécessaire et suffisante à cela est l'existence d'une constante C telle que

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{jk} c_k \right|^2 \leqslant C^2 \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \tag{3}$$

quels que soient m, $n = 1, 2, \ldots$ et $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

La condition nécessaire est presque évidente. Si pour x on prend un élément dont les coefficients de Fourier sont nuls à partir du rang $m + 1$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{jk} c_k \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} a_{jk} c_k \right|^2 =$$

$$= \| y \|^2 = \| Ux \|^2 \leqslant \| U \|^2 \| x \|^2 = \| U \|^2 \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2,$$

d'où il suit que pour C on peut prendre $\| U \|$.

Inversement, si l'inégalité (3) est vérifiée, en y faisant tendre m et ensuite n vers l'infini on obtient

$$\| y \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leqslant C^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = C^2 \| x \|^2.$$

Ce critère est difficile à vérifier. Nous allons donc indiquer une condition suffisante plus simple qui rétrécit fortement la classe des opérateurs. Plus exactement, si

$$D^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty,$$

la matrice (2) définit suivant (1) un opérateur linéaire dans H.

En effet

$$\| y \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} c_k \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \| x \|^2,$$

d'où il suit que l'opérateur U est borné et $\| U \| \leqslant D$.

Notons encore que la représentation matricielle de l'opérateur U dépend du choix du système orthonormal $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Le problème de savoir à quelle condition deux matrices de type (2)

définissent le même opérateur est très compliqué. Nous ne l'examinerons pas et renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés *).

3.2. Etudions maintenant la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans un espace hilbertien.

On constate sans peine que dans un espace **H** le produit scalaire (x, y), $y \in \mathbf{H}$ étant fixe, est une fonctionnelle linéaire. En effet, soit

$$f(x) = (x, y). \tag{4}$$

L'additivité et l'homogénéité de la fonctionnelle f sont simplement l'axiome 2 de l'espace muni du produit scalaire ; le fait que f est bornée découle de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski :

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\|f\| \leqslant \|y\|. \tag{5}$$

Démontrons que les fonctionnelles de la forme (4) sont les seules fonctionnelles linéaires de **H** et de plus que l'égalité est réalisée dans (5).

THÉORÈME 1. *Pour toute fonctionnelle linéaire continue f dans un espace hilbertien* **H** *il existe un élément $y \in \mathbf{H}$ défini de façon unique par la fonctionnelle f, tel que l'on ait* (4) *pour chaque $x \in \mathbf{H}$. De plus*

$$\|f\| = \|y\|. \tag{6}$$

DÉMONSTRATION. Etablissons tout d'abord l'existence de l'élément y. Désignons par $\mathbf{H}_0$ l'ensemble des éléments $x \in \mathbf{H}$ tels que $f(x) = 0$. La fonctionnelle f étant linéaire et continue, cet ensemble est un sous-espace fermé. Si de plus $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}$, on peut prendre $y = 0$.

Etudions le cas où $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{H}$. Soit $y_0 \notin \mathbf{H}_0$. Ecrivons y_0 sous la forme

$$y_0 = y' + y'' \quad (y' \in \mathbf{H}_0, \ y'' \perp \mathbf{H}_0)$$

(théorème IV.5.1). Il est clair que $y'' \neq 0$, $f(y'') \neq 0$, donc on peut admettre que $f(y'') = 1$. Prenons un élément quelconque $x \in \mathbf{H}$ et posons $f(x) = \alpha$. L'élément $x' = x - \alpha y'' \in \mathbf{H}_0$ puisque

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Donc

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y''),$$

de sorte que

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')}\right)$$

et l'on peut prendre $y = \dfrac{y''}{(y'', y'')}$.

*) Voir par exemple Ahiezer et Glazman.

Nous avons donc démontré l'existence de l'élément y.

L'unicité de cet élément est très simple à établir. En effet, si pour tous les $x \in \mathbf{H}$

$$(x, y) = (x, y_1),$$

alors $(x, y - y_1) = 0$ et par suite $y - y_1 \perp \mathbf{H}$, ce qui n'est possible que pour $y = y_1$.

D'autre part

$$\| f \| \geqslant f\left(\frac{y}{\| y \|}\right) = \frac{(y, y)}{\| y \|} = \| y \|,$$

ce qui avec (5) donne (6) *).

Le théorème est entièrement prouvé.

En particulier, dans l'espace $\mathbf{L}^2(T, \Sigma, \mu)$ la forme générale de la fonctionnelle linéaire sera

$$f(x) = (x, y) = \int_T x(t)\overline{y(t)}\, d\mu \quad (x, y \in \mathbf{L}^2).$$

Dans l'espace $\mathbf{l}^2$

$$f(x) = (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in \mathbf{l}^2).$$

La forme générale des fonctionnelles dans l'espace $\mathbf{L}^2(a, b)$ a été indiquée par Fréchet [2], pour un espace hilbertien abstrait dans le cas séparable par Neumann [1], dans le cas général par Rellich [1].

Dans 1.3 nous avons défini le produit par un scalaire pour les fonctionnelles dans un espace normé complexe au moyen de la formule

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x). \tag{7}$$

Pour justifier cette définition, considérons des fonctionnelles dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$. Le théorème de la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans un espace hilbertien nous permet d'identifier la fonctionnelle $f \in \mathbf{H}^*$ avec l'élément $y \in \mathbf{H}$ la définissant :

$$f(x) = (x, y) \quad (x \in \mathbf{H}). \tag{8}$$

Si de plus f_1 est défini par l'élément y_1 et f_2 par y_2, il est évident que $f_1 + f_2$ est défini par l'élément $y_1 + y_2$. Ceci est valable pour la fonctionnelle λf et l'élément λy, puisque λf est définie par la formule (7). En effet,

$$(\lambda f)(x) = \bar{\lambda} f(x) = \bar{\lambda}(x, y) = (x, \lambda y). \tag{9}$$

D'autre part, puisque $\| f \| = \| y \|$, ce qui vient d'être mentionné nous permet d'identifier l'espace $\mathbf{H}^*$ des fonctionnelles f et l'espace $\mathbf{H}$ des éléments y : ces espaces sont linéairement isométriques.

*) Si $y = 0$, (6) découle immédiatement de (4).

3.3. Soit U un opérateur linéaire (borné) dans un espace hilbertien H. Considérons la fonctionnelle

$$f(x) = (Ux, y),$$

où y est un élément fixé de H. Il est évident que f est une fonctionnelle linéaire qui est bornée, puisque

$$|f(x)| = |(Ux, y)| \leqslant \|Ux\| \, \|y\| \leqslant \|U\| \, \|x\| \, \|y\|,$$

et de plus

$$\|f\| \leqslant \|U\| \, \|y\|. \tag{10}$$

Donc, en vertu du théorème 1, il existe un élément $y^* \in$ H tel que

$$f(x) = (x, y^*) \quad (x \in \mathrm{H}),$$

c'est-à-dire

$$(Ux, y) = (x, y^*) \quad (x \in \mathrm{H}). \tag{11}$$

L'élément y^* est défini de façon unique par la fonctionnelle f et en fin de compte par l'élément y. Donc, en associant à l'élément y l'élément y^*, on obtient un opérateur dans H. Cet opérateur est noté U^* et appelé *adjoint* de U. Dans (11) la substitution de U^*y à y^* nous donne la relation qui définit l'opérateur adjoint

$$(Ux, y) = (x, U^*y) \quad (x, y \in \mathrm{H}).$$

L'opérateur U^* est additif, puisque en sommant les relations

$$(Ux, y_1) = (x, U^*y_1), \quad (Ux, y_2) = (x, U^*y_2),$$

qui sont réalisées pour tous les $x \in$ H, on obtient

$$(Ux, y_1 + y_2) = (x, U^*y_1 + U^*y_2),$$

d'où

$$U^*(y_1 + y_2) = U^*y_1 + U^*y_2.$$

De façon analogue

$$(Ux, iy) = -i(Ux, y) = -i(x, U^*y) = (x, iU^*y) \quad (x, y \in \mathrm{H}),$$

d'où

$$U^*(iy) = iU^*y.$$

Donc, $U^*(\lambda y) = \lambda U^*y$ pour tout λ, d'où U^* est un opérateur linéaire.

D'autre part, du fait que $\|f\| = \|y^*\|$, l'inégalité (10), écrite sous la forme

$$\|y^*\| = \|U^*y\| \leqslant \|U\| \, \|y\|,$$

montre que l'opérateur U^* est borné, et de plus $\|U^*\| \leqslant \|U\|$.

Il est facile de voir que l'opérateur $U^{**} = (U^*)^*$ est confondu avec U. En effet, on a

$$(U^*x, y) = (x, U^{**}y)$$

et

$$(U^*x, y) = (x, Uy),$$

pour tous les $x, y \in \mathbf{H}$, d'où $(x, U^{**}y) = (x, Uy)$, de sorte que $U^{**}y = Uy$ pour tout $y \in \mathbf{H}$.

Cette circonstance nous permet d'établir l'égalité des normes des opérateurs U et U^*. En effet, l'inégalité démontrée nous donne $\| U \| = \| U^{**} \| \leqslant \| U^* \|$, d'où $\| U^* \| = \| U \|$.

Un opérateur U confondu avec son adjoint est dit *auto-adjoint*. L'opérateur auto-adjoint est caractérisé par

$$(Ux, y) = (x, Uy) \quad (x, y \in \mathbf{H}).$$

Les opérateurs auto-adjoints jouent un rôle primordial en théorie des opérateurs dans l'espace hilbertien, puisque les faits les plus importants de cette théorie les concernent précisément. De plus il paraît possible de considérer des opérateurs non bornés.

La notion d'opérateur adjoint sera généralisée plus bas (cf. chapitre IX) aux opérateurs linéaires dans des B-espaces. Cependant l'opérateur adjoint sera défini d'une façon générale dans un autre espace, donc la notion d'opérateur auto-adjoint ne pourra pas être généralisée.

Soient $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a, b)$ et U l'opérateur intégral défini dans 2.6, c'est-à-dire $y = Ux$ est équivalent à

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \quad \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt < +\infty \right). \tag{12}$$

Il est immédiat de vérifier que l'opérateur adjoint U^* est également intégral. Plus exactement si $y^* = U^*y$, alors

$$y^*(s) = \int_a^b K^*(s, t)\, y(t)\, dt \quad (K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}). \tag{13}$$

En effet, pour tout $x \in \mathbf{L}^2$ on doit avoir

$$(Ux, y) = (x, y^*),$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt \right] \overline{y(s)}\, ds = \int_a^b x(t)\, \overline{y^*(t)}\, dt.$$

Donc

$$\int_a^b x(t)\overline{\left[y^*(t)-\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds\right]}=0,$$

d'où, puisque x est arbitraire,

$$y^*(t)=\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,ds,$$

ce qui aux notations près est confondu avec (13).

L'opérateur (12) sera auto-adjoint si le noyau $K(s, t)$ est conjugué symétrique, c'est-à-dire si

$$K(t, s)=\overline{K(s, t)}.$$

Supposons maintenant que l'opérateur U est défini par la matrice (2). En désignant les coefficients de Fourier de l'élément y par $d_1, d_2, \ldots$, on aura

$$(Ux, y)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}c_k\right)\bar{d}_j=\sum_{j=1}^{\infty} c_k\overline{\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}_{jk}d_j}=(x, y^*),$$

où y^* est l'élément dont les coefficients de Fourier sont

$$d_j^*=\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^* d_k \quad (j=1, 2, \ldots,;\ a_{jk}^*=\bar{a}_{kj}).$$

Le fait que $y^* = U^*y$ signifie que l'opérateur U^* est défini par la matrice

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \ldots & a_{1k}^* & \ldots \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \ldots & a_{2k}^* & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1}^* & a_{j2}^* & \ldots & a_{jk}^* & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

transposée conjuguée de la matrice (2). En particulier, $U^* = U$ signifie que $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

3.4. Les projecteurs forment une importante classe d'opérateurs dans l'espace hilbertien.

Soit $\mathbf{H}_0$ un sous-espace d'un espace hilbertien $\mathbf{H}$. En vertu du théorème IV.5.1 à chaque $x \in \mathbf{H}$ est associée de façon unique sa projection sur $\mathbf{H}_0$. Ceci définit dans $\mathbf{H}$ un opérateur $P = P_{\mathbf{H}_0}$, appelé *projecteur* (sur le sous-espace $\mathbf{H}_0$).

Notons les propriétés évidentes des projecteurs.

a) Les éléments Px et $x - Px$ sont orthogonaux pour tout $x \in \mathbf{H}$.

b) $x \in \mathbf{H}_0$ est équivalent à $Px = x$.

c) $x \perp \mathbf{H}_0$ est équivalent à $Px = 0$.

D'autre part, $\| x \|^2 = \| Px \|^2 + \| x - Px \|^2$ implique $\| Px \| \leqslant \| x \|$, d'où $\| P \| \leqslant 1$. Si $\mathbf{H}_0 \neq \{ 0 \}$, en prenant $\bar{x} \in \mathbf{H}_0$, avec $\| \bar{x} \| = 1$, on obtient $\| P \| \geqslant \| P\bar{x} \| = \| \bar{x} \| = 1$. De sorte que

d) $\| P \| = 1$.

La classe des projecteurs est justiciable du théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Pour qu'un opérateur linéaire P dans* $\mathbf{H}$ *soit projecteur il faut et il suffit que*:

1) *P soit auto-adjoint*;

2) *pour chaque $x \in \mathbf{H}$ on ait $P(Px) = Px$.*

DÉMONSTRATION. CONDITION NÉCESSAIRE. Soit P un projecteur sur $\mathbf{H}_0$. Prenons x, $y \in \mathbf{H}$ quelconques et mettons-les sous la forme

$$x = x' + x'' \quad (x' = Px \in \mathbf{H}_0, \quad x'' \perp \mathbf{H}_0),$$

$$y = y' + y'' \quad (y' = Py \in \mathbf{H}_0, \quad y'' \perp \mathbf{H}_0).$$

On a alors

$$(Px, y) = (x', y' + y'') = (x', y') = (x' + x'', y') = (x, Py),$$

d'où il suit que l'opérateur P est auto-adjoint.

Par ailleurs, en vertu de b) on a

$$P(Px) = Px' = x' = Px,$$

ce qui démontre la condition nécessaire de 2).

CONDITION SUFFISANTE. Soit P un opérateur linéaire vérifiant les deux conditions du théorème. Désignons par $\mathbf{H}_0$ l'ensemble des $x \in \mathbf{H}$, tels que $Px = x$. On vérifie sans peine que $\mathbf{H}_0$ est un sous-espace de $\mathbf{H}$. Montrons que P est un projecteur sur $\mathbf{H}_0$. En effet, prenons un $x \in \mathbf{H}_0$ et mettons-le sous la forme $x = Px + (x - Px)$. Il faut prouver que $Px \in \mathbf{H}_0$ et $x - Px \perp \mathbf{H}_0$.

La première relation est évidente, puisque $P(Px) = Px$. Si ensuite $u \in \mathbf{H}_0$, alors $Pu = u$ et par conséquent

$$(x - Px, u) = (x, u) - (Px, u) = (x \quad u) - (x \quad Pu) = 0;$$

donc, $x - Px \perp \mathbf{H}_0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Pour obtenir une représentation matricielle commode du projecteur P, il faut choisir un système orthonormal $x_1, x_2, \ldots$ tel que pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ l'on ait soit $x_k \in \mathbf{H}_0$, soit $x_k \perp \mathbf{H}_0$ *).

---

*) Ce qu'on réalise de la manière suivante. On choisit des systèmes orthonormés dans $\mathbf{H}_0$ et dans l'orthocomplément de $\mathbf{H}_0$, complets dans chacun de ces sous-espaces. Puis on groupe ces systèmes dans un seul (cf. IV.5.8).

Avec un tel choix on a

$$a_{jk} = (Px_k, x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 0, & j = k, \quad x_k \perp \mathrm{H}_0, \\ 1, & j = k, \quad x_k \in \mathrm{H}_0. \end{cases}$$

Donc, tous les éléments de la matrice (2) représentant le projecteur P sont nuls à l'exception de ceux de la diagonale principale qui peuvent être égaux à l'unité.

Les opérateurs adjoints et les projecteurs ont été introduits par Neumann [1] dans le cas d'un espace hilbertien séparable et par Rellich [1] dans le cas général.

3.5. Etablissons une relation entre le projecteur introduit dans 3.4 et le projecteur au sens de la théorie des espaces normés (IV.1.9). Nous appellerons provisoirement le premier opérateur orthoprojecteur et le second, projecteur. Soit H un espace hilbertien. Il est évident qu'un orthoprojecteur est un projecteur; la réciproque n'est pas vraie. Le théorème IV.5.1 affirme l'existence d'un orthoprojecteur sur tout sous-espace d'un espace hilbertien, or cela veut dire que ce sous-espace admet un complémentaire (au sens de IV.1.9). Il s'avère que cette propriété caractérise l'espace hilbertien dans la classe des B-espaces.

THÉORÈME 3. *Si tout sous-espace fermé d'un B-espace* X *possède un complémentaire dans* X, *alors* X *est isomorphe à un espace hilbertien.*

Le théorème 3 dont la démonstration (ainsi que des exemples concrets de sous-espaces non complémentables dans des B-espaces) figure dans un article de Kadets et Mitiaguine [1], a été prouvé par I. Lindestrauss et L. Tzafriri. Les plus connus des sous-espaces non complémentables sont l'espace $\mathbf{c}_0$ (dans $\mathbf{l}^\infty$) et $\mathbf{C}$ [0, 1] (dans $\mathbf{L}^\infty$ (0, 1)).

§ 4. Anneau des opérateurs

4.1. Les opérateurs linéaires peuvent être additionnés et aussi multipliés. Soient X, Y et Z des espaces normés, U et V des opérateurs linéaires de X dans Y et de Y dans Z respectivement ($U \in B$ (X, Y), $V \in B$ (Y, Z)). Par *produit* des opérateurs V et U on entendra l'opérateur $W = VU$ de X dans Z, défini par:

$$W(x) = V(U(x)) \quad (x \in \mathrm{X})\ ^{*)}.$$

Comme

$$W(x_1 + x_2) = V(U(x_1 + x_2)) = V(U(x_1) + U(x_2)) = \\ = V(U(x_1)) + V(U(x_2)) = W(x_1) + W(x_2)$$

*) Cette définition a un sens pour les opérateurs non linéaires.

et

$$\| W(x) \| = \| V(U(x)) \| \leqslant \| V \| \, \| U(x) \| \leqslant \| U \| \, \| V \| \, \| x \|,$$

il vient que W est un opérateur linéaire et de plus

$$\| W \| = \| VU \| \leqslant \| V \| \, \| U \|. \tag{1}$$

Si X, Y, Z sont des espaces respectivement de dimensions m, n, p finies, et A, B, C les matrices définissant respectivement les opérateurs U, V, W, alors $C = BA$. En effet, $z = W(x)$ signifie que

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \xi_k$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m); \quad z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p)).$$

D'autre part, $z = V(y)$, où $y = U(x)$, c'est-à-dire

$$\zeta_j = \sum_{m=1}^{n} b_{jm} \eta_m, \quad \eta_m = \sum_{k=1}^{m} a_{mk} \xi_k$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p; \quad m = 1, 2, \ldots, n; \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)).$$

En comparant avec ce qui précède et du fait que x est arbitraire il vient

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} b_{jm} a_{mk} \quad (j = 1, 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, m),$$

c.q.f.d.

On sait du cours d'algèbre que le produit de deux matrices peut être une matrice nulle même si les matrices facteurs ne le sont pas. Cette circonstance montre que dans (1) l'inégalité ne peut être remplacée par une égalité, même dans le cas d'espaces de dimension finie.

Cependant, de nombreuses propriétés du produit de nombres sont valables pour les opérateurs. Indiquons par exemple sans les démontrer la distributivité et l'associativité de la multiplication. Il existe des opérateurs qui jouent le rôle de l'unité dans la multiplication des nombres. Mais à la différence de la multiplication usuelle il existe ici deux unités : l'unité à gauche et l'unité à droite. Ainsi, l'opérateur $I \in B(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ qui réalise la transformation identique dans X :

$$I(x) = x \quad (x \in \mathrm{X}), \tag{2}$$

sera l'unité à droite :

$$UI = U,$$

et par analogie, l'opérateur I_1 dans Y, l'unité à gauche :

$$I_1 U = U.$$

Il importe de souligner la non-commutativité du produit des opérateurs. Bien plus, l'opérateur UV n'est en général pas défini, et pour cette raison l'égalité $UV = VU$ n'a pas de sens. Même si UV a un sens (ce qui, de toute évidence, a lieu lorsque $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$), les opérateurs VU et UV sont définis dans des espaces différents, le premier dans $\mathbf{X}$, le second dans $\mathbf{Y}$.

Donc, le problème de la permutabilité des opérateurs U et V ne peut être posé que lorsque $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$, c'est-à-dire lorsque ces opérateurs sont des opérateurs dans un même espace $\mathbf{X}$, autrement dit sont éléments de l'espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Cependant, même dans ce cas l'égalité $UV = VU$ n'a pas lieu pour des opérateurs U, V quelconques de $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$, sauf si $\mathbf{X}$ est un espace de dimension 1.

4.2. L'espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ des opérateurs linéaires continus de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}$ occupe une place particulière parmi les espaces $B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, puisque le produit de deux éléments quelconques n'a de sens que sur lui.

On appelle *anneau* un ensemble muni de deux lois de composition : l'addition et la multiplication obéissant aux règles usuelles des opérations sur des nombres (à l'exception de la commutativité et de l'opération inverse de la multiplication). Si la multiplication est définie pour les éléments d'un espace normé, on dit que ce dernier est un *anneau normé* *). De plus, pour rattacher la multiplication à la métrique de l'espace, on exige que le produit soit continu.

Donc, l'espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ est un anneau normé (la continuité du produit résulte de l'inégalité (1)) **).

Dans un anneau normé, notamment dans l'espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$, on peut définir les puissances de tout élément. Soit $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. Par définition

$$U^0 = I, \quad U^n = U^{n-1}U \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

où I est l'opérateur identique dans $\mathbf{X}$ (cf. (2)).

Cette définition ne différant en rien de la définition correspondante pour les nombres, quels que soient m et n entiers positifs, on a

$$U^m U^n = U^{m+n},$$

d'où il résulte que les puissances d'un même opérateur U sont permutables.

---

*) On utilise souvent respectivement le terme d'*algèbre* et d'*algèbre normée*, et dans le cas de la complétude pour la norme, le terme d'*algèbre de Banach*.

**) Nous étudierons la théorie des anneaux normés seulement dans le cas de l'espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances sur les anneaux normés pourra consulter l'ouvrage de M. Naïmark.

En appliquant ensuite successivement l'inégalité (1), on trouve

$$\| U^n \| \leqslant \| U \|^n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Le signe d'égalité n'a généralement pas lieu.

On conviendra dans la suite que l'espace X est complet. Alors l'espace B (X, X) le sera également d'après le théorème 1.2. Envisageons sous cette hypothèse la « progression géométrique » :

$$I + U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots \tag{4}$$

Voyons à quelles conditions cette série est convergente. De (3) il résulte aussitôt que la convergence a lieu en tous les cas lorsque

$$\| U \| < 1, \tag{5}$$

puisque la série (4) est alors majorée par la série numérique convergente :

$$1 + \| U \| + \| U \|^2 + \ldots + \| U \|^n + \ldots$$

et donc elle est convergente en raison de la complétude de l'espace B (X, X) (cf. IV.1.5). Cependant à l'inverse du cas numérique, la condition (5) n'est pas nécessaire à la convergence de la série (4).

THÉORÈME 1. *Pour tout opérateur $U \in B$ (X, X) il existe*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| U^n \|} = c_U.$$

De plus, la série (4) *converge si $c_U < 1$ et diverge si $c_U > 1$.*

DÉMONSTRATION. Appelons

$$a = \inf_n \sqrt[n]{\| U^n \|}$$

et prouvons que $c_U = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| U^n \|} = a$. Soit $\varepsilon > 0$. Trouvons m tel que

$$\sqrt[m]{\| U^m \|} < a + \varepsilon.$$

Soit par ailleurs

$$M = \max [1, \| U \|, \ldots, \| U^{m-1} \|].$$

Prenons n quelconque et mettons-le sous la forme $n = k_n m + l_n$ $(0 \leqslant l_n \leqslant m - 1)$. Ceci étant, d'après (3) on a

$$\sqrt[n]{\| U^n \|} \leqslant \sqrt[n]{\| U^{l_n} \| \, \| U^m \|^{k_n}} \leqslant M^{1/n} \| U^m \|^{k_n/n} < M^{1/n} (a + \varepsilon)^{(n - l_n)/n}.$$

Comme

$$\lim_{n \to \infty} M^{1/n} (a + \varepsilon)^{(n - l_n)/n} = a + \varepsilon,$$

il existe N_ε tel que

$$M^{1/n}(a+\varepsilon)^{(n-\ln)/n} < a + 2\varepsilon \quad (n \geqslant N_\varepsilon).$$

Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$

$$a \leqslant \sqrt[n]{\| U^n \|} < a + 2\varepsilon,$$

d'où suit l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| U^n \|} = a$.

On établit maintenant la convergence ou la divergence (selon que $c_U < 1$ ou >1) de la série (4) en appliquant le critère de convergence de Cauchy à la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| U^n \|$.

COROLLAIRE. *Pour que la série* (4) *converge il faut et il suffit que pour un k on ait*

$$\| U^k \| < 1. \tag{6}$$

En effet, si la série (4) converge, alors $\| U^n \| \to 0$, et (6) est réalisée pour k assez grand. Inversement, si (6) a lieu, alors $c_U = \inf\limits_n \sqrt[n]{\| U^n \|} \leqslant \sqrt[k]{\| U^k \|} < 1$ et par suite la série (4) est convergente.

4.3. Etudions maintenant l'opération inverse de la multiplication des opérateurs. Soit donné un opérateur linéaire U d'un espace normé X dans un espace normé Y. On dira que l'opérateur U admet un *inverse* (ou qu'il est *inversible*) si existe un opérateur V de Y dans X tel que

$$VU = I_X, \quad UV = I_Y, \tag{7}$$

où I_X (resp. I_Y) est l'opérateur réalisant la transformation identique de l'espace X (resp. de l'espace Y *)). L'opérateur V s'appelle inverse de U et se note $V = U^{-1}$.

De la définition il suit immédiatement que l'opérateur inverse U^{-1} est également linéaire. En effet, si $y_1, y_2 \in$ Y, la deuxième relation (7) donne

$$y_k = U(x_k) \quad (x_k = V(y_k); \quad k = 1, 2).$$

En vertu de la première relation (7) on aura donc

$$V(y_1 + y_2) = V(U(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = V(y_1) + V(y_2).$$

De façon analogue, on démontre que U^{-1} est homogène.

De la définition il résulte encore que l'opérateur U est inverse de U^{-1}, c'est-à-dire $(U^{-1})^{-1} = U$.

*) Dans la suite nous utiliserons les notations I_X, I_Y, etc. sans les mentionner expressément. Lorsque aucune confusion n'est à craindre, on omettra l'indice précisant l'espace dans lequel est défini l'opérateur.

La définition de l'opérateur inverse revêt un caractère formel. Pour en dévoiler la signification nous allons montrer que si existe l'opérateur inverse U^{-1}, alors l'opérateur U réalise une bijection de X sur Y.

En effet, prenons $x_1 \neq x_2$ (x_1, $x_2 \in$ X). Si $U(x_1) = U(x_2)$, la première relation (7) nous donnerait

$$x_1 = VU(x_1) = VU(x_2) = x_2.$$

Par ailleurs, chaque $y \in$ Y est l'image d'un $x \in$ X (et ce x ne peut être qu'unique d'après ce qu'on a démontré). Plus exactement, pour x il convient de prendre l'élément $x = V(y)$. Alors la deuxième relation (7) donne

$$U(x) = UV(y) = y.$$

Inversement, supposons que l'opérateur U réalise une bijection de X sur Y. Associons à un élément $y \in$ Y son image réciproque, c'est-à-dire l'élément $x \in$ X tel que $U(x) = y$. Ceci nous conduit à un opérateur V de Y sur X. On vérifie sans peine que V est un opérateur linéaire et que $V = U^{-1}$.

En effet, les relations $x = V(y)$ et $y = U(x)$ sont équivalentes, donc

$$VU(x) = V(y) = x, \quad UV(y) = U(x) = y.$$

De ce qui précède il suit entre autres que l'opérateur inverse, s'il existe, ne peut être qu'unique.

Notre exposé nous permet d'envisager la notion d'opérateur inverse sous un autre angle. Soit donnée l'équation

$$U(x) = y, \tag{8}$$

où y est un élément quelconque mais fixe de Y, et x un élément inconnu de l'espace X.

Il est clair que si existe un opérateur inverse U^{-1}, alors l'équation (8) admet une solution unique pour tout $y \in$ Y, et de plus cette solution est $x = U^{-1}(y)$.

L'unicité de la solution de l'équation (8) ne garantit pas encore l'existence de l'opérateur inverse continu U^{-1}.

THÉORÈME 2. *Supposons que l'équation* (8) *possède une solution pour tout* $y \in$ Y *et qu'existe un nombre positif* m *tel que pour chaque* $x \in$ X

$$\| U(x) \| \geqslant m \| x \|. \tag{9}$$

L'opérateur U *admet alors un opérateur inverse continu* U^{-1} *et de plus*

$$\| U^{-1} \| \leqslant \frac{1}{m}. \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que l'application réalisée par l'opérateur U est bijective, puisque si $x_1 \neq x_2$, on a

$$\| U(x_1) - U(x_2) \| \geqslant m \| x_1 - x_2 \| > 0.$$

De plus, la résolubilité de l'équation (8) pour tout $y \in \mathbf{Y}$ entraîne $U(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$.

Ainsi donc il existe, comme on l'a montré plus haut, un opérateur linéaire $V = U^{-1}$. Comme $x = V(y)$ équivaut à $y = U(x)$, de (9) on déduit que

$$\| y \| \geqslant m \| V(y) \| \quad (y \in \mathbf{Y})$$

ou

$$\| U^{-1}(y) \| = \| V(y) \| \leqslant \frac{1}{m} \| y \| \quad (y \in \mathbf{Y}). \tag{11}$$

En d'autres termes, U^{-1} est borné et par suite est un opérateur continu. La majoration (10) découle immédiatement de (11).

REMARQUE. Les conditions du théorème sont également nécessaires à l'existence de l'opérateur inverse continu U^{-1}.

Que la première condition soit nécessaire est évident. On vérifie facilement que la deuxième l'est si l'on prend $m = \frac{1}{\| U^{-1} \|}$.

Pour illustrer le théorème prouvé, considérons l'opérateur U dans $\mathbf{L}^2(a, b)$, défini dans 2.7 :

$$y = U(x), \quad y(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

(le noyau $K(s, t)$ est supposé symétrique).

Si l'on suppose que λ n'est plus valeur caractéristique du noyau, des faits classiques de la théorie des équations intégrales nous permettent de conclure que l'équation (8) possède dans ce cas une solution pour tout $y \in \mathbf{L}^2$ (voir Pétrovski). D'autre part, dans 2.7 on a montré (on utilise les notations précédentes) que

$$\| y \|^2 = \| U(x) \|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2.$$

Donc

$$\| U(x) \|^2 \geqslant m^2 \sum_{-\infty}^{\infty} h_k^2 = m^2 \| x \|^2,$$

où

$$m = \inf \left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right| \quad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots),$$

et λ_k représentent les valeurs caractéristiques du noyau $K(s, t)$ (pour $k = 0, -1, -2, \ldots$ il faut poser $\lambda_k = \infty$). Comme $\lambda_k \neq \lambda$ et $\lambda_k \to \infty$ pour $k \to \infty$, on a $m > 0$. Il existe donc un opérateur continu U^{-1} et de plus

$$\| U^{-1} \| \leqslant \frac{1}{m} = \sup \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \right| \quad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

4.4. En conservant l'une des relations (7) on arrive à la notion d'opérateur inverse à gauche (resp. à droite). Plus exactement, un opérateur V_g de $U(\mathbf{X})$ dans $\mathbf{X}$ s'appelle *opérateur inverse à gauche* de l'opérateur U si

$$V_g U = I_{\mathbf{X}}.$$

De façon analogue, un opérateur V_d de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}$ est *opérateur inverse à droite* de U si

$$U V_d = I_{\mathbf{Y}}.$$

On désignera l'opérateur inverse à gauche par U_g^{-1} et l'opérateur inverse à droite par U_d^{-1}. On omettra parfois ces indices lorsqu'il n'y aura aucune confusion à craindre. Le raisonnement précédent montre que l'opérateur inverse à gauche est nécessairement linéaire.

L'existence de l'opérateur inverse à gauche ou à droite nous permet de tirer quelques conclusions sur la solubilité de l'équation (8).

Plus exactement, si existe l'opérateur inverse à gauche U_g^{-1}, la solution de l'équation (8), si elle existe, est unique. En d'autres termes, si l'opérateur inverse à gauche existe, U réalise une bijection de $\mathbf{X}$ sur $U(\mathbf{X})$. En effet, pour vérifier cette circonstance dans le cas où l'opérateur inverse existe, nous n'avons utilisé que la première des relations (7) qui est valable pour l'opérateur inverse à gauche.

Il y a lieu de noter que, d'une façon générale, l'ensemble $U(\mathbf{X})$ n'est pas confondu avec $\mathbf{Y}$, et, de ce fait, l'opérateur U_g^{-1} n'est pas défini sur $\mathbf{Y}$ tout entier.

De façon analogue, on s'assure que l'existence de l'opérateur inverse à droite entraîne celle de la solution (en général pas unique) de l'équation (8) pour tout $y \in \mathbf{Y}$ (la solution sera $x = U_d^{-1}(y)$), c'est-à-dire $U(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$.

De ce qui précède il suit que si existent l'opérateur inverse à gauche U_g^{-1} et l'opérateur inverse à droite U_d^{-1}, ils sont égaux entre eux. De plus, il existe l'opérateur inverse $U^{-1} = U_g^{-1} = U_d^{-1}$. Aussi appellerons-nous parfois l'opérateur inverse opérateur inverse bilatéral.

Notons en conclusion qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'opérateur inverse à gauche continu est que l'opérateur U vérifie la condition (9).

4.5. Le cas $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ est intéressant en ce sens que si existe l'opérateur inverse continu d'un opérateur donné $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$, il est élément du même espace $B(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Les raisonnements de 4.2 relatifs à la série (4):

$$I + U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots,$$

nous conduisent au théorème suivant (voir Banach [2]).

THÉORÈME 3 (Banach). *Soient* X *un B-espace et* $U \in B$ (X, X). *Si*

$$\| U \| \leqslant q < 1, \tag{12}$$

l'opérateur $I - U$ *possède un opérateur inverse continu et de plus*

$$\| (I-U)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-q}. \tag{13}$$

DÉMONSTRATION. Dans 4.2, on a montré que la série (4) était convergente dans les conditions du théorème, c'est-à-dire dans la condition (5). Désignons par V la somme de cette série. On a

$$V(I-U) = (I + U + \ldots + U^n + \ldots)(I-U) =$$
$$= (I + U + \ldots + U^n + \ldots) - (U + U^2 + \ldots + U^{n+1}) =$$
$$= I, \tag{14}$$

et de façon analogue

$$(I-U)\,V = I. \tag{15}$$

Donc $V = (I-U)^{-1}$.

En vertu de (3)

$$\| V \| \leqslant \| I \| + \| U \| + \ldots + \| U^n \| + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant 1 + q + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q},$$

c.q.f.d.

REMARQUE. Les relations (14) et (15) étant toujours réalisées lorsque la série (4) est convergente, le théorème 1 et son corollaire nous disent que l'opérateur linéaire continu $(I-U)^{-1}$ existera aussi lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| U^n \|} \leqslant 1 \tag{16}$$

ou si pour un $k = 1, 2, \ldots$

$$\sqrt[k]{\| U^k \|} < 1. \tag{17}$$

4.6. Le théorème de Banach montre que l'opérateur $I - U$ qui diffère peu de l'opérateur identique I possédant un inverse continu ($I^{-1} = I$), admet lui-même un inverse continu. Ce fait se généralise comme suit.

THÉORÈME 4. *Supposons que* $U_0 \in B$ (X, Y), *où* X *et* Y *sont deux B-espaces et qu'existe* $U_0^{-1} \in B$ (Y, X). *Si l'opérateur* $U \in B$ (X, Y)

vérifie la condition

$$\| U \| < \frac{1}{\| U_0^{-1} \|}, \tag{18}$$

alors l'opérateur $V = U_0 + U$ *admet un inverse* V^{-1} *continu, et de plus*

$$\| V^{-1} \| \leqslant \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leqslant \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}.$$

DÉMONSTRATION. Soit l'opérateur

$$W = U_0^{-1} V = I_X + U_0^{-1} U.$$

D'après le théorème de Banach l'opérateur W possède un inverse continu W^{-1}, puisque

$$\| U_0^{-1} U \| \leqslant \| U_0^{-1} \| \| U \| < 1.$$

De plus

$$\| W^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leqslant \frac{1}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}. \tag{19}$$

D'autre part

$$U_0^{-1} V W^{-1} = I_X,$$

d'où

$$V W^{-1} = U_0$$

et par suite,

$$V W^{-1} U_0^{-1} = I_Y.$$

D'autre part

$$W^{-1} U_0^{-1} V = I_X.$$

Les deux dernières égalités entraînent que l'opérateur $W^{-1} U_0^{-1}$ est l'inverse continu de l'opérateur V.

De l'égalité $V^{-1} = W^{-1} U_0^{-1}$ et compte tenu de (19) il vient

$$\| V^{-1} \| \leqslant \| W^{-1} \| \| U_0^{-1} \| \leqslant \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leqslant \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}.$$

§ 5. Méthode des approximations successives

5.1. Soit l'équation

$$x - U(x) = y, \tag{1}$$

où U est un opérateur linéaire continu dans un B-espace X, y est donné et x est l'élément cherché de X.

La *méthode des approximations successives* est l'une des méthodes les plus usuelles de résolution de l'équation (1). Son principe est le suivant: on donne un élément quelconque $x_0 \in X$ appelé *approximation initiale* et on construit à partir de cet élément la suite $\{x_n\}$

des *solutions approchées*:

$$x_{n+1} = y + U(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Si l'on obtient une suite convergente dont la limite est la solution de l'équation considérée, on dit que le processus des approximations successives pour l'équation (1), d'élément initial x_0, est convergent (vers la solution de l'équation (1)). Vu que $U \in B(X, X)$, le seul fait de la convergence de la suite $\{x_n\}$ implique que $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ est solution de l'équation (1). Pour s'en assurer il suffit de passer à la limite pour $n \to \infty$ dans (2).

La convergence du processus d'approximations successives pour l'équation (1) est rattachée à celle de la série

$$I + U + \ldots + U^n + \ldots, \tag{3}$$

dont la somme (en cas de convergence) est $(I - U)^{-1}$ (voir remarque suivant le théorème de Banach 4.3).

THÉORÈME 1. *Si la série* (3) *est convergente, le processus d'approximations successives pour l'équation* (1) *converge vers l'unique solution* x^* *de l'équation* (1) *quelle que soit l'approximation initiale* x_0. *De plus*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \| (I - U)^{-1} \| \, \| U^n \| \, \| x_1 - x_0 \| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

En particulier, si l'on se place dans les conditions du théorème de Banach, cette majoration peut être remplacée par

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| x_1 - x_0 \| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

DÉMONSTRATION. En appliquant successivement la formule (2) on trouve

$$x_n = y + U(y) + \ldots + U^{n-1}(y) + U^n(x_0) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

d'où il suit que si la série (3) est convergente, alors existe

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} U^k(y) = (I - U)^{-1}(y),$$

puisque $U^n(x_0) \to 0$. La première partie du théorème est démontrée, puisque x^* est manifestement solution de l'équation (1).

Pour obtenir la majoration (4), substituons x^* à x_0 dans (5). Alors il est clair de la formule (2) que $x_n = x^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc nous sommes conduits à la relation

$$x^* = y + U(y) + \ldots + U^{n-1}(y) + U^n(x^*) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si l'on soustrait l'égalité (5) de cette relation et l'on passe aux normes on obtient

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \| U^n \| \, \| x^* - x_0 \| \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Posons $\tilde{x} = x^* - x_0$. Vu que x^* est solution de l'équation (1) et par suite $x^* - U(x^*) = y$, on aura

$$(I - U)(\tilde{x}) = \tilde{x} - U(\tilde{x}) = x^* - U(x^*) - x_0 + U(x_0) =$$
$$= y + U(x_0) - x_0 = x_1 - x_0;$$

d'où

$$\tilde{x} = (I - U)^{-1}(x_1 - x_0).$$

En utilisant ceci dans (6) on obtient la majoration annoncée.

5.2. Le théorème 1 possède d'innombrables applications. Voyons quelques unes d'entre elles.

Supposons d'abord que X est un espace de dimension m. Un opérateur linéaire $U \in B(X, X)$ est déterminé dans ce cas par une matrice carrée $A = (a_{jk})$ et l'équation (1) peut être écrite sous la forme du système d'équations

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k = \eta_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m); \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)). \tag{7}$$

Les approximations successives $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$ $(n = 0, 1, \ldots)$ de la solution sont données par les formules

$$\xi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1} a_{jk}\xi_k^{(n)} + \eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \quad n = 0, 1, \ldots).$$

La condition (12) du paragraphe précédent qui assure la convergence du processus d'approximations successives vers la solution dépend de la norme adoptée dans X. Si $X = l_m^\infty$, alors le fait que dans ce cas (cf. 2.8)

$$\| U \| = \max_j \sum_{k=1}^{m} | a_{jk} |$$

entraîne l'existence de $\lim_{n\to\infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j^*$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sous réserve que

$$\sum_{k=1}^{m} | a_{jk} | < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

et de plus $\xi_1 = \xi_1^*$, $\xi_2 = \xi_2^*$, ..., $\xi_m = \xi_m^*$ est solution (unique) du système (7).

Pour $\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^1$, on obtient une autre condition

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{jk}| < 1 \quad (k=1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Enfin, pour $\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^2$, la majoration qui a lieu dans ce cas

$$\|U\| \leqslant [\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2]^{1/2}$$

donne la condition

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2 < 1. \tag{10}$$

Il est curieux de noter que si la matrice A est symétrique et $\mathbf{X} = \mathbf{l}_m^2$, alors la condition $\|U\| < 1$ est non seulement suffisante mais nécessaire à la convergence du processus des approximations successives.

En effet, on a démontré dans 2.8 que dans ce cas

$$\|U\| = |\lambda_1|,$$

où λ_1 est la valeur propre de plus grand module de la matrice A. Si, dans le système (7), on prend pour y le vecteur propre associé à λ_1 et l'on pose $x_0 = 0$, on obtient

$$x_1 = y; \quad x_2 = U(x_1) + y = (\lambda_1 + 1)\, y; \ldots;$$
$$x_{n+1} = U(x_n) + y = (\lambda_1^n + \ldots + \lambda_1 + 1)\, y \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

d'où il suit que pour $n \to \infty$ la suite $\{\xi_j^{(n)}\}$ ne possède pas de limite si $|\lambda_1| \geqslant 1$ $(\eta_j \neq 0)$.

Donc, lorsque la matrice A est symétrique, le processus des approximations successives converge vers la solution si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A sont inférieures à l'unité en valeur absolue.

Au chapitre XIII, tome 2, on démontrera un résultat général qui entraînera le fait indiqué plus haut sans l'hypothèse de symétrie de la matrice A. On laisse au soin du lecteur la vérification immédiate de cette circonstance.

Exhibons les majorations de la valeur propre de plus grand module λ_1 d'une matrice arbitraire A. En désignant par $x_1 \in \mathbf{X}$ le vecteur propre associé à la valeur propre λ_1, on obtient $U(x_1) = \lambda_1 x_1$ et par suite

$$|\lambda_1| \, \|x_1\| = \|U(x_1)\| \leqslant \|U\| \, \|x_1\|,$$

c'est-à-dire $|\lambda_1| \leqslant \|U\|$. Si pour $\mathbf{X}$ on prend l'espace $\mathbf{l}_m^\infty$, il en résulte

$$|\lambda_1| \leqslant \max_j \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|.$$

Si $X = l^1_m$, on obtient la majoration

$$|\lambda_1| \leqslant \max_k \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|.$$

Enfin, si $X = l^2_m$, alors

$$|\lambda_1| \leqslant \|U\| \leqslant [\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|^2]^{1/2} \text{ *)}$$

5.3. Passons à l'étude des systèmes infinis. Soit le système d'équations

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

On appellera *solution* du système une suite numérique $\{\xi_j^*\}$, telle que pour $\xi_j = \xi_j^*$ les séries du premier membre de (11) soient convergentes et toutes les équations (11) se transforment en identités.

Les systèmes de cette nature se présentent dans l'étude des problèmes aux limites pour les équations de physique mathématique et les équations intégrales **).

Supposons tout d'abord que la matrice infinie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1k} \ldots \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2k} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} \ldots & a_{jk} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

du système (11) vérifie la condition

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1. \tag{12}$$

De plus, ainsi que nous l'avons montré dans III.3.1, la matrice A définit un opérateur linéaire continu U dans l'espace l^2:

$$z = U(x), \quad \zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k$$

$(j = 1, 2, \ldots; x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), \quad z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots))$.

La condition (12) donne

$$\|U\| \leqslant [\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2]^{1/2} < 1,$$

*) Pour les méthodes itératives de résolution des systèmes finis voir Faddéev et Faddéeva, chap. III.

**) Pour les systèmes infinis voir Kantorovitch [4]; pour la bibliographie sur les systèmes infinis voir Kantorovitch et Krylov.

donc le système (11) écrit sous forme d'une équation (1):

$$x - U(x) = y \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)),$$

est justiciable du théorème 1 qui dit que pour chaque $y \in l^2$ il existe une solution $x^* = \{x_k^*\}$ unique (dans l'espace l^2) qui est susceptible d'être obtenue par la méthode d'approximations successives:

$$\xi_j^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k^{(n)} + \eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots; \ n = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^* - \xi_j^{(n)}|^2 = 0$$

($\{\xi_k^{(0)}\}$ est une suite quelconque de l^2).

Remplaçons maintenant la condition (12) par une moins forte:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty. \tag{13}$$

On ne peut se servir du théorème 1, car même si sous cette condition la matrice A définit dans l^2 un opérateur linéaire continu, l'inégalité $\| U \| < 1$ n'est d'une façon générale plus réalisée.

Montrons que l'étude du système (11) sous la condition (13) se ramène à celle d'un système fini (nous admettons que la suite $\{\eta_j\}$ des seconds membres est un élément de l'espace l^2).

Trouvons un n_0 tel que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < 1.$$

Fixons les n_0 premières inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}$ et considérons le système

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j + \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk}\xi_k \quad (j = n_0+1, n_0+2, \ldots). \tag{14}$$

Comme

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}\xi_k|^2 = |\xi_k|^2 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leqslant |\xi_k|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} |a_{js}|^2 < \infty$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n_0),$$

la suite des seconds membres du système (14) appartient à l^2, donc en vertu de ce qui a été dit plus haut ce système possède une solution unique $\tilde{\xi}_{n_0+1}, \tilde{\xi}_{n_0+2}, \ldots$ dans l^2, dépendant des valeurs fixées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_0}$. Etudions le caractère de cette relation. Considérons pour cela les systèmes

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = a_{js} \quad (j = n_0+1, n_0+2, \ldots; \ s = 1, 2, \ldots, n_0)$$

et

$$\xi_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j \quad (j = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots),$$

dont les solutions (qui sont uniques) seront désignées respectivement par $\{c_{ks}\}$ et $\{\tilde{\eta}_k\}$ ($k = n_0 + 1,\ n_0 + 2,\ \ldots;\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0$). On a donc

$$c_{js} - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}c_{ks} = a_{js} \quad (j = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots;\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0), \tag{15}$$

$$\tilde{\eta}_j - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\tilde{\eta}_k = \eta_j \quad (j = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots). \tag{16}$$

En multipliant les premières égalités par ξ_s, en sommant et en ajoutant à la dernière, on obtient la relation

$$\left(\tilde{\eta}_j + \sum_{s=1}^{n_0} c_{js}\xi_s\right) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\left(\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s\right) = \eta_j + \sum_{s=1}^{n_0} a_{js}\xi_s$$
$$(j = n_0+1,\ n_0+2\ \ldots),$$

d'où il résulte que la suite $\left\{\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s\right\}$ est solution du système (14). Par suite, en vertu de l'unicité de cette dernière

$$\tilde{\xi}_k = \tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} c_{ks}\xi_s \quad (k = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots).$$

On peut énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante : le système donné (11) est équivalent au système

$$\begin{aligned} &\xi_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k = \eta_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0), \\ &\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk}\xi_k = \tilde{\eta}_j \quad (j = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots). \end{aligned} \tag{17}$$

Dans les équations du premier groupe remplaçons ξ_k, $k > n_0$, par leurs expressions déduites du second groupe :

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} a_{jk}\xi_k - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk}\left(\tilde{\eta}_k + \sum_{s=1}^{n_0} a_{ks}\xi_s\right) = \eta_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0), \tag{18}$$

ou, si l'on pose (comparer avec (15) et (16))

$$c_{jk} = a_{jk} + \sum_{s=n_0+1}^{\infty} a_{js} c_{sk}, \quad \tilde{\eta}_j = \eta_j + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{jk} \tilde{\eta}_k$$

$$(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0)\ ^{*)}$$

alors on peut transcrire les équations (18) sous la forme

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0). \tag{19}$$

En ajoutant à ces équations celles du deuxième groupe du système (17):

$$\xi_j - \sum_{k=1}^{n_0} c_{jk} \xi_k = \tilde{\eta}_j \quad (j = n_0 + 1,\ n_0 + 2,\ \ldots), \tag{20}$$

on obtient un système infini équivalent au système donné (11).

La résolution du système construit s'effectue en deux étapes: d'abord on trouve les valeurs des n_0 premières inconnues à partir du système fini (19); ensuite on porte ces valeurs dans les équations (20) pour déterminer celles des inconnues restantes.

La deuxième étape étant toujours réalisable lorsque la première l'est, on a donc établi que la résolution du système infini (11) se ramène à celle du système fini (19).

Grâce à cette circonstance on peut prouver que le système (11), avec la condition (13), possède toutes les propriétés des systèmes finis. Au chapitre XIII, tome 2, nous arriverons à ce résultat par d'autres raisonnements généraux. Pour l'instant nous nous contentons d'indiquer seulement une de ces propriétés: si le système homogène associé à (11) (c'est-à-dire obtenu à partir de (11) pour $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = 0$) admet dans l^2 une solution unique (de toute évidence la solution triviale), alors le système donné (11) admet une solution unique, quelle que soit la suite $\{\eta_j\}$ des seconds membres.

En effet, si le système (11) est homogène, le système (19) le sera également et du fait que cette proposition est valable pour les systèmes finis, le système non homogène (19) possède une solution unique. Ce que nous voulions.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le système homogène (11) admet un nombre fini de solutions linéairement indépendantes et d'établir également la condition de résolubilité du système non homogène dans le cas où ce nombre est plus grand que zéro.

---

*) Les séries $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |a_{js}|^2$, $\sum_{s=n_0+1}^{\infty} |c_{sk}|^2$ et $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\tilde{\eta}_k|^2$ étant convergentes, celles du second membre le seront également.

5.4. Supposons maintenant que la matrice A vérifie la condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant 1-\rho \quad (j=1, 2, \ldots), \tag{21}$$

où $\rho > 0$.

Un système (11) vérifiant cette condition est dit *complètement régulier*.

Soit dans l'espace l^∞ l'opérateur U:

$$z = U(x),$$

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\xi_k \quad (j=1, 2, \ldots; \ x=(\xi_1, \xi_2, \ldots); \ z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)).$$

Vu que

$$|\zeta_j| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \, |\xi_k| \leqslant \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant (1-\rho)\|x\| \quad (j=1, 2, \ldots) \tag{22}$$

en vertu de (21), $z = U(x)$ a un sens pour tout $x \in l^\infty$ et est élément de l^∞. De plus

$$\|z\| = \|U(x)\| \leqslant (1-\rho)\|x\|.$$

D'où compte tenu de la linéarité évidente de U on déduit que U est un opérateur linéaire continu dans l^∞ et

$$\|U\| \leqslant 1-\rho. \tag{23}$$

Tout comme dans 3.3 on peut récrire le système (11) sous la forme d'une équation (1):

$$x - U(x) = y \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \ldots), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)). \tag{24}$$

Grâce à l'inégalité (23) on peut appliquer à l'équation (24) le théorème 1 qui affirme que cette équation possède pour tout $x \in l^\infty$ une solution unique (dans l'espace l^∞) qui peut être trouvée par la méthode des approximations successives.

Donc, un système complètement régulier admet une solution bornée unique quelle que soit la suite bornée $\{\eta_j\}$ des seconds membres.

Remarque. La proposition énoncée assure l'unicité de la solution bornée d'un système complètement régulier. De plus, il n'est pas exclu que ce système admette encore des solutions non bornées. Ainsi le système

$$\xi_j - \frac{1}{j+1}\xi_{j+1} = 0 \quad (j=1, 2, \ldots)$$

possède une infinité de solutions

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = 2a, \ldots, \quad \xi_k = k!a, \ldots,$$

où a est une constante arbitraire. Cependant si $a \neq 0$ toutes ces solutions sont indéfinies.

On peut faire une remarque analogue au sujet des systèmes envisagés dans 5.3.

Si l'on étudie les systèmes pour lesquels il existe n_0 et M tels que

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant 1-\rho, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant M \quad (j=1, 2, \ldots, \rho>0),$$

alors tout ce qui a été établi dans 5.3 pour les systèmes vérifiant la condition (13) est valable pour eux ; de plus, les raisonnements se généralisent sans changement important.

5.5. Soit l'équation intégrale

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s),$$

où le noyau $K(s, t)$ est supposé être continu.

Si l'on introduit un opérateur intégral U dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ ou dans $\mathbf{L}^2(a, b)$ (cf. 2.4 ou 2.6), on peut écrire l'équation intégrale sous la forme

$$x - \lambda U(x) = y. \tag{25}$$

Si

$$|\lambda| < \frac{1}{\|U\|}, \tag{26}$$

alors le théorème 4.3 dit que l'opérateur $I - \lambda U$ admet un inverse continu

$$(I - \lambda U)^{-1} = I + \lambda U + \lambda^2 U^2 + \ldots + \lambda^n U^n + \ldots$$

Donc, l'unique solution x^* de l'équation (25) est de la forme

$$x^* = (I - \lambda U)^{-1}(y) = y + \lambda U(y) + \lambda^2 U^2(y) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^n U^n(y) + \ldots \tag{27}$$

Cette série s'appelle *série de Neumann.*

Montrons que les opérateurs U^n sont intégraux au même titre que U. En effet, $v = U^2(x)$ signifie que $v = U(z)$, où $z = U(x)$, c'est-à-dire

$$v(s) = \int_a^b K(s, t)\, z(t)\, dt, \quad z(t) = \int_a^b K(t, u)\, x(u)\, du.$$

D'où

$$v(s)=\int_a^b K(s,\ t)\left[\int_a^b K(t,\ u)\,x(u)\,du\right]dt=$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,\ t)\,K(t,\ u)\,dt\right]x(u)\,du=\int_a^b K_2(s,\ u)\,x(u)\,du$$

$$\left(K_2(s,\ u)=\int_a^b K(s,\ t)\,K(t,\ u)\,dt\right).$$

On peut montrer par récurrence que $v = U^n(x)$ signifie que

$$v(s)=\int_a^b K_n(s,\ u)\,x(u)\,du \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

où $K_n(s,\ u)$ sont déterminés à partir de la relation récurrentielle

$$K_n(s,u)=\int_a^b K_{n-1}(s,\ t)\,K(t,\ u)\,dt \quad (n=2,\ 3,\ \ldots),$$

dont le développement nous donne

$$K_n(s,\ u)=\int_a^b\ldots\int_a^b K(s,\ t_1)\,K(t_1,\ t_2)\ldots K(t_{n-1},\ u)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-1}.$$

Les fonctions $K_n(s,\ u)$ sont dites *noyaux itérés*.

La série de Neumann peut maintenant être écrite sous la forme détaillée :

$$x^*(s)=y(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,y(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K_2(s,\ t)\,y(t)\,dt+\ldots$$

$$\ldots+\lambda^n\int_a^b K_n(s,\ t)\,y(t)\,dt+\ldots$$

Le caractère de convergence de cette série dépend de l'espace dans lequel nous considérons l'opérateur U.

On déduit les conditions de convergence de la série de Neumann à partir de (26) en remplaçant $\|U\|$ par son expression. Ainsi dans l'espace $\mathbf{C}[a,\ b]$ (cf. 2.4)

$$\|U\|=\max_s\int_a^b|K(s,\ t)|\,dt\leqslant M(b-a) \quad \left(M=\max_{s,\,t}|K(s,\ t)|\right)$$

et la condition (26) s'écrit

$$|\lambda| < \frac{1}{\max\limits_s \int\limits_a^b |K(s, t)|\, dt}$$

ou simplement

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Dans l'espace $\mathbf{L}^2(a, b)$ (cf. 2.6)

$$\|U\| \leqslant \left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt\right]^{1/2}.$$

Donc une condition suffisante de convergence (dans $\mathbf{L}^2$) de la série de Neumann sera

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt\right]^{1/2}}.$$

Si le noyau $K(s, t)$ est symétrique, alors comme on l'a vu dans 2.6 on a l'égalité

$$\|U\| = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

où λ_1 est la valeur caractéristique de plus petit module du noyau $K(s, t)$. Donc, dans le cas d'un noyau symétrique, la convergence de la série de Neumann (toujours dans $\mathbf{L}^2$) aura lieu pour

$$|\lambda| < |\lambda_1|.$$

De même que dans 5.2, on peut vérifier pour les systèmes finis que, si $|\lambda| \geqslant |\lambda_1|$, la série de Neumann ne sera pas convergente pour tout $y \in \mathbf{L}^2$. Donc, dans ce cas, la condition (26) est une condition non seulement suffisante mais aussi nécessaire de convergence de la série de Neumann.

De façon analogue on se sert de l'inégalité $|\lambda_1| \geqslant \frac{1}{\|U\|}$ pour minorer la valeur caractéristique de plus petit module du noyau :

$$|\lambda_1| \geqslant \frac{1}{\max \int\limits_a^b |K(s, t)|\, dt} \geqslant \frac{1}{M(b-a)}, \quad |\lambda_1| \geqslant \frac{1}{\left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt\right]^{1/2}}.$$

Signalons en conclusion le fait suivant. D'après la remarque qui suit le théorème de Banach (4.5) la série de Neumann sera conver-

gente lorsque pour un $n = 1, 2, \ldots$

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt[n]{\|U^n\|}},$$

c'est-à-dire (dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\max\limits_s \int\limits_a^b |K_n(s, t)|\, dt\right]^{1/n}},$$

ou (dans l'espace $\mathbf{L}^2(a, b)$)

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K_n(s, t)|^2\, ds\, dt\right]^{1/2n}}.$$

§ 6. Anneau d'opérateurs dans un espace hilbertien

6.1. Etudions plus en détail l'anneau $B(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ des opérateurs linéaires dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$. Voyons tout d'abord comment le passage à l'opérateur adjoint est lié avec les opérations algébriques de l'anneau. On a les propositions suivantes:

a) $$[U_1 + U_2]^* = U_1^* + U_2^*. \tag{1}$$

En effet, quels que soient $x, y \in \mathbf{H}$ on a

$$([U_1 + U_2]\, x,\ y) = (x,\ [U_1 + U_2]^*\, y),$$
$$(U_1, x,\ y) = (x,\ U_1^* y),$$
$$(U_2 x,\ y) = (x,\ U_2^* y).$$

En additionnant les deux dernières égalités on trouve

$$([U_1 + U_2]\, x,\ y) = (x,\ U_1^* y + U_2^* y) = (x,\ [U_1^* + U_2^*]\, y),$$

d'où, puisque x est arbitraire,

$$[U_1 + U_2]^*\ y = [U_1^* + U_2^*]\, y,$$

ce qui équivaut à (1).

b) $$[\lambda U]^* = \bar{\lambda} U^*. \tag{2}$$

On a

$$([\lambda U]\, x,\ y) = (x,\ [\lambda U]^*\, y) \quad (x,\ y \in \mathbf{H}). \tag{3}$$

Or $[\lambda U]\, x = \lambda U x$, donc

$$([\lambda U]\, x,\ y) = \lambda\, (Ux,\ y) = \lambda\, (x,\ U^* y) = (x,\ [\lambda U^*]\, y).$$

En comparant avec (3), on obtient (2).

c) $$[U_1 U_2]^* = U_2^* U_1^*. \tag{4}$$

En effet

$$([U_1U_2]\,x,\ y) = (x,\ [U_1U_2]^*\,y) \quad (x,\ y \in \mathbf{H}).$$

Par ailleurs,

$$([U_1U_2]\,x,\ y) = (U_1\,(U_2x),\ y) = (U_2x,\ U_1^*y) =$$
$$= (x,\ U_2^*\,(U_1^*y)) = (x,\ [U_2^*U_1^*]\,y).$$

En procédant comme plus haut on obtient (4).

d) Si l'opérateur U admet un inverse linéaire U^{-1}, alors l'opérateur adjoint U^* possède également un inverse linéaire *) et de plus

$$(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*. \tag{5}$$

En effet, puisque $U^{-1}U = UU^{-1} = I$, on a en vertu de c)

$$U^*\,(U^{-1})^* = (U^{-1})^*U^* = I^* = I.$$

D'où notre proposition.

Si les opérateurs U_1 et U_2 sont auto-adjoints, les propositions a) à c) nous amènent aux résultats suivants:

e) Si λ, μ sont des réels, l'opérateur $\lambda U_1 + \mu U_2$ est auto-adjoint.

f) Le produit U_1U_2 est auto-adjoint si et seulement si $U_1U_2 = U_2U_1$, c'est-à-dire si U_1 et U_2 sont permutables.

En effet, U_1 et U_2 étant auto-adjoints, c) entraîne

$$[U_1U_2]^* = U_2U_1,$$

d'où le résultat annoncé.

Soient une suite d'opérateurs $\{U_n\}$ et un opérateur U. On dira que la suite $\{U_n\}$ est *faiblement convergente* vers U si

$$\lim_{n\to\infty} (U_nx,\ y) = (Ux,\ y), \quad \forall\, x \in \mathbf{H}, \quad \forall\, y \in \mathbf{H}.$$

Il est clair que la limite d'une suite faiblement convergente d'opérateurs auto-adjoints est un opérateur auto-adjoint.

De même si $U_nx \to Ux$ pour tout $x \in \mathbf{H}$ (dans ce cas on dira que la suite d'opérateurs $\{U_n\}$ *converge* vers l'opérateur U sur $\mathbf{H}$) et U_n sont des opérateurs auto-adjoints, alors U est auto-adjoint.

Enfin, si $U_n \to U$ dans l'espace B ($\mathbf{H}$, $\mathbf{H}$), le fait que les opérateurs U_n sont auto-adjoints entraîne que l'opérateur U est auto-adjoint.

Les deux derniers résultats deviennent évidents si dans les deux cas on remarque que la suite $\{U_n\}$ converge faiblement vers l'opérateur U.

---

*) On rappelle que dans un espace hilbertien un « opérateur linéaire » désigne un « opérateur linéaire continu » (voir page 193).

6.2. On dit qu'un opérateur U dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$ est *positif* ($U \geqslant 0$) si

$$(Ux,\ x) \geqslant 0$$

pour tout $x \in \mathbf{H}$.

Il est immédiat de vérifier qu'un opérateur positif est auto-adjoint. En effet, supposons que $(Ux,\ x)$ est réel pour tout $x \in \mathbf{H}$. Comme

$$(Ux,\ y) = \frac{1}{4}\{[(U(x+y),\ x+y) - (U(x-y),\ x-y)] + \\ + i\,[(U(x+yi),\ x+yi) - (U(x-yi),\ x-yi)]\}$$

et que les expressions entre parenthèses sont réelles, en permutant x et y on aura

$$(Uy,\ x) = \frac{1}{4}\{[(U(y+x),\ y+x) - (U(y-x),\ y-x)] + \\ + i\,[(U(y+xi),\ y+xi) - (U(y-xi),\ y-xi)]\} = \\ = \frac{1}{4}\{[(U(x+y),\ x+y) - (U(x-y),\ x-y)] - \\ - i\,[(U(x+yi),\ x+yi) - (U(x-yi),\ x-yi)]\} = \overline{(Ux,\ y)}.$$

D'où il vient

$$(Ux,\ y) = \overline{(Uy,\ x)} = (x,\ Uy),$$

c.q.f.d.

Remarque. En fait nous avons démontré que l'opérateur U pour lequel l'expression (Ux, x) est réelle pour tout $x \in \mathbf{H}$, est auto-adjoint. Il est aisé de voir que cette condition est nécessaire pour que U soit auto-adjoint.

On dira qu'un opérateur U_1 est *plus grand* qu'un opérateur U_2 ($U_1 \geqslant U_2$) si la différence $U_1 - U_2$ est un opérateur positif.

On remarquera que l'opérateur U^*U (ou UU^*) est positif quel que soit l'opérateur U. En effet,

$$(U^*Ux,\ x) = (Ux,\ Ux) \geqslant 0.$$

En particulier, si $U^* = U$ .c'est-à-dire U est auto-adjoint, alors $U^2 \geqslant 0$.

Il est également clair que la somme d'opérateurs positifs est un opérateur positif.

On notera encore qu'une combinaison linéaire d'opérateurs positifs à coefficients positifs réels est un opérateur positif.

Par ailleurs, toute puissance U^n d'un opérateur positif U est opérateur positif. En effet, si $n = 2m$ (i.e. est pair *)), alors

$$(U^n x, x) = (U^m x, U^m x) = \| U^n x \|^2 \geqslant 0 \quad (x \in \mathbf{H}).$$

Si $n = 2m + 1$ (n impair), alors

$$(U^n x, x) = (U(U^m x), U^m x) = (Uy, y) \geqslant 0 \quad (x \in \mathbf{H},\ y = U^m x).$$

De ce qui précède il suit qu'une combinaison linéaire des puissances d'un opérateur positif U à coefficients positifs, c'est-à-dire l'opérateur

$$\varphi(U) = a_0 U^n + a_1 U^{n-1} + \ldots + a_n I \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \geqslant 0)$$

sera opérateur positif. On appellera l'opérateur $\varphi(U)$ *polynôme opératoriel* de U.

Soit U un opérateur positif. On a l'inégalité

$$|(Ux, y)|^2 \leqslant (Ux, x)(Uy, y) \quad (x, y \in \mathbf{H}), \tag{6}$$

qui est une généralisation de l'inégalité de Bouniakovski (cette dernière se déduit à partir de (6) si l'on pose $U = I$). La démonstration de l'inégalité (6) répète presque intégralement celle de l'inégalité de Bouniakovski exhibée dans IV.5.1. Nous la laisserons donc au soin du lecteur.

6.3. Utilisons l'inégalité (6) pour démontrer un « théorème de la limite d'une suite monotone ».

THÉORÈME 1. *Soit donnée une suite croissante $\{U_n\}$ d'opérateurs auto-adjoints. Si $\sup_n \| U_n \| = A < \infty$, il existe un opérateur linéaire U tel que pour tout $x \in \mathbf{H}$ on ait*

$$Ux = \lim_{n \to \infty} U_n x,$$

et de plus

$$\| U \| \leqslant A. \tag{7}$$

DÉMONSTRATION. Prenons $m \geqslant n$. L'opérateur $U_m - U_n$ étant positif, pour tout $x \in \mathbf{H}$ on a

$$(U_m x, x) - (U_n x, x) = ([U_m - U_n] x, x) \geqslant 0,$$

c'est-à-dire la suite numérique $\{(U_n x, x)\}$ est croissante. Comme

$$|(U_n x, x)| \leqslant \| U_n x \| \, \| x \| \leqslant A \, \| x \|^2, \tag{8}$$

il existe $\lim_{n \to \infty} (U_n x, x)$ qui est finie.

---

*) Si $n = 0$ et par conséquent $U^n = I$, cette assertion est visiblement vraie.

D'autre part, en appliquant l'inégalité (6) à l'opérateur $U_m - U_n$ $(m \geqslant n)$ et compte tenu de (8), on peut écrire

$$|(U_m x - U_n x, y)|^2 \leqslant [(U_m x, x) - (U_n x, x)][(U_m y, y) - (U_n y, y)] \leqslant 2A \|y\|^2 [(U_m x, x) - (U_n x, x)].$$

Posons

$$y = U_m x - U_n x.$$

Ceci nous conduit à la relation

$$\|U_m x - U_n x\|^2 \leqslant 2A [(U_m x, x) - (U_n x, x)] \quad (x \in \mathbf{H}).$$

L'expression de droite tend vers zéro pour $m, n \to \infty$. Donc, il existe

$$Ux = \lim_{n \to \infty} U_n x.$$

Tel qu'il est défini, l'opérateur U est additif et homogène. Or

$$\|U_n x\| \leqslant \|U_n\| \|x\| \leqslant A \|x\|,$$

donc à la limite

$$\|Ux\| \leqslant A \|x\|,$$

c'est-à-dire U est un opérateur borné et $\|U\| \leqslant A$, c.q.f.d.

Remarque. Il est entendu que le théorème est valable pour une suite décroissante d'opérateurs.

6.4. Soit donné un opérateur positif U. On dit qu'un opérateur positif V est *racine carrée* de l'opérateur U si $V^2 = U$ et l'on note $V = \sqrt{U}$ ou $V = U^{1/2}$.

Théorème 2. *Soit U un opérateur positif. L'opérateur U admet une racine carrée $V = \sqrt{U}$ unique. De plus V est permutable avec tout opérateur permutable avec U.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut admettre que $\|U\| \leqslant 1$. Posons $U_0 = I - U$. L'opérateur U_0 est positif puisque

$$(U_0 x, x) = (x, x) - (Ux, x) \geqslant \|x\|^2 - \|U\| \|x\|^2 \geqslant 0 \quad (x \in \mathbf{H}).$$

En vertu de (6) on a

$$|(U_0 x, y)|^2 \leqslant (U_0 x, x)(U_0 y, y) \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Pour $y = U_0 x$ on obtient l'inégalité

$$\|U_0 x\| \leqslant \|x\|.$$

Donc

$$\|U_0\| \leqslant 1. \tag{9}$$

Définissons une suite d'opérateurs $\{V_n\}$ en posant

$$V_1 = 0, \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_0 + V_n^2) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Compte tenu de (9), on vérifie facilement par récurrence que

$$\| V_n \| \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Montrons maintenant que les opérateurs V_n et $V_{n+1} - V_n$ sont des polynômes opératoriels de U_0 à coefficients positifs. Pour $n = 1$ cela est évident. Les polynômes opératoriels étant justiciables des mêmes opérations que les polynômes ordinaires, de la formule (10) il résulte que si V_n est un polynôme opératoriel de U_0 à coefficients positifs, V_{n+1} le sera également. Si l'on utilise de nouveau la formule (10) pour écrire

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_0 + V_n^2) - \frac{1}{2}(U_0 + V_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(V_n^2 - V_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}(V_n + V_{n-1})(V_n - V_{n-1}),$$

alors en admettant qu'on ait prouvé que $V_n - V_{n-1}$ est un polynôme opératoriel à coefficients positifs et en tenant compte du fait que $V_n + V_{n-1}$ est également un polynôme opératoriel, on déduit que l'opérateur $V_{n+1} - V_n$, produit de polynômes opératoriels de U_0 à coefficients positifs, sera lui-même polynôme opératoriel de U_0 à coefficients positifs.

En utilisant le fait qu'un polynôme opératoriel à coefficients positifs est positif (cf. 6.2), on conclut que $V_n \geqslant 0$ et $V_{n+1} - V_n \geqslant 0$. En d'autres termes, la suite $\{V_n\}$ est croissante et V_n, étant positifs, seront également auto-adjoints. Vu que la suite $\{V_n\}$ est bornée d'après (11), le théorème 1 affirme l'existence d'un opérateur V_0 tel que

$$V_0 x = \lim_{n \to \infty} V_n x.$$

De plus, V_n étant positifs, V_0 le sera aussi et en vertu de (11)

$$\| V_0 \| \leqslant 1. \tag{12}$$

Supposons que l'opérateur $\overline{U}$ est permutable avec U et par conséquent avec U_0. Les opérateurs V_n de toute évidence sont également permutables avec $\overline{U}$, donc

$$\overline{U} V_0 x = \overline{U}(\lim_{n \to \infty} V_n x) = \lim_{n \to \infty} \overline{U} V_n x = \lim_{n \to \infty} V_n \overline{U} x = V_0 \overline{U}_x \quad (x \in \mathrm{H}),$$

c'est-à-dire V_0 est permutable avec $\overline{U}$. En particulier V_0 est permutable avec tout opérateur V_n. D'où

$$V_0^2 - V_n^2 = (V_0 + V_n)(V_0 - V_n),$$

donc

$$\| V_0^2 x - V_n^2 x \| \leqslant \| V_0 + V_n \| \| V_0 x - V_n x \| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \| V_0 x - V_n x \| \to 0 \quad (x \in \mathrm{H}),$$

de sorte que

$$V_0^2 x = \lim_{n \to \infty} V_n^2 x \quad (x \in \mathrm{H}).$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ dans la relation

$$V_{n+1} x = \frac{1}{2} (U_0 x + V_n^2 x) \quad (n = 1, 2, \ldots, x \in \mathrm{H}),$$

on trouve

$$V_0 x = \frac{1}{2} (U_0 x + V_0^2 x) \quad (x \in \mathrm{H}).$$

Donc, en posant $V = I - V_0$, on aura

$$V^2 = I - 2V_0 + V_0^2 = [I - 2V_0] + [2V_0 - U_0] = I - U_0 = U.$$

En tenant compte de (12) nous allons démontrer que l'opérateur V est positif, comme nous l'avons fait pour l'opérateur U_0. Donc $V = \sqrt{U}$.

Remarquons encore que V comme V_0 est permutable avec tout opérateur permutable avec U.

Prouvons maintenant l'unicité de la racine carrée. Soit V' une racine carrée de U. Comme

$$UV' = V'^3 = V'U,$$

V' est permutable avec U et par suite V est permutable avec V'. Prenons un $x \in \mathrm{H}$ quelconque et désignons $y = V'x - Vx$. On a

$$(V'y, y) + (Vy, y) = ([V' + V][V' - V]x, y) =$$
$$= ([V'^2 - V^2]x, y) = ([U - U]x, y) = 0.$$

D'où

$$(Vy, y) = (V'y, y) = 0,$$

puisque $(Vy, y) \geqslant 0$ et $(V'y, y) \geqslant 0$. Désignons par W une racine carrée de V. Comme

$$\| Wy \|^2 = (Wy, Wy) = (W^2 y, y) = (Vy, y) = 0,$$

alors $Wy = 0$ et *a fortiori* $Vy = W(Wy) = 0$. De façon analogue $V'y = 0$. Or

$$\| V'x - Vx \|^2 = ([V' - V]^2 x, x) = ([V' - V] y, x) = 0$$

et $V'x = Vx$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, donc $V' = V$, c.q.f.d. *).

*) On doit cette démonstration à Wisser (pour l'existence) et à Szekefalvi-Nady (pour l'unicité). Cf. Riesz et Nady Sz.

COROLLAIRE. *Si U_1 et U_2 sont des opérateurs positifs permutables entre eux, leur produit est également un opérateur positif.*

En effet, l'opérateur $\sqrt{U_2} = V$ est permutable avec U_1, donc

$$(U_1U_2x,\ x) = (U_1V^2x,\ x) = (VU_1Vx,\ x) =$$
$$= (U_1\,(Vx),\ Vx) \geqslant 0 \qquad (x \in \mathbf{H}).$$

6.5. Dans le cas où U est un opérateur auto-adjoint, le théorème V.4.1 du domaine de convergence de la série

$$I + U + \ldots + U^n + \ldots \tag{13}$$

se simplifie.

THÉORÈME 3. *Si U est un opérateur auto-adjoint, pour que la série* (13) *soit convergente il faut et il suffit que* $\| U \| < 1$.

DÉMONSTRATION. Prouvons tout d'abord que

$$\| U^2 \| = \| U \|^2. \tag{14}$$

En effet

$$\|U\|^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|^2}{\|x\|^2} = \sup_{x\neq 0} \frac{(U^2x,\ x)}{\|x^2\|} \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|U^2x\|}{\|x\|} = \|U^2\|,$$

et l'inégalité inverse $\| U^2 \| \leqslant \| U \|^2$ est réalisée pour tout opérateur U.

De (14) il suit que

$$\|U^{2^m}\| = \|U\|^{2^m} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{15}$$

et

$$c_U = \lim_{n\to\infty} \|U^n\|^{1/n} = \lim_{m\to\infty} \|U^{2^m}\|^{1/2^m} = \|U\|. \tag{16}$$

Compte tenu du résultat du théorème 4.1 et de la relation (16), il suffit de vérifier que la série (13) est divergente si $c_U = \| U \| = 1$. Or, dans ce cas, en vertu de (15)

$$\| U^{2^m} \| = 1 \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

et le terme général de (13) ne tend pas vers zéro.

6.6. La famille de projecteurs (3.4) joue un grand rôle dans l'anneau normé B (**H**, **H**) des opérateurs de l'espace hilbertien **H**. On montrera au chapitre IX, § 5 que tout opérateur auto-adjoint peut être ramené à des projecteurs au moyen d'une construction spéciale. Cette circonstance explique l'importance des théorèmes sur les projecteurs, énoncés plus bas.

On dit que deux projecteurs P_1 et P_2 sont *orthogonaux* si $P_1P_2 = 0$ *). Désignons respectivement par $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ les sous-espaces sur lesquels projettent les projecteurs P_1 et P_2. Pour que les projecteurs P_1 et P_2 soient orthogonaux il est nécessaire et suffisant que les sous-espaces $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ le soient. En effet, supposons que $P_1P_2 = 0$, $x' \in \mathbf{H}_1$, $x'' \in \mathbf{H}_2$. Le point b) de 3.4 et le théorème 3.2 nous donnent

$$(x', x'') = (P_1x', P_2x'') = (x', P_1P_2x'') = 0.$$

Si inversement $\mathbf{H}_1 \perp \mathbf{H}_2$ et $x \in \mathbf{H}$, alors $P_2x \in \mathbf{H}_2$ et par suite $P_2x \perp \mathbf{H}_1$; d'où $P_1P_2x = 0$ d'après c) de 3.4, c'est-à-dire $P_1P_2 = 0$.

THÉORÈME 4. *Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des projecteurs. Pour que l'opérateur $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ soit projecteur, il faut et il uffit que les projecteurs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ soient deux à deux orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Soit un projecteur P. D'après le théorème 3.2

$$\| Px \|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x) \quad (x \in \mathbf{H}), \tag{17}$$

de façon analogue

$$\| P_kx \|^2 = (P_kx, x) \quad (x \in \mathbf{H}; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc

$$\|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|P_kx\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_kx, x) =$$
$$= (Px, x) = \|Px\|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (x \in \mathbf{H}). \tag{18}$$

Considérons un élément quelconque $y \in \mathbf{H}$ et dans (18) posons $x = P_1y$. Comme $P_1x = P_1^2y = P_1y$, on a

$$\| P_1y \|^2 + \| P_2P_1y \|^2 \leqslant \| P_1y \|^2.$$

D'où il suit que $P_2P_1y = 0$ et $P_2P_1 = 0$ sont des projecteurs, et P_1 et P_2 sont orthogonaux. De façon analogue, on montre que les autres projecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Condition suffisante. Vérifions que l'opérateur $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ remplit les conditions du théorème 3.2 et donc est projecteur. L'opérateur P étant la somme d'opérateurs auto-adjoints, il est lui-même auto-adjoint (6.1, d)). Assurons-nous que $P^2 = P$. Les projecteurs P_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) étant deux à deux orthogonaux,

*) 0 étant un opérateur auto-adjoint, les opérateurs P_1 et P_2 sont permutables en vertu du point f) de 6.1, de sorte que $P_2P_1 = P_1P_2 = 0$ et la définition ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont donnés les projecteurs.

c'est-à-dire

$$P_jP_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ P_k & (j = k) \end{cases} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$P^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_jP_k = \sum_{k=1}^{n} P_k = P,$$

c.q.f.d.

Plaçons-nous dans les conditions du théorème et étudions la structure du sous-espace $\widetilde{\mathbf{H}}$ sur lequel projette le projecteur $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. Désignons par $\mathbf{H}_k$ le sous-espace correspondant au projecteur P_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Soit $x \in \widetilde{\mathbf{H}}$. Alors

$$x = Px = P_1x + P_2x + \ldots + P_nx = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

où $x_k = P_kx \in \mathbf{H}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Inversement, supposons que x est un élément admettant une représentation de la forme

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad (x_k \in \mathbf{H}_k; \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Comme

$$PP_k = \sum_{j=1}^{n} P_jP_k = P_k \text{ et } x_k = P_kx_k = PP_kx_k,$$

il vient

$$Px = \sum_{k=1}^{n} Px_k = \sum_{k=1}^{n} PP_kx_k = \sum_{k=1}^{n} x_k = x,$$

c'est-à-dire $x \in \widetilde{\mathbf{H}}$. Le fait que $P_kx_j = 0$ $(j \neq k)$ entraîne

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} P_kx_j = P_l\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = P_kx \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où en particulier résulte l'unicité de l'écriture de x sous la forme (19).

En résumé on peut donc dire que le sous-espace $\widetilde{\mathbf{H}}$ est composé de tous les éléments x représentables sous la forme (19). $\widetilde{\mathbf{H}}$ est appelé *somme orthogonale* des sous-espaces $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_n$ et noté

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{H}_n = \oplus \sum_{k=1}^{n} \mathbf{H}_k.$$

6.7. Etudions maintenant la différence et le produit de projecteurs.

Montrons préalablement le lemme suivant.

LEMME 1. *Soient P_1 et P_2 des projecteurs sur les sous-espaces $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ respectivement. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*
a) $P_1 \geqslant P_2$; b) $\mathbf{H}_1 \supset \mathbf{H}_2$; c) $P_1P_2 = P_2$; d) $P_2P_1 = P_2$.

DÉMONSTRATION. a) $\Rightarrow$ b). En effet, soit $x \in \mathbf{H}$. Comme $P_1x \perp x - P_1x$, alors

$$\| x \|^2 = \| P_1x \|^2 + \| x - P_1x \|^2. \tag{20}$$

Si $x \in \mathbf{H}_2$, alors $P_2x = x$ et $(P_2x, x) = (x, x) = \| x \|^2$. *A fortiori*

$$\| x \|^2 \geqslant \| P_1x \|^2 = (P_1x, P_1x) = (P_1x, x) \geqslant (P_2x, x) = \| x \|^2.$$

De sorte que (20) implique $x = P_1x$, c'est-à-dire $x \in \mathbf{H}_1$.

b) $\Rightarrow$ c). Soit $x \in \mathbf{H}$. Comme $P_2x \in \mathbf{H}_2$ et par suite $P_2x \in \mathbf{H}_1$, on a $P_1P_2x = P_2x$.

c) $\Rightarrow$ d). Le produit des opérateurs auto-adjoints P_1 et P_2 étant un projecteur, donc un opérateur auto-adjoint, les opérateurs P_1 et P_2 sont permutables: $P_2P_1 = P_1P_2 = P_2$.

d) $\Rightarrow$ a). En effet, pour $x \in \mathbf{H}$

$$(P_2x, x) = \| P_2x \|^2 = \| P_2P_1x \|^2 \leqslant \| P_1x \|^2 = (P_1x, x).$$

THÉORÈME 5. *Soient P_1 et P_2 deux projecteurs. Une condition nécessaire et suffisante pour que $P = P_1 - P_2$ soit projecteur est que $P_1 \geqslant P_2$.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Soit P un projecteur. Comme $P_1 = P + P_2$, en vertu du théorème précédent on a $PP_2 = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $(P_1 - P_2)\, P_2 = P_1P_2 - P_2 = \mathbf{0}$ d'où le point c) du lemme.

Condition suffisante. De toute évidence, P est un opérateur auto-adjoint. Les points c) et d) du lemme donnent

$$P^2 = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P;$$

il reste à appliquer le théorème 3.2.

Désignons par $\widetilde{\mathbf{H}}$ le sous-espace sur lequel projette le projecteur P. On laisse au lecteur le soin de prouver que $\widetilde{\mathbf{H}}$ est composé de tous les éléments $x \in \mathbf{H}_1$ orthogonaux au sous-espace $\mathbf{H}_2$. Le sous-espace $\widetilde{\mathbf{H}}$ est appelé *orthocomplément* de $\mathbf{H}_2$ dans $\mathbf{H}_1$ et noté $\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_1 \ominus \mathbf{H}_2$.

REMARQUE. Si $P_1 = I$, alors la condition du théorème est visiblement satisfaite pour tout P_2. Donc, $P = I - P_2$ est projecteur quel que soit le projecteur P_2. De plus, P projette $\mathbf{H}$ sur l'orthocomplément $\mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_2$ du sous-espace $\mathbf{H}_2$.

Prouvons un théorème relatif au produit de projecteurs

THÉORÈME 6. *Soient P_1 et P_2 des projecteurs. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $P = P_1P_2$ soit projecteur est que P_1 et P_2 soient permutables.*

DÉMONSTRATION. La condition est déjà nécessaire pour que P soit un opérateur auto-adjoint.

On vérifie que la condition est suffisante en se servant de nouveau du théorème 3.2 en tenant compte du fait que P est un opérateur auto-adjoint et

$$P^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le sous-espace sur lequel projette P est ici l'intersection des sous-espaces $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$.

6.8. En appliquant le théorème 1 à une suite $\{P_n\}$ strictement croissante (ou strictement décroissante) de projecteurs, on est conduit au résultat important suivant.

THÉORÈME 7. *Soit $\{P_n\}$ une suite monotone de projecteurs. Pour tout $x \in \mathbf{H}$ existe*

$$Px = \lim_{n\to\infty} P_n x, \tag{21}$$

l'opérateur P étant projecteur sur le sous-espace $\tilde{\mathbf{H}}$, où

$$\tilde{\mathbf{H}} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n},$$

si la suite $\{P_n\}$ est strictement croissante, et

$$\tilde{\mathbf{H}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n,$$

si elle est strictement décroissante. $\mathbf{H}_n$ désignent les sous-espaces correspondant aux projecteurs P_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{P_n\}$ une suite strictement croissante. L'existence de la limite (21) résulte du théorème 1, puisque $\|P_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Montrons que P est un projecteur sur $\tilde{\mathbf{H}}$. Pour cela il suffit de vérifier que si $x \in \tilde{\mathbf{H}}$, alors $Px = x$ et si $x \perp \tilde{\mathbf{H}}$, alors $Px = 0$. Désignons par $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n$ et prenons $x \in \Omega$. Il existe m tel que $x \in \mathbf{H}_n$ $(n \geqslant m)$. Cela veut dire que $P_n x = x$ $(n \geqslant m)$ et alors $Px = \lim_{n\to\infty} P_n x = x$. Eu égard à $\tilde{\mathbf{H}} = \bar{\Omega}$ il vient que $Px = x$ pour $x \in \tilde{\mathbf{H}}$. Supposons maintenant que $x \perp \tilde{\mathbf{H}}$. Alors à plus forte raison $x \perp \mathbf{H}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc $P_n x = 0$ et en passant à la limite on obtient $Px = 0$.

Des raisonnements analogues nous conduisent aux résultats annoncés dans le cas où la suite $\{P_n\}$ est strictement décroissante.

REMARQUE. Le théorème subsiste si l'on remplace la suite $\{P_n\}$ par une famille de projecteurs $\{P_\lambda\}$ dépendant d'un paramètre réel variant continûment.

COROLLAIRE. *Soit $\{P_k\}$ un ensemble de projecteurs deux à deux orthogonaux. Alors la série*

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x \tag{22}$$

est convergente pour tout $x \in \mathrm{H}$ et l'opérateur P est un projecteur.

En effet, il faut appliquer le théorème prouvé à la suite strictement croissante $\{P^{(n)}\}$ $(P^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P_k;\ n = 1, 2, \ldots)$ de projecteurs.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que P projette H sur le sous-espace $\widetilde{\mathrm{H}}$ constitué de tous les éléments $x \in \mathrm{H}$ représentables sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (x_k \in \mathrm{H}_k;\ k = 1, 2, \ldots;\ \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty).$$

Le sous-espace $\widetilde{\mathrm{H}}$ s'appelle *somme orthogonale* (comparer avec 6.6) des sous-espaces H_1, H_2, ..., et se note

$$\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \oplus \ldots = \oplus \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{H}_k.$$

§ 7. Topologie faible et espaces réflexifs

7.1. Au paragraphe 2.2 du chapitre III nous avons établi le théorème de Hahn-Banach pour les espaces localement convexes et en avons déduit de nombreux importants corollaires liés à l'existence d'un nombre suffisant de fonctionnelles linéaires continues. On se propose maintenant d'exhiber des résultats analogues dans une forme plus commode pour le cas normé.

THÉORÈME 1 (Hahn-Banach). *Soient X un espace normé, f_0 une fonctionnelle linéaire continue, définie sur un sous-espace $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}$. Il existe alors une fonctionnelle linéaire continue f, définie sur X tout entier, prolongement de f_0, et de plus $\|f\| = \|f_0\|$.*

DÉMONSTRATION. La fonctionnelle f_0 étant continue sur X_0, on a $|f_0(x)| \leqslant \|f_0\| \, \|x\|$ $(x \in \mathrm{X}_0)$. D'après le théorème II.4.2 il existe un prolongement f de la fonctionnelle f_0 à X, tel que $|f(x)| \leqslant \|f_0\| \, \|x\|$ $(x \in \mathrm{X})$, d'où $\|f\| \leqslant \|f_0\|$. D'autre part $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}$ entraîne $\|f_0\| \leqslant \|f\|$, c.q.f.d.

Du corollaire 2 du théorème III.2.4 il résulte le

THÉORÈME 2. *Pour tout élément x_0 non nul d'un espace normé* X *il existe une fonctionnelle $f \in X$ telle que*

$$\| f \| = 1, \quad f(x_0) = \| x_0 \|.$$

c'est-à-dire l'élément x_0 réalise l'égalité dans $| f(x) | \leqslant \| f \| \, \| x \|$.

COROLLAIRE. *Pour tout $x \in X$ on a*

$$\| x \| = \sup \{ | f(x) | : f \in X^*, \ \| f \| \leqslant 1 \}.$$

Le théorème 2 admet la généralisation suivante:

THÉORÈME 3. *Soient Ω un sous-espace vectoriel d'un espace normé* X, *$x_0 \in X$ un élément se trouvant à une distance $d > 0$ ($\rho(x_0, \Omega) = d$) de Ω.*

Il existe alors une fonctionnelle $f \in X^*$ telle que

$$f(x) = 0 \quad (x \in \Omega), \qquad \| f \| = 1, \qquad f(x_0) = d.$$

DÉMONSTRATION. Désignons par X_0 l'extension simple de Ω, obtenue par adjonction à Ω de l'élément x_0, c'est-à-dire $X_0 = \mathcal{L}(\Omega, x_0)$. Vu que $x \notin \Omega$, la représentation de $x \in X_0$ sous la forme

$$x = \lambda x_0 + x' \quad (x' \in \Omega)$$

est unique. Pour $x \in X_0$ posons

$$f_0(x) = \lambda d.$$

Il est clair que f_0 est une fonctionnelle linéaire. De plus $f_0(x_0) = d$ et $f_0(x) = 0$ pour $x \in \Omega$. D'autre part

$$\|x\| = \|\lambda x_0 + x'\| = |\lambda| \left\| x_0 + \frac{x'}{\lambda} \right\| \geqslant |\lambda| \rho(x_0, \Omega) = |\lambda| d = |f_0(x)|.$$

Donc, la fonctionnelle f_0 est bornée et $\| f_0 \| \leqslant 1$. Pour établir l'inégalité inverse, choisissons $x' \in \Omega$ tel que $\| x_0 - x' \| < d + \varepsilon$. Alors

$$d = f_0(x_0) = f_0(x_0 - x') \leqslant \| f_0 \| \, \| x_0 - x' \| < \| f_0 \| (d + \varepsilon),$$

d'où

$$\|f_0\| < \frac{d}{d+\varepsilon},$$

et $\| f_0 \| = 1$, puisque ε est arbitraire.

En appliquant à f_0 le théorème 1 de prolongement d'une fonctionnelle, nous obtenons la fonctionnelle f avec les propriétés requises.

REMARQUE 1. Le théorème 2 relatif au nombre suffisant de fonctionnelles est un cas particulier du théorème 3. Plus exactement, si $\Omega = \{0\}$, alors $\rho(x_0, \Omega) = \| x_0 \|$.

REMARQUE 2. Dans les théorèmes 2 et 3, il est parfois commode de remplacer f par la fonctionnelle $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{d} f(x).$$

La fonctionnelle $\tilde{f}$ est douée des propriétés suivantes:

$$\tilde{f}(x) = 0 \quad (x \in \Omega), \qquad \|\tilde{f}\| = \frac{1}{d}, \qquad \tilde{f}(x_0) = 1.$$

Voici une application du théorème 3. On dira qu'un système d'éléments $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) d'un espace normé X admet une biorthogonalisation si existe un système de fonctionnelles $\{f_\alpha\}$ ($\alpha \in A$), $f_\alpha \in X^*$, tel que

$$f_{\alpha'}(x_\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha' \neq \alpha, \\ 1, & \alpha' = \alpha. \end{cases}$$

THÉORÈME 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) admette une biorthogonalisation est qu'il soit minimal, c'est-à-dire qu'aucun des éléments x_α n'appartienne à l'enveloppe linéaire fermée de l'ensemble des autres.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Soit $\{x_\alpha\}$ un système admettant une biorthogonalisation. Si pour un α_0 on avait

$$x_{\alpha_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_{\alpha_k} \quad (\alpha_k \neq \alpha_0),$$

alors

$$f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} f_{\alpha_0}(x_{\alpha_k}) = 0,$$

ce qui est absurde puisque $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = 1$.

Condition suffisante. Supposons maintenant que $\{x_\alpha\}$ est un système minimal. Désignons par $X_{\alpha'}$ l'enveloppe linéaire fermée de l'ensemble des éléments $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \neq \alpha'$). Comme $x_{\alpha'} \notin X_{\alpha'}$ et $X_{\alpha'}$ est un espace vectoriel fermé, il existe d'après le théorème 3 (ou plus exactement d'après la remarque qui suit ce théorème) une fonctionnelle $f_{\alpha'}$ nulle sur $X_{\alpha'}$ (c'est-à-dire $f_{\alpha'}(x_\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq \alpha'$), telle que $f_{\alpha'}(x_{\alpha'}) = 1$. La famille des fonctionnelles $\{f_{\alpha'}\}$ vérifie les conditions de la définition, c'est-à-dire le système $\{x_\alpha\}$ admet une biorthogonalisation.

REMARQUE. Tout système fini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'éléments linéairement indépendants est minimal. En effet, $x_j \notin \mathcal{L}(\{x_k\})$ ($k \neq j$) en vertu de l'indépendance linéaire, et l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\{x_k\})$ de dimension finie étant fermé, x_j n'appartient pas non plus à son adhérence.

D'après cette remarque, tout système fini d'éléments linéairement indépendants admet un système de fonctionnelles qui lui est biorthogonal.

En appliquant le théorème 4 à l'espace hilbertien et en tenant compte de la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans cet espace (cf. V.3.2) on arrive au résultat suivant.

Soit $\{x_n\}$ une suite quelconque d'éléments d'un espace hilbertien H. Pour qu'il existe dans H une suite $\{y_n\}$ biorthogonale à la suite donnée, c'est-à-dire telle que

$$(x_m, y_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

il est nécessaire et suffisant que la suite $\{x_n\}$ soit minimale.

Le théorème de prolongement d'une fonctionnelle linéaire dans le cas réel a été prouvé par Hahn. En principe il existe dans Banach [2]. Les corollaires du théorème de prolongement d'une fonctionnelle linéaire figurent dans la monographie de Banach.

7.2. Dans III.3.1, nous avons défini pour tout couple d'espaces vectoriels en dualité la topologie faible correspondante. Nous allons nous intéresser à la situation suivante. Soient X un espace normé, X* son dual. Nous allons considérer la topologie σ (X, X*) sur X, que nous appellerons *topologie faible* de l'espace normé X, et la topologie σ (X*, X) sur X*, que nous appellerons *topologie* (*)-*faible* de l'espace X*. Donc, sur X* on considère deux topologies faibles: la topologie (*)-faible σ (X*, X) et la topologie faible σ (X*, X**) et de plus σ (X*, X) $\leqslant$ σ (X*, X**) (la dernière inégalité est stricte dans le cas non réflexif; cf. plus bas). La convergence pour la topologie faible (resp. (*)-faible) sera appelée convergence faible (resp. (*)-faible), la convergence en norme, convergence forte. Il en sera de même pour la compacité faible, la fermeture faible, etc.

LEMME 1. *Si* ⟨X, Y⟩ *est un couple d'espaces vectoriels en dualité,* Y *contenant un ensemble* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dénombrable total sur* X, *alors la topologie* σ (X, Y) *est métrisable sur des ensembles faiblement compacts.*

DÉMONSTRATION. Soit K un ensemble σ (X, Y)-compact dans X. Définissons une métrique sur K par la formule

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) |f_n(x-y)| \quad (x, y \in K).$$

K étant faiblement compact, il est faiblement borné, d'où $\rho(x, y) < \infty$. Si $\rho(x, y) = 0$, alors $f_n(x-y) = 0$ pour tous les n. Donc la totalité de $\{f_n\}$ sur X entraîne $x = y$. Les autres propriétés de la métrique pour ρ sont évidentes.

Considérons l'application identique i: $(K, \sigma(X, Y)) \to (K, \rho)$, où (K, ρ) est un espace métrique muni de la métrique ρ. L'application i étant évidemment continue, c'est un homéomorphisme en vertu du corollaire 3 du théorème I.2.5, ce qui prouve la métrisabilité de l'espace $(K, \sigma(X, Y))$.

La classe des B-espaces séparables joue un rôle important dans de nombreux problèmes. On se propose d'exhiber quelques résultats concernant cette classe.

COROLLAIRE. *Si* X *est un espace normé séparable, alors la topologie* $\sigma(X, X^*)$ *est métrisable sur des ensembles faiblement compacts.*

DÉMONSTRATION. Vérifions que la condition du lemme 1 est réalisée. Soit $\{x_n\}$ un ensemble dénombrable partout dense dans X. En vertu du théorème 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $f_n \in X^*$, $\|f_n\| = 1$, tel que $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Supposons que $f_n(x) = 0$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $x = 0$. Soit une suite partielle $x_{n_m} \to x$. Alors

$$\|x_{n_m}\| = |f_{n_m}(x_{n_m})| = |f_{n_m}(x_{n_m}) - f_{n_m}(x)| \leqslant \|f_{n_m}\| \, \|x_{n_m} - x\| \to 0,$$

d'où $x_{n_m} \to 0$ et par suite $x = 0$.

THÉORÈME 5. *Si* X^*, *espace dual d'un espace normé* X, *est séparable, alors* X *est séparable.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un ensemble partout dense dans X^*. Par définition de la norme d'une fonctionnelle, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X$ tel que $\|x_n\| \leqslant 1$ et $|f_n(x_n)| \geqslant (1/2)\|f_n\|$. L'ensemble E des combinaisons linéaires des éléments x_n à coefficients rationnels est dénombrable. Montrons que E est dense dans X. Il est évident que $\overline{E}$ est un ensemble linéaire fermé. Si $\overline{E} \neq X$, d'après le théorème 2 il existe $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, tel que $f(x) = 0$, $x \in \overline{E}$. Supposons que $f_{n_k} \to f$ en norme. Alors

$$(1/2)\|f_{n_k}\| \leqslant |f_{n_k}(x_{n_k})| = |(f_{n_k} - f)(x_{n_k})| \leqslant \|f_{n_k} - f\| \to 0,$$

d'où $f_{n_k} \to 0$, $f = 0$, ce qui contredit $\|f\| = 1$.

Soit X un espace normé. Le polaire de la boule unité fermée *) B_X de l'espace X est la boule unité fermée B_{X^*} de l'espace dual. D'après le théorème d'Alaoglu-Bourbaki (théorème III.3.7) la boule B_{X^*} est $\sigma(X^*, X)$-compacte. Notons que B_{X^*} n'est pas toujours $(*)$-faiblement séquentiellement compacte (par exemple si $X = l^\infty$; cf. X.3.4), cependant si X est séparable, alors B_{X^*} est séquentiellement compacte.

*) Ici et dans la suite $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

THÉORÈME 6. *Si* X *est un espace normé séparable, alors la boule unité* B_{X^*} *munie de la topologie* (*)*-faible est métrisable, donc séquentiellement compacte.*

DÉMONSTRATION. Traitons l'espace X comme l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur X^* et considérons le couple en dualité correspondant $\langle X^*, X\rangle$. Tout ensemble dénombrable partout dense dans X est visiblement total sur X^*. Maintenant on peut appliquer le lemme 1.

REMARQUE. Si la boule B_{X^*} est métrisable pour la topologie (*)-faible, alors l'espace X est séparable.

7.3. Soit X un espace normé. L'espace X^* étant à son tour un espace normé, on peut envisager l'espace $X^{**} = (X^*)^*$, dual de X^*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur X^*. On peut de même envisager l'espace X^{***}, etc.

Soit l'injection canonique $\pi_{X^*} : X \to X^{**}$ (cf. III.3.2) que nous désignerons dans la suite tout simplement par π. On rappelle qu'à chaque $x \in X$ l'application π associe la fonctionnelle F_x sur X^*, définie par

$$F_x(f) = \overline{f(x)} \quad (f \in X^*).$$

Il est clair que

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \, \|f\|,$$

d'où $F_x \in X^{**}$. Donc, π applique X dans X^{**}. Le corollaire du théorème 2 nous dit que

$$\|\pi(x)\| = \|F_x\| = \sup\{|F_x(f)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} =$$
$$= \sup\{|f(x)| : f \in X^* : \|f\| \leqslant 1\} = \|x\|,$$

d'où il suit que π est une isométrie linéaire de X sur le sous-espace $\pi(X)$ de X^{**}.

On dit qu'un B-espace X est *réflexif* si $\pi(X) = X^{**}$, c'est-à-dire X est isométrique à X^{**} par l'injection canonique π. L'existence d'une isométrie linéaire entre les espaces X et X^{**} ne suffit pas pour conclure à la réflexivité de l'espace X, car la correspondance réalisant cette isométrie est ici d'une forme spéciale (on trouvera un exemple dans l'article de James [1]).

Il est aisé de voir que tout B-espace de dimension finie est réflexif. On laisse au lecteur le soin de prouver en s'appuyant sur le théorème 3.1 de la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace hilbertien que l'espace hilbertien est réflexif. Nous verrons plus bas que les espaces L^p $(1 < p < \infty)$ sont réflexifs contrairement à L^1, L^∞, $C[0, 1]$, c_0.

THÉORÈME 7. *Pour qu'un B-espace* X *soit réflexif il est nécessaire et suffisant que la boule unité fermée* B_X *soit faiblement compacte.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* La réflexivité de X entraîne la coïncidence de la boule B_X et de la boule unité fermée $B_{X^{**}}$ de l'espace X^{**}, qui est $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacte d'après le théorème d'Alaoglu-Bourbaki.

Condition suffisante. Si nous prouvons que l'ensemble $\pi(B_X)$ est confondu avec $B_{X^{**}}$ nous obtiendrons $\pi(X) = X^{**}$. D'après le théorème du bipolaire, $B_X^{\circ\circ}$ est la $\sigma(X^{**}, X^*)$-adhérence de l'ensemble $\pi(B_X)$. La boule B_X étant faiblement compacte, l'ensemble $\pi(B_X)$ est $\sigma(X^{**}, X^*)$-fermé, d'où $B_X^{\circ\circ} = \pi(B_X)$. D'autre part, par définition du bipolaire on a $B_X^{\circ\circ} = B_{X^{**}}$, d'où la relation cherchée $\pi(B_X) = B_{X^{**}}$.

COROLLAIRE 1. *Tout sous-espace fermé d'un B-espace réflexif* X *est réflexif.*

DÉMONSTRATION. Soient Y un sous-espace fermé de X, B_Y sa boule unité fermée. La boule B_X étant faiblement compacte dans X et $B_Y = B_X \cap Y$, le corollaire 3 du théorème III.3.2 dit que la boule B_Y est faiblement compacte dans Y. En appliquant le théorème 7 on déduit que l'espace Y est réflexif.

COROLLAIRE 2. *Un B-espace* X *est réflexif si et seulement si son dual* X^* *l'est.*

DÉMONSTRATION. Si X est réflexif, les topologies $\sigma(X^*, X)$ et $\sigma(X^*, X^{**})$ sont confondues sur X^*. La boule B_{X^*} étant $(*)$-faiblement compacte d'après le théorème d'Alaoglu-Bourbaki, elle est faiblement compacte en vertu de la propriété mentionnée et l'espace X^* est réflexif en vertu du théorème 7.

Si X^* est réflexif, on a vu que X^{**} est réflexif. $\pi(X)$ étant un sous-espace fermé de X^{**}, le corollaire 1 nous dit que $\pi(X)$, et partant X, est réflexif.

COROLLAIRE 3. *Les topologies faible et* $(*)$*-faible de l'espace* X^* *sont confondues sur la boule unité* B_{X^*} *si et seulement si* X *est réflexif.*

DÉMONSTRATION. Si les topologies faible et $(*)$-faible sont confondues sur B_{X^*}, alors la boule B_{X^*} est faiblement compacte et X^* est réflexif, donc X est réflexif en vertu du corollaire 2. La réciproque est évidente.

REMARQUE. Si des B-espaces X et Y sont isomorphes et X réflexif, alors Y est réflexif.

Nous exhiberons plus bas des exemples de B-espaces réflexifs.

7.4. Nous formulons ici sans les démontrer quelques résultats importants liés à la topologie faible.

Soit X un B-espace. Comment décrire l'ensemble $\pi(X)$? Bien sûr il est composé de toutes les fonctionnelles $F \in X^{**}$ qui sont $\sigma(X^*, X)$-continues. Cependant la vérification de la continuité

(*)-faible sur des suites généralisées illimitées de fonctionnelles est assez compliquée. De ce fait il est intéressant de noter le

THÉORÈME 8 (A. Grothendieck). *Si* X *est un B-espace, une fonctionnelle* $F \in \pi(X)$ *si et seulement si*

$$f_\alpha \underset{A}{\longrightarrow} 0 \ (\sigma(X^*, X)) \ \textit{et} \ \| f_\alpha \| \leqslant 1 \ (\alpha \in A) \qquad (*)$$

impliquent $F(f_\alpha) \to 0$.

Si X est un B-espace séparable, dans la condition (*) on peut remplacer les suites généralisées par des suites ordinaires.

La difficulté de la manipulation des suites généralisées illimitées de fonctionnelles explique l'importance du théorème suivant.

THÉORÈME 9 (Krein-Smulian). *Soit* X *un B-espace. Un ensemble convexe* E *est* (*)*-faiblement fermé dans* X^* *si l'ensemble* $\{x \in E : \| x \| \leqslant n\}$ *est* (*)*-faiblement fermé pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Dans les théorèmes 8 et 9, la condition de complétude de X est une condition nécessaire pour qu'ils soient vrais. Voir les démonstrations dans Schaefer [I] (chap. IV, § 6).

§ 8. Prolongement des opérateurs linéaires

8.1. Le théorème de Hahn-Banach affirme que toute fonctionnelle linéaire continue, définie sur un sous-espace d'un espace normé X admet un prolongement linéaire continu à X tout entier. Ceci n'est plus vrai pour les opérateurs. Dans ce paragraphe nous allons voir quels résultats positifs on peut obtenir dans ce sens.

Convenons des notations suivantes. Soient U_0 et U deux opérateurs appliquant respectivement les ensembles Ω_0 et Ω de X dans Y. Si $\Omega_0 \subset \Omega$ et pour $x \in \Omega_0$ on a $U(x) = U_0(x)$, on dit que U est le *prolongement* (ou l'*extension*) de l'opérateur U_0, et on note $U_0 \subset U$.

THÉORÈME 1 *). *Soient* X *et* Y *des espaces normés,* U_0 *un opérateur de* $\Omega \subset X$ *dans* Y. *Pour que* U_0 *admette un prolongement linéaire continu* U *à l'ensemble* $\mathcal{L}(\Omega)$, *il est nécessaire et suffisant qu'existe une constante* C *telle que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k) \right\| \leqslant C \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|, \qquad (1)$$

quelles que soient les collections $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de* Ω *et de nombres* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

*) Cf. Riesz [2].

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Si le prolongement U existe, alors l'appartenance de l'élément $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ à $\mathcal{L}(\Omega)$ entraîne

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k).$$

L'opérateur U étant linéaire et borné, il vient

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k) \right\| = \|U(x)\| \leqslant \|U\| \|x\| = \|U\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|,$$

c'est-à-dire (1) est réalisée pour $C = \| U \|$.

Condition suffisante. De (1) il résulte immédiatement que si une combinaison linéaire des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est égale à l'élément nul

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0,$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_0(x_k) = 0.$$

Soit un élément quelconque $x \in \mathcal{L}(\Omega)$:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad (x_k \in \Omega; \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Posons

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k). \tag{3}$$

Montrons que malgré l'éventuelle multivalence de la représentation (2), la valeur de l'opérateur (3) est définie de façon unique par l'élément x. En effet, si

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k \text{ *)},$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda'_k) x_k = 0.$$

*) En admettant que les éléments x_k sont identiques dans les deux sommes, nous ne restreignons pas la généralité, puisque dans chaque somme on peut ajouter les termes avec les x_k affectés de coefficients nuls.

Donc, comme on a noté plus haut

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda'_k) U_0(x_k) = 0.$$

Et par suite

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k U_0(x_k).$$

On vérifie sans peine que l'opérateur U est linéaire. En effet, si

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad \text{et} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k,$$

alors

$$x + y = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) x_k$$

et

$$U(x+y) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \mu_k) U_0(x_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_0(x_k) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k U_0(x_k) = U(x) + U(y).$$

De (1) il suit que l'opérateur U est borné, puisque

$$\| U(x) \| \leqslant C \| x \| \quad (x \in \mathscr{L}(\Omega)).$$

Il est évident que U est le prolongement de U_0, c.q.f.d.

8.2. Le théorème suivant permet de prolonger un opérateur linéaire continu d'un ensemble donné à son adhérence.

THÉORÈME 2 (de prolongement en continuité). *Soient* **X** *et* **Y** *des espaces normés,* **Y** *étant complet. Tout opérateur linéaire continu* U_0 *de* $\Omega \subset$ **X** *dans* **Y** *admet un prolongement linéaire continu unique* U *à l'adhérence* $\overline{\Omega}$ *de l'ensemble* Ω, *et de plus* $\| U \| = \| U_0 \|$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \overline{\Omega}$. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ d'éléments de Ω, qui converge vers x. Considérons la suite $\{U_0(x_n)\}$ dans l'espace **Y**. Celle-ci est de Cauchy, puisque $\| U_0(x_n) - U_0(x_m) \| \leqslant \| U_0 \| \, \| x_n - x_m \|$ et par suite, en vertu de la complétude de l'espace **Y**, il existe $\lim\limits_{n\to\infty} U_0(x_n)$. Montrons que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$. En effet, si $x'_n \in \Omega$ et $x'_n \to x$, alors

$$\| U_0(x'_n) - U_0(x_n) \| \leqslant \| U_0 \| \, \| x'_n - x_n \| \to 0.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} U_0(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} U_0(x_n)$.

Posons maintenant

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_0(x_n).$$

Que l'opérateur U soit linéaire est évident. Le passage à la limite dans l'inégalité $\| U_0(x_n) \| \leqslant \| U_0 \| \, \| x_n \|$ donne $\| U(x) \| \leqslant \leqslant \| U_0 \| \, \| x \|$, c'est-à-dire l'opérateur U est borné et $\| U \| \leqslant \leqslant \| U_0 \|$. Comme d'autre part

$$\| U \| = \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ x \in \overline{\Omega}}} \| U(x) \| \geqslant \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ x \in \Omega}} \| U_0(x) \| = \| U_0 \|,$$

il vient $\| U \| = \| U_0 \|$.

Enfin, si $V \supset U_0$ est un opérateur linéaire continu de $\overline{\Omega}$ dans Y, par passage à la limite dans la relation $U_0(x_n) = V(x_n)$ ($x_n \in \Omega$, $x_n \to x$) on obtient $U(x) = V(x)$ en vertu de la continuité de l'opérateur V, c'est-à-dire les opérateurs U et V sont confondus, c.q.f.d.

COROLLAIRE. *Si un opérateur linéaire continu U d'un espace normé* X *dans un B-espace* Y *s'annule sur un ensemble dense dans* X, *alors* $U(x) = 0$ *pour tout* $x \in$ X.

8.3. Si un opérateur linéaire U_0 est défini sur un ensemble Ω dense dans un espace X, le théorème 2 dit qu'on peut le prolonger à X tout entier en respectant sa linéarité et sa norme. Cependant, si l'on néglige la condition de densité de Ω dans X, ce prolongement est en général impossible.

L'existence d'un prolongement de l'opérateur U_0 admettant la même norme que U_0 dépend des propriétés de l'espace des images Y.

Les définitions suivantes nous seront utiles pour la suite: on dira qu'un système d'ensembles $\mathfrak{A} = \{A\}$ est *enchaîné* si l'intersection de chaque couple d'ensembles de ce système n'est pas vide.

On dira qu'un espace normé Y est un *espace de type* $\mathfrak{M}$ si l'intersection de chaque famille enchaînée de boules fermées n'est pas vide.

Un exemple simple d'espace de type $\mathfrak{M}$ est la droite numérique (réelle). En effet, dans cet espace une boule fermée est un intervalle fermé. Pour cette raison considérons l'ensemble enchaîné $\{[a_\xi, b_\xi]\}$ ($\xi \in \Xi$) d'intervalles fermés et vérifions que cet ensemble admet une intersection non vide. Figeons un $\xi_0 \in \Xi$. Comme les intervalles $[a_\xi, b_\xi]$ et $[a_{\xi_0}, b_{\xi_0}]$ possèdent des points communs quel que soit $\xi \in \Xi$, il vient

$$a_{\xi_0} \leqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Donc

$$a_{\xi_0} \leqslant \inf_{\xi \in \Xi} b_\xi.$$

Or $\xi_0 \in \Xi$ est arbitraire, donc

$$\overline{a} = \sup_{\xi \in \Xi} a_\xi \leqslant \inf_{\xi \in \Xi} b_\xi = \overline{b}.$$

Ainsi tout point de l'intervalle $[\overline{a}, \overline{b}]$ appartient à chacun des intervalles $[a_\xi, b_\xi]$, ce qui prouve notre assertion.

Le lecteur est invité par des raisonnements analogues à prouver que les espaces réels $l^\infty(T)$ et $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, la mesure μ étant σ-finie, sont aussi des espaces de type $\mathfrak{M}$.

On notera que le plan complexe traité comme un espace (complexe) normé n'est pas espace de type $\mathfrak{M}$, car on peut facilement y indiquer un système de trois cercles sur le plan deux à deux sécants et dont l'intersection commune est vide.

Dans la suite de ce paragraphe tous les espaces sont supposés réels.

La classe des espaces de type $\mathfrak{M}$ est relativement étroite. Le lecteur peut s'assurer qu'à l'exception des espaces $l^\infty(T)$ et $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, aucun des espaces normés envisagés plus haut n'est espace de type $\mathfrak{M}$.

Signalons enfin que tout espace Y de type $\mathfrak{M}$ est complet.

En effet soit $\{y_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments Y. Posons

$$r_n = \sup_{m \geqslant n} \| y_m - y_n \|$$

et considérons la famille de boules fermées $\{B_{r_n}(y_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. C'est une famille enchaînée puisque pour $m > n$ on a

$$\| y_m - y_n \| \leqslant r_n$$

et par suite $y_m \in B_{r_n}(y_n) \cap B_{r_m}(y_m)$. Si Y est un espace de type $\mathfrak{M}$, il existe un élément $y \in Y$ appartenant à chaque boule $B_{r_n}(y_n)$, c'est-à-dire

$$\| y - y_n \| \leqslant r_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

et puisque $r_n \to 0$ il vient $y_n \to y$. Ce qui prouve que Y est complet.

Les théorèmes 3 et 4 fondamentaux suivants ont été démontrés par Nachbin [1]. Dans ce travail, les espaces de type $\mathfrak{M}$ sont caractérisés en termes de théorie des espaces ordonnés. Cette caractéristique est précisée dans Kelley [1]. Pour le prolongement des opérateurs linéaires on pourra consulter également Akilov [1], [2], Kakutani [1] et la monographie de Kantorovitch, Voulikh et Pinsker.

THÉORÈME 3. *Soient* X *un espace normé*, X_0 *un sous-espace vectoriel de* X*), U_0 *un opérateur linéaire continu de* X_0 *dans un espace* Y *de type* $\mathfrak{M}$. *Il existe alors un prolongement linéaire continu* U *de l'opérateur* U_0 *de* X *dans* Y, *et de plus* $\| U \| = \| U_0 \|$.

DÉMONSTRATION. Soit X_0 un sous-espace vectoriel de l'espace X. Appelons extension simple de X_0, l'espace vectoriel X_1 composé de tous les éléments de la forme

$$x' = \lambda x_1 + x \quad (x \in X_0), \tag{4}$$

où x_1 est un élément donné de X.

Prouvons que si les conditions du théorème sont réalisées, tout opérateur linéaire continu U_0 de $X_0 \subset X$ dans Y admet un prolongement linéaire U_1 respectant la norme, à toute extension simple X_1 de X_0 **).

Il est évident que si l'opérateur U_1 existe, il est complètement défini par l'élément $y_0 = U_1(x_1)$. La norme de l'opérateur prolongé devant rester invariante, pour cet élément on doit avoir

$$\| y_0 - U_0(x) \| = \| U_1(x_1) - U_1(x) \| \leqslant \| U_1 \| \, \| x_1 - x \| = \\ = \| U_0 \| \, \| x_1 - x \|.$$

---

*) S'agissant du théorème 2 et de la complétude de Y, on peut admettre que X_0 est fermé.

**) Il est question d'une extension propre, c'est-à-dire $x_1 \notin X_0$. Il est immédiat de voir alors que la représentation (4) est unique.

Donc, une condition nécessaire d'existence de l'opérateur U_1 est l'existence d'un point commun à toutes les boules fermées $B^{(x)} = B_r(y)$, centrées en $y = U_0(x)$ et de rayons $r = r_x = \| U_0 \| \, \| x_1 - x \|$.

Prouvons que cette condition est également suffisante. En effet, désignons par $\mathfrak{R}$ l'ensemble de toutes les boules du type envisagé et supposons qu'elles possèdent un point y_0 commun. Posons

$$U_1(x_1) = y_0.$$

En vertu de (4), pour $x' \in X_1$, on a

$$U_1(x') = \lambda U_1(x_1) + U_1(x) = \lambda y_0 + U_0(x).$$

La représentation (4) étant unique, il résulte que l'opérateur U_1 est linéaire, et comme (pour $\lambda \neq 0$)

$$\| U_1(x') \| = |\lambda| \left\| y_0 + U_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\| \leqslant r_{-x/\lambda} |\lambda| = |\lambda| \, \| U_0 \| \left\| x_1 + \frac{x}{\lambda} \right\| =$$
$$= \| U_0 \| \, \| x' \|,$$

il est continu, et de plus $\| U_1 \| \leqslant \| U_0 \|$. L'inégalité inverse est évidente, donc en définitive $\| U_1 \| = \| U_0 \|$.

Ainsi il faut démontrer seulement que l'intersection des boules $B^{(x)}$ de la famille $\mathfrak{R}$ n'est pas vide. Pour cela il suffit de vérifier, eu égard aux conditions du théorème, que $\mathfrak{R}$ est une famille enchaînée.

Soient deux boules quelconques $B(x_1')$ et $B(x_2')$ de $\mathfrak{R}$. On a

$$r_1 + r_2 = r_{x_1'} + r_{x_2'} = \| U_0 \| \, [\| x_1 - x_1' \| + \| x_1 - x_2' \|] \geqslant$$
$$\geqslant \| U_0 \| \, \| (x_1 - x_1') - (x_1 - x_2') \| \geqslant \| U_0 (x_1' - x_2') \| = \| y_1' - y_2' \|,$$

c'est-à-dire la somme des rayons est $\geqslant$ à la distance des centres des boules, donc les boules $B(x_1')$ et $B(x_2')$ se coupent *), ce qui veut dire que la famille $\mathfrak{R}$ est enchaînée, puisque ces boules sont arbitraires.

Nous avons prouvé ainsi la possibilité d'une extension simple. Pour achever la démonstration nous allons nous servir du lemme de Zorn (I.1.2). Désignons par A l'ensemble de tous les opérateurs linéaires, prolongements (avec conservation de la norme) de l'opérateur U_0. Ordonnons A de la manière suivante : pour V', $V'' \in$ A on admettra que $V' \leqslant V''$ si $V' \subset V''$. Vérifions que les hypothèses du lemme de Zorn sont réalisées. Soit A_0 une partie totalement ordonnée de l'ensemble A. Posons

$$\widetilde{X} = \bigcup_{V \in A_0} \Omega_V.$$

$\widetilde{X}$ est un espace vectoriel, puisque l'un des deux ensembles formant cette réunion est forcément compris dans l'autre. Soit un élément quelconque $x \in \widetilde{X}$. Il existe $V' \in A_0$ tel que $x \in \Omega_{V'}$. Définissons

$$\widetilde{V}(x) = V'(x).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de l'opérateur V' puisque si $x \in \Omega_{V''}$, alors $V'(x) = V''(x)$, car ou bien $V' \leqslant V''$, ou bien $V'' \leqslant V'$. De même, on établit facilement que $\widetilde{V}$ est un opérateur linéaire et que $\| \widetilde{V} \| = \| U_0 \|$. Par ailleurs, il est évident que $\widetilde{V}$ est prolongement de tout opérateur $V \in A_0$ et par

*) Si $B_{r_1}(y_1)$ et $B_{r_2}(y_2)$ sont deux boules fermées de Y et $r_1 + r_2 \geqslant \geqslant \| y_1 - y_2 \|$, leur intersection n'est pas vide ; par exemple l'élément $\frac{r_2}{r_1 + r_2} y_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} y_2 \in B_{r_1}(y_1) \cap B_{r_2}(y_2)$.

suite de l'opérateur U_0. Donc, $\widetilde{V} \in A$ et $V \leqslant \widetilde{V}$ $(V \in A_0)$. En appliquant le lemme de Zorn, on trouve l'opérateur U, élément maximal de A. L'opérateur U est l'opérateur cherché, puisque si $\Omega_U \neq X$, on aurait trouvé une extension simple de Ω_U plus large que Ω_U et d'après ce qu'on a démontré on aurait pu y prolonger l'opérateur U en préservant la norme. En notant U_1 le prolongement obtenu on aurait eu $U_1 \in A$ et $U \leqslant U_1$, ce qui est absurde puisque $U \neq U_1$. C.q.f.d.

8.4. La condition de prolongement d'un opérateur linéaire énoncée dans le théorème 3 est nécessaire. Avant de le prouver donnons la définition suivante.

On dit qu'un B-espace Y est un *P_1-espace* si tout opérateur linéaire continu U_0 d'un sous-espace arbitraire X_0 d'un B-espace X dans Y admet un prolongement linéaire U préservant la norme, à X tout entier.

THÉORÈME 4. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un B-espace* Y.

1) Y *est un P_1-espace.*

2) *Si* Y *est sous-espace d'un B-espace* X, *il existe un projecteur linéaire continu de* X *sur* Y *de norme* 1.

3) Y *est un espace de type* $\mathfrak{M}$.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Soit Y un sous-espace d'un B-espace X. Alors l'opérateur identique U_0: Y $\to$ Y admet le prolongement U: X $\to$ Y, $\| U \| = \| U_0 \| = 1$. Il est évident que U est le projecteur cherché.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit T une boule B_{Y^*} de l'espace dual. On a vu dans 7.3 qu'il existe une isométrie linéaire de Y sur un sous-espace du B-espace $l^\infty(T)$. Par hypothèse il existe un projecteur de norme 1 de $l^\infty(T)$ sur Y. On a déjà indiqué que $l^\infty(T)$ est un espace de type $\mathfrak{M}$. Il est évident que le type $\mathfrak{M}$ est préservé par une projection de norme 1, et par suite Y est un espace de type $\mathfrak{M}$.

3) $\Rightarrow$ 1) a été prouvé dans le théorème 3.

On peut montrer (cf. Kelley [1], Nachbin [1]) qu'un B-espace Y est un P_1-espace si et seulement s'il est linéairement isométrique à un B-espace C (Q), où Q est un compact extrémalement non connexe (la définition de ces compacts est donnée à la page 371).

On peut aborder le problème du prolongement d'un opérateur linéaire sous un autre angle. Soient X un espace normé donné, X_0 un sous-espace de X, Y un B-espace quelconque et U_0 un opérateur linéaire continu de X_0 dans Y. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe un opérateur linéaire $U \supset U_0$, $\| U \| = \| U_0 \|$, de X dans Y est que X soit un espace unitaire. Ce résultat a été établi par Kakutani [1].

CHAPITRE VI

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE DES FONCTIONNELLES

La connaissance de la forme générale des fonctionnelles linéaires dans des espaces concrets est importante pour les applications de la théorie générale. Par forme générale des fonctionnelles linéaires d'une classe donnée (le plus souvent on considère la classe des fonctionnelles continues de l'espace donné) on comprend une expression analytique renfermant des paramètres de diverse nature (des nombres, des fonctions, etc.), qui, pour des valeurs fixes de ces paramètres, donne toutes les autres fonctionnelles de la classe considérée.

Dans ce chapitre on indique la forme générale des fonctionnelles linéaires dans de nombreux espaces considérés précédemment.

§ 1. Représentation intégrale des fonctionnelles sur des espaces de fonctions mesurables

1.1. Au § 3 du chapitre IV, nous avons exposé la théorie des espaces généraux de fonctions mesurables avant d'entamer l'étude d'espaces concrets. Dans ce chapitre nous procéderons de même pour étudier la forme générale des fonctionnelles sur ces espaces.

Soit X un e.i. sur (T, Σ, μ), où la mesure μ est σ-finie. On dit qu'une fonctionnelle linéaire f sur X est (o)-*continue* si de x_n, $x \in X$, $x_n(t) \to 0$ p.p. et $|x_n(t)| \leqslant x(t)$ p.p. il résulte que $f(x_n) \to 0$ *). L'ensemble de toutes les fonctionnelles (o)-continues sur X que nous noterons $X_n^{\sim}$ est un espace vectoriel.

Désignons par X′ l'ensemble de tous les $x' \in S(T, \Sigma, \mu)$ tels que

$$\operatorname{supp} x' \subset \operatorname{supp} X \pmod{\mu}, \quad \int |xx'|\, d\mu < \infty, \quad \forall x \in X.$$

On voit immédiatement que X′ est un e.i. (il n'est pas exclu que $X' = \{0\}$). L'e.i. X′ est dit *dual* de X. Pour chaque $x' \in X'$ on peut construire une fonctionnelle linéaire $f_{x'}$ sur X par la formule

$$f_{x'}(x) = \int_T x(t)\,\overline{x'(t)}\, d\mu \quad (x \in X). \tag{1}$$

*) Il est aisé de voir que cette définition reste valable lorsqu'on remplace la convergence presque partout par la convergence en mesure.

D'après le théorème de Lebesgue, il est évident que $f_{x'} \in X_n^{\sim}$. Nous allons montrer que les fonctionnelles intégrales de la forme (1) sont les seules de l'espace $X_n^{\sim}$.

THÉORÈME 1. *La formule* (1) *donne l'expression générale des fonctionnelles* (o)*-continues sur un e.i.* X. *L'application* $x' \in X' \to f_{x'} \in X_n^{\sim}$ *est un isomorphisme linéaire*; *de plus* $x' \geqslant 0$ *si et seulement si*

$$f_{x'}(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in X_+.$$

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que X est réel et $L^\infty(T, \Sigma, \mu) \subset X$. Montrons que toute fonctionnelle $f \in X_n^{\sim}$ admet la représentation (1). Posons

$$\varphi(A) = f(\chi_A) \quad \forall A \in \Sigma.$$

Si $\mu(A_n) \to 0$, alors $\varphi(A_n) = f(\chi_{A_n}) \to 0$, d'où φ est une fonction d'ensemble, additive sur Σ, absolument continue par rapport à μ. Le théorème de Radon-Nikodym (cf. théorème I.6.10) affirme l'existence d'une fonction $x' \in L^1(T, \Sigma, \mu)$ pour laquelle

$$f(\chi_A) = \varphi(A) = \int_A x' \, d\mu. \tag{2}$$

Montrons que pour tout $x \in X$ on a

$$f(x) = \int_T x x' \, d\mu. \tag{3}$$

Soient

$$B_+ = \{t \in T : x'(t) \geqslant 0\}, \; B_- = \{t \in T : x'(t) < 0\}.$$

Posons

$$f_+(x) = f(x\chi_{B_+}), \quad f_-(x) = f(x\chi_{B_-}) \quad (x \in X).$$

Comme

$$f_+(\chi_A) = \int_A x'_+ \, d\mu, \quad f_-(\chi_A) = \int_A x'_- \, d\mu$$

et

$$f_+, f_- \in X_n^{\sim}, \quad f = f_+ - f_-,$$

alors dans la démonstration de (3) on peut admettre que $x' \geqslant 0$ et que (2) est vérifiée.

Soit $x \in X_+$. Il existe alors une suite $\{x_n\}$ de fonctions à valeur finie, telle que $0 \leqslant x_n \uparrow x$.

L'appartenance $f \in X_n^{\sim}$ et le théorème de B. Levi donnent alors (3). Déduisons (3) à partir de la relation $x = x_+ - x_-$ pour une fonction quelconque $x \in X$. De (3) il résulte que $x' \in X'$.

Renonçons maintenant à l'hypothèse $L^\infty \subset X$. Remarquons tout d'abord qu'en vertu du corollaire 2 du lemme IV.3.1 la fonction x' vérifiant (3) est unique (à l'équivalence près).

D'après le corollaire 1 du lemme IV.3.1 il existe une suite croissante $\{A_n\} \subset \Sigma$ telle que $\chi_{A_n} \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \operatorname{supp} X$. Considérons l'e.i. $X_n = \{x \in X : \operatorname{supp} x \subset A_n\}$ et les fonctionnelles $f_n(x) = f(x)$ $(x \in X_n)$ sur X_n. Alors, d'après ce qui a été démontré, il existe $x'_n \in X'_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tels que

$$f_n(x) = \int_T x x'_n \, d\mu \quad (x \in X_n). \tag{4}$$

Si l'on considère les fonctionnelles f_n et f_{n+1} sur X_{n+1}, alors en vertu de l'unicité de la fonction représentative (3), on obtient $x'_n(t) = x'_{n+1}(t)$ pour presque tous les $t \in A_n$. On peut donc poser

$$x'(t) = \begin{cases} x'_n(t), & t \in A_n, \\ 0, & t \notin \operatorname{supp} X. \end{cases}$$

Prouvons la relation (3) dans cette situation. Comme plus haut, on peut admettre que $x' \geqslant 0$ et que les égalités (4) sont réalisées. Si $x_n = x\chi_{A_n}$ $(x \in X_+)$, alors $f(x_n) \to f(x)$. Or, d'après le théorème de B. Levi,

$$\int_T x x'_n \, d\mu = \int_T x_n x' \, d\mu \to \int_T x x' \, d\mu,$$

d'où l'on déduit (3) pour $x \in X_+$ et par suite pour tous les $x \in X$.

Si X est un espace complexe, $f \in X_n^\sim$, on pose $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$. Alors $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des fonctionnelles linéaires sur l'e.i. réel $X_{\mathbb{R}}$, et de plus $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f \in (X_{\mathbb{R}})_n^\sim$. D'après ce qu'on a démontré, il existe $x'_1, x'_2 \in (X_{\mathbb{R}})'$, tels que

$$\operatorname{Re} f(x) = \int x x'_1 \, d\mu, \quad \operatorname{Im} f(x) = \int x x'_2 \, d\mu \quad (x \in X_{\mathbb{R}}).$$

Posons $x' = x'_1 - i x'_2$. Alors, pour tout $x \in X$, on a

$$f(x) = f(\operatorname{Re} x) + i f(\operatorname{Im} x) = \int (\operatorname{Re} x) x'_1 \, d\mu + i \int (\operatorname{Re} x) x'_2 \, d\mu +$$
$$+ i \int (\operatorname{Im} x) x'_1 \, d\mu - \int (\operatorname{Im} x) x'_2 \, d\mu = \int x \bar{x}' \, d\mu,$$

d'où il vient que $x' \in X'$.

La relation $f_{x'}(x) \geqslant 0$, $\forall x \in X_+$, est équivalente à $x' \geqslant 0$; c'est évident du corollaire 2 du lemme IV.3.1. Ceci achève la démonstration du théorème.

Le théorème 1 figure déjà dans la monographie de Kantorovitch, Voulikh et Pinsker, mais sous sa forme explicite il n'a été publié que vers le milieu des années 60 par plusieurs auteurs à la fois.

1.2. Il serait très intéressant d'obtenir une représentation intégrale des fonctionnelles linéaires continues sur un e.i. de Banach X. Nous allons voir quand cela est possible.

Soit X un e.i.n. sur (T, Σ, μ). Posons

$$X^{\times} = \{x' \in X' : f_{x'} \in X^*\}.$$

Pour tout $x' \in X^{\times}$

$$\|x'\| = \|f_{x'}\|_{X^*} = \sup\left\{\left|\int_T x\bar{x}'\,d\mu\right| : x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\right\}.$$

THÉORÈME 2. $X^{\times}$ *est un e.i. de Banach avec les conditions* (B) *et* (C).

DÉMONSTRATION. Pour vérifier que la norme est monotone il suffit de s'assurer que

$$\|x'\| = \sup\left\{\int_T x\,|x'|\,d\mu : x \in X_+,\ \|x\| \leqslant 1\right\}. \tag{5}$$

L'égalité (5) découle du fait que si

$$\|x'\| \leqslant \left|\int_T xx'\,d\mu\right| + \varepsilon,\ \|x\| \leqslant 1,$$

alors $x_1(t) = \operatorname{sign} x(t) \cdot x(t)$ satisfait à

$$x_1 \in X, \quad \|x_1\| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left|\int_T xx'\,d\mu\right| \leqslant \int_T |xx'|\,d\mu = \int_T x_1\,|x'|\,d\mu.$$

Pour vérifier (B) et (C), il suffit en vertu du lemme IV.3.5 de s'assurer que $x'_n \in X^{\times}$, $x' \in S$, $\|x'_n\| \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $x'_n \to x$ (μ) entraîne $x' \in X^{\times}$ et $\|x'\| \leqslant 1$. En effet, d'après le lemme de Fatou, pour tout $x \in X_+$, on a

$$|f_{x'}(x)| \leqslant \int_T x\,|x'|\,d\mu \leqslant \sup_n \int_T x\,|x'_n|\,d\mu \leqslant \|x\| \sup_n \|x'_n\| \leqslant \|x\|.$$

D'où $f_{x'} \in X^*$, $x' \in X^{\times}$ et $\|x'\| \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 3. *Si* X *est un e.i. de Banach, alors* $X_n^{\sim} \subset X^*$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in X_n^{\sim}$. Si l'on admet que $f \notin X^*$, il existe une suite $x_n \to 0$ en norme pour laquelle $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. En vertu du lemme IV.3.2 et puisque $f \in X_n^{\sim}$, une certaine suite $f(x_{n_k}) \to 0$, ce qui est absurde.

Donc, si X est un e.i. de Banach, alors $X^{\times} = X'$ (dans ce cas on se servira de la notation X').

THÉORÈME 4. *Si* X *est un e.i.n., alors* $X_n^{\sim} \supset X^*$ *si et seulement si la condition* (A) *est réalisée dans* X.

DÉMONSTRATION. Supposons que $X_n^{\sim} \supset X^*$. Pour tout $x \in X$ on a

$$\| x \| = \sup \{ | f_{x'} (| x |) | : x' \in X^{\times}, \quad \| x' \| \leqslant 1 \}. \tag{6}$$

L'égalité (6) s'établit comme l'égalité (5).

Supposons que la condition (A) n'est pas satisfaite dans X. Il existe alors une suite $0 \leqslant x_n \downarrow 0$ dans X telle que $\| x_n \| \geqslant \varepsilon > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. En vertu de (6) il existe une suite $\{x_n'\} \subset X_+'$, $\| x_n' \| \leqslant 1$, telle que $\int x_n x_n' \, d\mu \geqslant \varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$. Comme une boule de l'espace X^* est $(*)$-faiblement compacte, la suite $\{f_{x_n'}\}$ admet un point limite $(*)$-faible $f = f_{x'} \in X^{\times}$, $\| x' \| \leqslant 1$. Si $x \geqslant 0$, alors $f_{x'}(x) = \lim f_{x_{n_k}'}(x) \geqslant 0$ *), d'où $x' \geqslant 0$.

Comme $x_n \downarrow 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_T x_k x' \, d\mu < \varepsilon/4.$$

Le point f étant point limite, il existe $m \geqslant k$ tel que

$$\left| \int_T x_k x_m' \, d\mu - \int_T x_k x' \, d\mu \right| < \varepsilon/4.$$

Vu que $x_m \leqslant x_k$, on obtient

$$\int_T x_m x_m' \, d\mu \leqslant \int_T x_k x_m' \, d\mu < \varepsilon/2,$$

ce qui est contradictoire.

Inversement, supposons que (A) est satisfaite dans X. Prenons $f \in X^*$ et $x_n \to 0$ p.p. ; $| x_n | \leqslant x \in X$. D'après la condition (A), $x_n \to 0$ en norme, d'où $f(x_n) \to 0$, donc $X^* \subset X_n^{\sim}$. Les théorèmes 3 et 4 entraînent le

COROLLAIRE 1. *Si* X *est un e.i. de Banach, alors* $X_n^{\sim} = X^*$ *si et seulement si la condition* (A) *est satisfaite dans* X.

Le corollaire 1 et le théorème 1 entraînent le

COROLLAIRE 2. *Si* X *est un e.i. de Banach, alors* (1) *est l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues sur* X *si et seulement si la condition* (A) *est vérifiée dans* X.

---

*) Pour chaque x on choisit en général une suite partielle bien déterminée.

Le corollaire 2 montre que toute fonctionnelle linéaire continue sur un e.i. de Banach X admet une représentation intégrale si et seulement si la condition (A) est réalisée dans X. Nous reportons au paragraphe suivant l'application de ces résultats à des espaces concrets. Pour l'instant nous allons étudier le cas où la condition (A) n'est pas réalisée.

1.3. THÉORÈME 5. *Si* X *est un e.i.n., alors* supp $X' =$ supp $X^\times =$ $=$ supp X, *et l'ensemble* $X^* \cap X_n^\sim$ *sépare les points de* X.

DÉMONSTRATION. Supposons que supp $X^\times \neq$ supp X. Il existe alors $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, $\chi_A \in X$, tel que $x'\chi_A = 0$ pour tout $x' \in X^\times$, ou ce qui revient au même $f(\chi_A) = 0$ pour tout $f \in X^* \cap X_n^\sim$. D'après le corollaire du théorème IV.3.1 la boule unité B_X est bornée dans l'e.v.t. $S(T, \Sigma, \mu)$, et l'ensemble E, égal à l'adhérence de $B_X \cap L^2(T, \Sigma, \mu)$ dans L^2, est alors borné dans $S(T, \Sigma, \mu)$. L'ensemble E étant borné, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $\lambda\chi_A \notin E$. D'après le théorème III.2.6 il existe une fonctionnelle linéaire continue f_0 sur L^2, telle que

$$\sup\{|f_0(x)| : x \in E\} \leqslant 1 < f_0(\lambda\chi_A). \tag{7}$$

D'après le théorème V.3.1, il existe une fonction $z_0 \in L^2$ telle que

$$f_0(x) = \int_T xz_0\, d\mu \quad (x \in L^2).$$

Comme supp X = supp $(X \cap L^2)$, pour tout $x \in B_X$ il existe une suite $\{x_n\} \subset B_X \cap L^2$, $x_n \to x$ p.p. Le théorème de Fatou et (7) donnent

$$\int |xz_0|\, d\mu \leqslant \sup_n \int |x_n z_0|\, d\mu \leqslant 1.$$

Donc, la fonctionnelle

$$f(x) = \int xz_0\, d\mu \quad (x \in X)$$

est définie sur X tout entier et $f \in X^* \cap X_n^\sim$. D'après (7) on a $f(\lambda\chi_A) >$ > 1, ce qui contredit le fait que $f(\chi_A) = 0$. Donc, supp $X^\times =$ $=$ supp $X' =$ supp X.

Prouvons maintenant que $X^* \cap X_n^\sim$ sépare les points de X, c'est-à-dire pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, il existe $f \in X^* \cap X_n^\sim$, $f(x) \neq 0$. On peut admettre que $x > 0$. Comme supp $X^\times =$ supp X, il existe $A \in \Sigma(\mu)$, $\mu(A) > 0$, $A \subset$ supp x, tel que $\chi_A \in X^\times$. Alors $\int_T x\chi_A\, d\mu > 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous venons de montrer que l'ensemble $X^* \cap X_n^\sim$ est total dans X. Voyons maintenant quand cet ensemble reproduit la norme sur X.

THÉORÈME 6 (Nakano-Amémia-Mori). *Si* X *est un e.i.n., les assertions suivantes sont équivalentes*:

1) $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \cap X_n^{\sim},\ \|f\| \leqslant 1\} \quad \forall x \in X$;

2) *la condition* (C) *est satisfaite dans* X.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Si x_n, $x \in X$, $x_n \to x\ (\mu)$, $\|x_n\| \leqslant 1$, alors d'après le théorème de Fatou $\|x\| \leqslant 1$. Donc la condition (C) est réalisée dans X d'après le lemme IV.3.4.

2) $\Rightarrow$ 1). Supposons tout d'abord que $X \subset L^1(T, \Sigma, \mu)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\|x\|_n = \inf\left\{\max\left\{\|y\|,\ n\int_T z(t)\,d\mu\right\} : y,\ z \in X_+,\ |x| = y + z\right\} \quad (x \in X).$$

Vérifions que $\|\cdot\|_n$ est une norme monotone sur X. Il n'est pas trivial que $\|x\|_n = 0$ entraîne $x = 0$. Prenons y_k, $z_k \in X_+$ tels que

$$|x| = y_k + z_k, \quad \|y_k\| \to 0, \quad n\int |z_k|\,d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème IV.3.1 on a $y_k \to 0\ (\mu)$ et $z_k \to 0\ (\mu)$, donc $x = 0$.

Signalons que

$$\|x\| \geqslant \|x\|_n, \quad n\int |x|\,d\mu \geqslant \|x\|_n.$$

De plus, il est évident que

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|x\|_n \leqslant \|x\|_{n+1} \leqslant \ldots$$

Prouvons que

$$\|x\|_n \to \|x\|. \tag{8}$$

Prenons $R > \|x\|_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Il existe alors y_n, $z_n \in X_+$ tels que

$$|x| = y_n + z_n, \quad \|y_n\| < R, \quad \int_T |z_n|\,d\mu < R/n.$$

D'où $z_n \to 0\ (\mu)$ et $y_n = |x| - z_n \to |x|\ (\mu)$. Comme $0 \leqslant y_n \leqslant |x|$, d'après la condition (C) on obtient

$$\|x\| \leqslant \sup \|y_n\| \leqslant R.$$

Ce qui prouve (8). Démontrons maintenant 1). On admettra que $x \geqslant 0$. D'après (8), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x\|_n > \|x\| - \varepsilon$.

Considérons l'e.i.n. $(X, \|\cdot\|_n)$. Comme $\|x\|_n \leqslant n\int |x|\,d\mu$, alors $\|\cdot\|_n$ est (o)-continue, d'où $(X, \|\cdot\|_n)^* \subset X_n^{\sim}$ d'après le théorème 4.

Il existe alors $f \in (X, \|\cdot\|_n)^*$ pour laquelle

$$\|f\|_{(X, \|\cdot\|_n)^*} \leqslant 1, \quad \|x\|_n < |f(x)| + \varepsilon,$$

d'où

$$\|f\|_{X^*} \leqslant \|f\|_{(X, \|\cdot\|_n)^*} \leqslant 1, \quad \|x\| < \|x\|_n + \varepsilon < |f(x)| + 2\varepsilon,$$

ce qui montre 1) dans le cas où $X \subset L^1$. Le cas général se réduit au cas étudié grâce au corollaire 1 du lemme IV.3.1.

Soit X un e.i. Posons $X'' = (X')'$. Il est évident que $X \subset X''$. Nous traitons le cas où $X = X''$. Si X est un e.i.n., nous posons $X^{\times\times} = (X^\times)^\times$. De toute évidence $X \subset X^{\times\times}$. Désignons la norme sur $X^{\times\times}$ par $\|\cdot\|^{\times\times}$. On a l'inégalité $\|x\| \geqslant \|x\|^{\times\times}$ $(x \in X)$.

THÉORÈME 7. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un e.i.n.* X:

1) *les conditions* (B) *et* (C) *sont satisfaites dans* X;

2) $X = X^{\times\times}$ *et* $\|\cdot\| = \|\cdot\|^{\times\times}$.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Comme la condition (C) est réalisée dans X, d'après le théorème (6) on a $\|x\| = \|x\|^{\times\times}$ pour $x \in X$. Prouvons que $X = X^{\times\times}$. Comme $\operatorname{supp} X = \operatorname{supp} X^\times = \operatorname{supp} X^{\times\times}$, il existe pour tout $x \in (X^{\times\times})_+$ une suite $\{x_n\} \subset X_+$, $0 \leqslant x_n \uparrow x$ (lemme IV.3.1). En se servant de (B) on obtient $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 1), puisque d'après le théorème 2, les conditions (B) et (C) sont réalisées dans $X^{\times\times}$.

Dans le paragraphe suivant, on appliquera les résultats obtenus à des espaces concrets. Pour la bibliographie consulter le chapitre X.

§ 2. Les espaces $L^p(T, \Sigma, \mu)$

2.1. Appliquons la théorie du paragraphe précédent à des espaces concrets de fonctions mesurables et en premier lieu aux espaces $L^p(T, \Sigma, \mu)$, où l'on admettra que la mesure μ est σ-finie (bien que cela ne soit pas indispensable pour $1 < p < \infty$).

THÉORÈME 1. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. *L'expression générale des fonctionnelles linéaires continues sur l'espace* $L^p(T, \Sigma, \mu)$ *est*

$$f(x) = \int_T x(t)\,\overline{y(t)}\,d\mu, \quad x \in L^p, \tag{1}$$

où y est un élément quelconque de $L^q(T, \Sigma, \mu)$. *De plus*

$$\|f\| = \|y\|_{L^q}. \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. La condition (A) étant réalisée dans L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ (théorème IV.3.5), d'après le corollaire 2 du théorème

1.4 la formule (1) nous donne l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues. L'égalité (2) se déduit à partir de V.2.3.

Considérons maintenant l'espace $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$. La condition (A) n'étant pas réalisée dans cet espace dans les cas non triviaux (cf. IV.3.3), la formule (1) (avec $y \in \mathbf{L}^1(T, \Sigma, \mu)$) ne donne plus l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues.

Désignons par $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$ l'ensemble des fonctions φ additives (réelles ou complexes) sur Σ telles que

1) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$;
2) la variation totale $|\varphi|(T) < \infty$.

Si l'on munit l'ensemble $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$ des opérations linéaires

$$(\lambda\varphi)(A) = \lambda\varphi(A), \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A), \quad A \in \Sigma,$$

on en fait un espace vectoriel. La formule $\|\varphi\| = |\varphi|(T)$ définit une norme sur $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$. Muni de cette norme $\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$ est un B-espace.

Définissons $\int_T x(t)\,d\varphi$ pour $x \in \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Considérons l'ensemble Ω de toutes les fonctions mesurables à valeurs finies de la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{A_i}(t), \tag{3}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A_i \in \Sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, et de plus les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. Posons

$$\int_T x(t)\,d\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(A_i).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\int_T x\,d\varphi$ ne dépend pas de la représentation de x par (3). D'après le théorème I.6.3, Ω est dense dans $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Il est évident que $\int_T x\,d\varphi$ est une fonctionnelle linéaire sur Ω et de plus

$$\left|\int_T x\,d\varphi\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i|\,|\varphi(A_i)| \leqslant \max_{i=1}^{k} |\lambda_i|\,|\varphi|(T) \leqslant \|x\|_{\mathbf{L}^\infty}\|\varphi\|.$$

Le théorème V.8.2 nous dit que $\int_T x\,d\varphi$ admet un prolongement linéaire en continuité à $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ tout entier, que nous désignerons par le même symbole.

THÉORÈME 2. *Dans l'espace* $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ *l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues est*

$$f(x) = \int_T x(t)\, d\varphi, \tag{4}$$

où φ *est un élément quelconque de* ba (Σ, μ) *). *De plus* $\|f\| = \|\varphi\|$ *et* $\varphi(A) \geqslant 0$ *pour tout* $A \in \Sigma$ *si et seulement si* $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)$, $x \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. En construisant $\int x\, d\varphi$ on a démontré que la formule (4) définissait $f \in (L^\infty)^*$ et $\|f\| \leqslant \|\varphi\|$. Etablissons l'inégalité inverse. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des $A_i \in \Sigma$ tels que

$$\|\psi\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |\varphi(A_i)| + \varepsilon, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \neq j), \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = T.$$

Posons $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sign} \varphi(A_i)\, \chi_{A_i}$. Alors $\|\tilde{x}\| \leqslant 1$ et $\int_T \tilde{x}\, d\varphi = \sum_{i=1}^{k} |\varphi(A_i)|$, d'où $\|\varphi\| \leqslant \int_T \tilde{x}\, d\varphi + \varepsilon \leqslant \|f\| + \varepsilon$. Donc $\|f\| = \|\varphi\|$.

Il reste à prouver que toute $f \in (L^\infty)^*$ admet la représentation (4). Posons $\varphi(A) = f(\chi_A)$ $(A \in \Sigma)$.

Alors $|\varphi|(T) \leqslant \|f\|$ (voir raisonnement précédent) et $\varphi \in$ ba (Σ, μ). De la construction de $\int_T x\, d\varphi$ il est évident que $f(x) = \int_T x\, d\varphi$ $(x \in L^\infty)$. Des constructions précédentes on voit que φ est positive, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarquons que l'application $y \in L^q \to f \in (L^p)^*$ (resp. $\varphi \in$ ba $\to f \in (L^\infty)^*$), définie par la formule (1) (resp. (4)) est une isométrie linéaire de L^q sur $(L^p)^*$ (resp. de ba sur L^∞). Pour cette raison on dit que L^q est dual de L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ et l'on note $(L^p)^* = L^q$. On se servira d'une abréviation analogue pour les représentations qu'on obtiendra plus bas.

L'égalité $(L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p$ $(1 < \ < \infty)$ ne nous permet pas encore de conclure à la réflexivité de l'espace L^p puisque l'égalité $(L^p)^{**} = L^p$ est comprise au sens de l'isométrie linéaire, laquelle peut ne pas être de la forme spéciale impliquée par la définition de la réflexivité (cf. V.7.3). Cependant l'étude de l'isométrie du théorème 1 nous permet d'établir que l'espace L^p $(1 < p < \infty)$ est réflexif.

*) Il faut prendre un ba (Σ, μ) complexe ou réel selon que l'espace $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est complexe ou réel.

En effet, prenons $F \in (\mathbf{L}^p)^{**}$ et prouvons qu'il existe $x \in \mathbf{L}^p$ tel que

$$F(f) = \overline{f(x)}, \quad f \in (\mathbf{L}^p)^*. \tag{5}$$

Désignons par α l'isométrie linéaire qui à tout $y \in \mathbf{L}^q$ associe une fonctionnelle $f \in (\mathbf{L}^p)^*$ par la formule (1). Si l'on pose $F_1(y) = F(\alpha y)$, $y \in \mathbf{L}^q$, alors $F_1 \in (\mathbf{L}^q)^*$, et d'après le théorème 1 il existe $x \in \mathbf{L}^p$ tel que

$$F_1(y) = \int y(t)\,\overline{x(t)}\,d\mu, \quad y \in \mathbf{L}^q.$$

Vérifions que l'égalité (5) est réalisée pour cet $x \in \mathbf{L}^p$. Si $f \in (\mathbf{L}^p)^*$ et $y = \alpha^{-1}(f) \in \mathbf{L}^q$, alors

$$F(f) = F_1(y) = \int y(t)\,\overline{x(t)}\,d\mu = \overline{\int x(t)\,\overline{y(t)}\,d\mu} = \overline{f(x)}.$$

Pour $p = 1$, l'injection canonique $\pi\colon \mathbf{L}^1 \to (\mathbf{L}^1)^{**}$ envoie $\mathbf{L}^1$ dans l'ensemble des fonctionnelles sur $\mathbf{L}^\infty$, admettant la représentation intégrale (1), ensemble qui, comme nous l'avons déjà signalé, est, dans le cas d'un $\mathbf{L}^1$ de dimension infinie, strictement plus étroit que $(\mathbf{L}^1)^{**} = (\mathbf{L}^\infty)^*$. Donc $\mathbf{L}^1$ et $\mathbf{L}^\infty = (\mathbf{L}^1)^*$ ne sont pas réflexifs dans le cas infinidimensionnel.

La forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $\mathbf{L}^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$ a été indiquée par F. Riesz, dans $\mathbf{L}^1(a, b)$ par Steinhaus (cf. F. Riesz [2] et Steinhaus [1]). La généralisation au cas d'une mesure abstraite a été faite par Nikodym.

2.2. Attardons-nous un peu sur le cas particulier des espaces de suites. Le théorème 1 entraîne le

THÉORÈME 3. *Soient* $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. *L'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans l'espace* $\mathbf{l}^p$ *est*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{l}^p,$$

où $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *est un élément quelconque de* $\mathbf{l}^q$. *De plus* $\|f\| = \|y\|_{\mathbf{l}^q}$.

Etudions maintenant l'espace $\mathbf{c}_0$ (cf. IV.3.4). Prouvons que $(\mathbf{c}_0)^* = \mathbf{l}^1$.

THÉORÈME 4. *L'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans l'espace* $\mathbf{c}_0$ *est*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k, \quad x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{c}_0, \tag{6}$$

où $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *est un élément arbitraire de* $\mathbf{l}^1$. *De plus* $\|f\| = \|y\|_{\mathbf{l}^1}$.

DÉMONSTRATION. La condition (A) étant satisfaite dans $\mathbf{c}_0$, l'expression générale de la fonctionnelle est donnée par la formule (6).

Soit $f \in (c_0)^*$. Posons $\tilde{x} = \{\tilde{\xi}_k\}$, où

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_k, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Comme $\tilde{x} \in c_0$ et $\|\tilde{x}\| \leqslant 1$, il vient

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \leqslant \|f\|.$$

Pour $n \to \infty$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| \leqslant \|f\|,$$

c'est-à-dire $y \in l^1$ et $\|y\|_{l^1} \leqslant \|f\|$.

Si $y \in l^1$, alors

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k\right| \leqslant \max |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| = \|y\|_{l^1} \cdot \|x\|,$$

d'où, par le procédé habituel, l'on déduit que f est une fonctionnelle linéaire et $\|f\| \leqslant \|y\|_{l^1}$, ce qui, en vertu de (7), nous amène à l'égalité $\|f\| = \|y\|_{l^1}$.

Bien que l'espace c ne soit pas un e.i. de Banach, une étude complémentaire permet d'établir la forme générale des fonctionnelles linéaires dans c.

Soit dans l'espace c l'élément $e_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Si $x = \{\xi_k\}$ est un élément arbitraire de c et $\xi_0 = \lim\limits_{k \to \infty} \xi_k$, alors de toute évidence $x - \xi_0 e_0 \in c_0$.

Soit f une fonctionnelle linéaire continue dans c; en la considérant uniquement sur c_0 on obtient une fonctionnelle linéaire continue f_0. Supposons que (pour $x \in c_0$)

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad (y = \{\eta_k\} \in l^1).$$

En désignant $\eta_0 = f(e_0)$, pour $x \in c$ quelconque on trouve

$$f(x) = f(\xi_0 e_0) + f_0(x - \xi_0 e_0) = \eta_0 \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (\xi_k - \xi_0).$$

En posant $\alpha = \eta_0 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k$ on obtient en définitive

$$f(x) = \alpha \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k = \alpha \lim_{k \to \infty} \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k. \tag{8}$$

On laisse au lecteur le soin de prouver que (8) est l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans c et que

$$\| f \| = | \alpha | + \sum_{k=1}^{\infty} | \eta_k |.$$

Le lecteur est invité à prouver par ailleurs que les B-espaces c_0 et c ne sont pas réflexifs.

2.3. Arrêtons-nous brièvement sur la représentation analytique des fonctionnelles dans les autres espaces de fonctions mesurables, introduits au § 3, chap. IV.

Etudions tout d'abord les espaces d'Orlicz. On a les égalités (pour le nombre d'éléments)

$$(\mathbf{E}_M)' = (\mathbf{L}_M)' = \mathbf{L}_{M^*}.$$

THÉORÈME 5. *L'expression générale des fonctionnelles linéaires (o)-continues f dans l'espace* $\mathbf{L}_M(T, \Sigma, \mu)$ *est*

$$f(x) = \int_T x(t)\overline{y(t)}\, d\mu, \quad x \in \mathbf{L}_M, \tag{9}$$

où y est un élément arbitraire de $\mathbf{L}_{M^*}(T, \Sigma, \mu)$. *De plus*

$$\| f \|_{(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_1)^*} = \| y \|_2, \quad \| f \|_{(\mathbf{L}_M, \|\cdot\|_2)^*} = \| y \|_1. \tag{10}$$

L'expression générale de $f \in (\mathbf{E}_M)^*$ est donnée par la formule (9), de plus sont valables des formules analogues aux formules (10) (au lieu de $\mathbf{L}_M$ on a $\mathbf{E}_M$). Donc, la formule (9) nous donne l'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans $\mathbf{L}_M$ si et seulement si M vérifie une Δ_2-condition. Pour qu'un espace d'Orlicz $\mathbf{L}_M$ soit réflexif il faut et il suffit que M et M^* vérifient une Δ_2-condition. On trouvera les démonstrations de ces résultats dans Krasnosselski et Routitski. T. Ando [1] a réussi à obtenir la représentation de toutes les fonctionelles linéaires continues sur un espace quelconque d'Orlicz.

Les formules suivantes, où l'égalité exprime l'identité des éléments et de la norme, établissent un lien entre les espaces de Lorentz et de Marzinkiewicz :

$$\mathbf{M}(\psi)' = \Lambda(\psi), \quad \Lambda(\psi)' = \mathbf{M}(\psi).$$

La condition (A) étant réalisée dans $\Lambda(\psi)$, il vient que $\Lambda(\psi)^* = \mathbf{M}(\psi)$. L'espace $\mathbf{M}(\psi)^*$ est essentiellement plus large que $\Lambda(\psi)$.

§ 3. Forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace C (K)

3.1. Soit K un compact. Désignons par **rca** (K) l'ensemble de toutes les fonctions φ σ-additives, régulières (réelles ou complexes), définies sur la tribu $\mathscr{B}$ de tous les boréliens de K, de variation totale finie $| \varphi | (K) < \infty$.

Si l'on munit **rca** (K) des opérations linéaires comme nous l'avons fait pour **ba** (Σ, μ) et que l'on pose $\| \varphi \| = | \varphi | (K)$, l'on fait de **rca** ($K$) un B-espace.

THÉORÈME 1. *L'expression générale des fonctionnelles linéaires continues dans l'espace* C (K) *est*

$$f(x) = \int_K x(t)\, d\varphi, \quad x \in \mathrm{C}(K),$$

où φ *est un élément arbitraire de* rca (K) *). *De plus* $\| f \| = \| \varphi \|$ *et* $\varphi(A) \geqslant 0$ *pour tout* $A \in \mathscr{B}$ *si et seulement si* $f(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{C}(K)$.

La correspondance établie par le théorème 1 est une isométrie linéaire de C $(K)^*$ dans rca (K). La démonstration du théorème 1 est assez longue et fait appel à la théorie de la mesure et à la topologie; pour cette raison nous allons l'omettre (elle figure dans Dunford et Schwartz [I], Zaanen [II]). Le théorème 1 pour $K = [0, 1]$ a a été prouvé par F. Riesz (c'est pourquoi on l'appelle souvent théorème de Riesz). La formulation générale est due à A. Markov et S. Kakutani.

Reformulons le théorème 1 dans le cas d'un espace C $[a, b]$ réel. Complétons d'abord les généralités sur les fonctions à variation bornée (cf. IV.4.1).

Considérons une fonction $\varphi(t)$ strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$ un système quelconque de points. Prenons t'_k et t''_k tels que $a < t'_1 < t_1 < t''_1 < t'_2 < t_2 < t''_2 < \ldots < t''_n < b$. On a de toute évidence

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi(t''_k) - \varphi(t'_k)] \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

En faisant tendre $t'_k \to t_k - 0$ et $t''_k \to t_k + 0$, on obtient à la limite

$$\sum_{k=1}^{n} [\varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0)] \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

D'où il résulte qu'une fonction monotone ne peut présenter qu'un nombre fini de sauts supérieurs à ε. Donc, l'ensemble de tous les points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Comme toute fonction à variation bornée est représentable par la différence de deux fonctions strictement croissantes, cette circonstance a lieu aussi pour une fonction à variation bornée.

De ce qui précède il suit que l'ensemble des points de continuité d'une fonction à variation bornée est dense dans l'intervalle $[a, b]$.

---

*) On prendra rca (K) réel ou complexe selon que C (K) est réel ou complexe.

Soit $g(t)$ une fonction à variation bornée. Considérons la fonction $\tilde{g}(t)$ définie par

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{2}[g(t+0) + g(t-0)] \quad (a < t < b),$$

$$\tilde{g}(b) = g(b), \quad \tilde{g}(a) = g(a).$$

Donc la fonction $\tilde{g}(t)$ est confondue avec $g(t)$ aux points de continuité de cette dernière, et également pour $t = a$, b. La fonction $\tilde{g}(t)$ sera appelée *fonction corrigée*.

Si la fonction $g(t)$ est confondue avec sa corrigée on dira qu'elle est *correcte*. Désignons par $\mathbf{V}_0$ l'ensemble de toutes les fonctions correctes s'annulant pour $t = a$. Il est clair que $\mathbf{V}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbf{V}$ des fonctions à variation bornée. On vérifie sans peine que c'est un sous-espace fermé. Donc, étant un sous-espace fermé du B-espace $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_0$ est un B-espace.

Pour toute fonction $x \in \mathbf{C}[a, b]$ est définie l'intégrale de Stieltjes (cf. Voulikh [III], chap. XI, § 5) $\int_a^b x(t)\,dg(t)$ par rapport à la fonction à variation bornée $g(t)$.

THÉORÈME 2. *La forme générale des fonctionnelles linéaires continues dans l'espace* $\mathbf{C}[a, b]$ *est donnée par l'intégrale de Stieltjes*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t),$$

où $g(t)$ *est une fonction quelconque à variation bornée. Si de plus la fonction* $g(t)$ *est correcte, alors*

$$\|f\| = \bigvee_a^b (g).$$

La fonctionnelle f *définit la fonction* $g \in \mathbf{V}_0$ *de façon unique.*

Ce théorème se déduit facilement du théorème 1, car l'intégrale de Stieltjes d'une fonction continue se ramène à une intégrale par rapport à une fonction σ-additive d'ensemble (cf. Voulikh [III], chap. XI, § 5). Les détails sont laissés au soin du lecteur (dans Kolmogorov et Fomine on trouvera une démonstration indépendante du théorème 1). L'espace $\mathbf{C}(K)$ n'est pas réflexif en dimension infinie (c'est-à-dire lorsque le compact K est infini). On laisse au lecteur le soin de vérifier que la fonctionnelle $F_t(g) = g(t)$, $g \in \mathbf{V}_0$, où $t \in [0, 1]$ est un point fixe, n'est pas élément de l'image de l'espace $\mathbf{C}[0, 1]$ par une injection canonique.

3.2. Appliquons le théorème de la forme générale des fonctionnelles linéaires de l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ au problème des moments.

Soit donnée dans un espace normé $\mathbf{X}$ une suite $\{x_n\}$ d'éléments linéairement indépendants. Prenons une fonctionnelle linéaire quelconque $f \in \mathbf{X}$ et formons la suite numérique

$$f(x_n) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

On appelle *problème des moments* généralisé le problème qui consiste à déterminer la fonctionnelle f par la suite $\{\mu_n\}$ de ses valeurs. Dans une position aussi générale la résolution ne peut être poussée bien loin. Cependant, même dans le cas général, on peut énoncer des conditions de résolubilité et des conditions d'unicité de la solution.

Si l'ensemble $\{x_n\}$ est fondamental, d'après ce qui a été dit dans III.3.2, la fonctionnelle f (sous réserve qu'elle existe) est définie de façon unique par la suite $\{\mu_n\}$. On voit immédiatement que le fait que le système $\{x_n\}$ est fondamental est aussi une condition nécessaire d'unicité de la solution du problème des moments.

D'autre part, si l'on désigne par φ la fonctionnelle (peut-être non additive) définie sur l'ensemble $\{x_n\}$:

$$\varphi(x_n) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

alors du fait que l'existence de la fonctionnelle f traduit la possibilité d'un prolongement linéaire de φ à l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}(\{x_n\})$ le théorème V.8.1 nous dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le problème des moments admette une solution est l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mu_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k\right\| \tag{3}$$

quels que soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ou encore que

$$\sup \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \mu_k\right|}{\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x_k\right\|} < \infty, \tag{4}$$

où le suprémum est pris sur tous les $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Considérons parmi les problèmes des moments celui, nommé *problème des moments puissances*, où $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$ et

$$x_n(t) = t^n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5}$$

En prenant en considération la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$, on peut formuler le problème comme

suit: trouver les conditions sous lesquelles existe une fonction à variation bornée $g(t)$, telle que

$$\int_a^b t^n \, dg(t) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Notons que, le système $\{x_n\}$ étant complet dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$, la solution du problème, si elle existe, sera unique.

La condition (4) de solubilité du problème des moments (6) s'écrit encore:

$$\sup \frac{\left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mu_k \right|}{\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k \right|} < \infty. \tag{7}$$

Citons enfin un résultat plus concret concernant le problème des moments puissances posé dans l'intervalle $[0, 1]$.

THÉORÈME 2 (Hausdorff). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe une fonction à variation bornée $g(t)$ telle que:*

$$\int_0^1 t^n \, dg(t) = \mu_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

est que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| \Delta^{n-k} \mu_k \right| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{9}$$

où C_n^k sont des coefficients binômiaux, $\Delta^m \mu_k$ les différences m-ièmes pour la suite $\{\mu_k\}$, définies par les égalités récurrentielles

$$\Delta^{m+1} \mu_k = \Delta^m \mu_k - \Delta^m \mu_{k+1}, \quad \Delta^0 \mu_k = \mu_k$$
$$(m = 0, 1, \ldots; \quad k = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

DÉMONSTRATION. La *condition* est *nécessaire*. Supposons que le problème des moments (8) est résoluble. Désignons par f la fonctionnelle linéaire de l'espace $\mathbf{C}[0, 1]$, engendrée par la fonction $g(t)$. Notons ensuite

$$x_k^{(m)}(t) = t^k (1-t)^m \quad (m, k = 0, 1, \ldots). \tag{11}$$

Comme

$$x_k^{(m+1)}(t) = t^k (1-t)^{m+1} = t^k (1-t)^m - t^{k+1} (1-t)^m =$$
$$= x_k^{(m)}(t) - x_{k+1}^{(m)}(t),$$

il vient

$$f(x_k^{(m+1)}) = f(x_k^{(m)}) - f(x_{k+1}^{(m)}) \quad (m,\ k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

De plus

$$f(x_k^{(0)}) = \mu_k.$$

En tenant compte de (10) on s'assure sans peine (par récurrence) que

$$f(x_k^{(m)}) = \Delta^m \mu_k \quad (m,\ k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Supposons maintenant que $\theta_k^{(n)} = \operatorname{sign} \Delta^{n-k}\mu_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Considérons la fonction

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{(n)} C_n^k x_k^{(n-k)}(t).$$

Comme $x_k^{(m)}(t) \geqslant 0$ dans $[0,\ 1]$, on a

$$|\tilde{x}(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k^{(n-k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

Donc $\|\tilde{x}\| < 1$, et

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \theta_k^{(n)} \Delta^{n-k}\mu_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \theta_k^{(n)} f(x_k^{(n-k)}) = f(\tilde{x}) \leqslant \|f\|$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

ce qui prouve la condition nécessaire si l'on pose $M = \|f\|$.

La *condition* est *suffisante*. Supposons que φ est la fonctionnelle définie sur l'ensemble $\{x_n\}$ par la formule (2), où $x_n(t) = t^n$. Prolongeons φ à l'enveloppe linéaire de l'ensemble $\{x_n\}$, c'est-à-dire à l'ensemble de tous les polynômes. Plus exactement, si $x(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_n t^n$, on posera

$$f_0(x) = \lambda_0\mu_0 + \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n.$$

f_0 est définie de façon unique, puisque les fonctions $x_n(t)$ sont linéairement indépendantes.

La fonctionnelle f_0 ainsi définie sera de toute évidence additive et homogène. Nous allons prouver que la condition (10) assure sa continuité.

Notons qu'indépendamment de cette condition la fonctionnelle f_0 est continue sur l'ensemble H_m des polynômes de degré $\leqslant m$, car H_m est un espace de dimension finie (les coordonnées sont les coefficients du polynôme), donc la convergence dans H_m est une convergence en coordonnées.

Dans les notations précédentes on aura

$$f_0(x_k^{(s)}) = \Delta^s \mu_k \qquad (s,\ k = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Considérons maintenant un polynôme quelconque $x(t)$. Supposons qu'il est de degré m. Soit la suite des polynômes correspondants de Bernstein

$$x_n(t) = B_n(x;\ t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \tag{12}$$

On sait que le degré du polynôme $x_n(t)$ est $\leqslant m$ *) pour tout $n = 1, 2, \ldots$, et comme $x_n(t)$ est uniformément convergente vers $x(t)$ pour $n \to \infty$ (voir Natanson [I], page 23), alors d'après la remarque faite plus haut

$$f_0(x_n) \to f_0(x),$$

mais

$$|f_0(x_n)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| x\left(\frac{k}{n}\right)\right| |f_0(x_n^{(n-k)})| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant M\|x\|.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ au premier membre, on obtient

$$|f_0(x)| \leqslant M\|x\|,$$

---

*) Voici la démonstration de ce fait. En dérivant (12) et en remplaçant l'indice de sommation k par $k+1$ dans la première somme, on obtient

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [k t^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1}]\, x\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k t^k (1-t)^{n-1-k}\left[x\left(\frac{k+1}{n}\right) - x\left(\frac{k}{n}\right)\right].$$

Il vient par récurrence

$$\frac{d^s x_n}{dt^s} = n(n-1)\ldots(n-s+1)\sum_{k=0}^{n-s} C_{n-s}^k t^k (1-t)^{n-s-k}\, \Delta^s x\left(\frac{k}{n}\right).$$

$x(t)$ étant de degré m, on a $\Delta^{m+1} x\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, donc $\frac{d^{m+1}x_n}{dt^{m+1}} = 0$, d'où il suit que $x_n(t)$ est un polynôme de degré $\leqslant m$.

ce qui prouve la continuité de f_0, puisque x est un polynôme quelconque. Il suffit maintenant de prolonger f_0 en continuité à C [0, 1] tout entier (cf. IV.8.2) et d'appliquer au prolongement f le théorème de la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace C [0, 1], qui dit que

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t) \quad (x \in \mathrm{C}[0, 1]),$$

où $g(t)$ est une fonction à variation bornée. Ceci achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE VII

SUITES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES

Un nombre important de processus mathématiques concrets sont susceptibles d'être inclus dans un schéma abstrait décrit au moyen de suites d'opérateurs linéaires. C'est notamment le cas de la convergence des séries de Fourier et des polynômes d'interpolation, des formules des quadratures mécaniques, de la théorie des intégrales singulières, etc.

Dans sa forme abstraite le problème se ramène généralement à l'établissement de la convergence d'une suite d'opérateurs linéaires, ou à la démonstration que les normes des opérateurs de cette suite sont bornées, ou encore à d'autres problèmes analogues.

§ 1. Théorèmes fondamentaux

1.1. Parmi les théorèmes des suites d'opérateurs linéaires le théorème suivant est primordial.

THÉORÈME 1. *Si une suite d'opérateurs linéaires continus* $\{U_n\}$ *d'un B-espace* $\mathbf{X}$ *dans un espace normé* $\mathbf{Y}$ *est bornée en chaque point, c'est-à-dire si*

$$\sup_n \| U_n (x) \| < \infty \quad (x \in \mathbf{X}), \tag{1}$$

alors les normes de ces opérateurs sont bornées dans leur ensemble:

$$\| U_n \| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que si l'on connaît une borne de valeurs d'un opérateur linéaire dans une boule, soit:

$$\| U (x) \| \leqslant B \quad (x \in B_\delta (x_0)),$$

on peut évaluer la norme de cet opérateur; notamment

$$\| U \| \leqslant 2B/\delta.$$

En effet, pour tout x' tel que $\| x' \| < 1$, on aura

$$x = x_0 + \delta x' \in B_\delta (x_0).$$

Donc

$$\| U (x_0) + \delta U (x') \| \leqslant B,$$

et par suite

$$\|U(x')\| = \frac{1}{\delta}\|U(\delta x')\| \leqslant \frac{1}{\delta}[\|U(x_0) + \delta U(x')\| + \|U(x_0\|] \leqslant \frac{2B}{\delta},$$

d'où il résulte que $\|U\| \leqslant 2B/\delta$.

Passons à la démonstration du théorème. Supposons que la suite $\{\|U_n\|\}$ n'est pas bornée. Soit la fonctionnelle

$$p(x) = \sup_n \|U_n(x)\|.$$

Cette fonctionnelle n'est bornée dans aucune boule, car si $p(x) \leqslant B$ et $x \in B_\delta(x_0)$, alors, comme on l'a indiqué, on aurait $\|U_n\| \leqslant \leqslant 2B/\delta$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Il s'ensuit que l'ensemble $E_k = \{x \in X: p(x) > k\}$ est dense dans X. L'ensemble E_k est ouvert, puisque si $x_0 \in E_k$, c'est-à-dire $p(x_0) > k$, alors pour un n_0 on aura $\|U_{n_0}(x_0)\| > k$ et du fait de la continuité de $\|U_{n_0}(x)\|$ il vient que $\|U_{n_0}(x)\| > k$ pour les x assez proches de x_0.

L'ensemble E_k en tant qu'ensemble ouvert et dense dans X est un résidu (cf. I.4.7). Or, l'intersection d'un système dénombrable de résidus est un résidu, donc n'est pas vide. Si

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k,$$

alors

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty$$

contrairement à l'hypothèse.

Remarque. On peut affaiblir l'hypothèse du théorème en exigeant que (1) soit réalisée sur un ensemble de deuxième catégorie et non sur X tout entier (sans supposer que X est complet).

Le théorème démontré peut être encore formulé de la manière suivante (*principe de fixation des singularités*): si

$$\sup_n \|U_n\| = \infty$$

il existe un élément $x_0 \in X$, tel que

$$\sup_n \|U_n(x_0)\| = \infty. \tag{2}$$

L'ensemble des éléments vérifiant (2) est un résidu.

Cette formulation permet de généraliser un peu la proposition avancée. Soient $\{U_n^{(k)}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ des opérateurs linéaires continus de X dans Y, et de plus

$$\sup_n \|U_n^{(k)}\| = \infty \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Il existe alors un élément x_0 tel que

$$\sup_n \| U_n^{(k)}(x_0) \| = \infty \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

En effet, l'ensemble A_k des $x \in X$, tels que

$$\sup_n \| U_n^{(k)}(x) \| = \infty,$$

est un résidu, donc l'intersection $A_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ n'est pas vide. Il est clair que pour x_0 on peut prendre un élément quelconque de A_0.

Cette proposition est appelée parfois *principe de condensation des singularités.*

1.2. L'application du théorème 1 au cas où la suite d'opérateurs $\{U_n\}$ est convergente dans X, c'est-à-dire pour chaque $x \in X$ existe

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x), \tag{4}$$

nous conduit à un résultat important sur les suites convergentes d'opérateurs linéaires. Plus exactement, sous les hypothèses faites plus haut sur les espaces X et Y on a le

THÉORÈME 2. *Si une suite d'opérateurs linéaires continus $\{U_n\}$ converge dans X vers un opérateur U, alors U est un opérateur linéaire continu, et*

$$\| U \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| U_n \|. \tag{5}$$

DÉMONSTRATION. Que l'opérateur U soit linéaire est évident. Comme $\lim_{n\to\infty} \| U_n(x) \| = \| U(x) \| < \infty$, alors $\sup_n \| U_n(x) \| < \infty$ et, en vertu du théorème 1, la suite des normes $\{\| U_n \|\}$ est bornée. Donc

$$\| U(x) \| = \lim_{n\to\infty} \| U_n(x) \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| U_n \| \, \| x \|,$$

d'où découlent la continuité de U et l'inégalité (5).

REMARQUE. Notons que la convergence de U_n vers U en norme dans l'espace B (X, Y) peut ne pas avoir lieu, ce dont on peut s'assurer sur l'exemple : $X = l^1$, $Y = R^1$, $U_n = f_n$, où

$$f_n(x) = \xi_n \quad (x = \{\xi_k\} \in l^1; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

$f_n(x) \to 0$, bien que $\| f_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Le fait que la suite de normes est bornée est dans un sens notoire une condition suffisante de convergence de la suite des opérateurs linéaires. Plus exactement, on a le (cf. Banach et Steinhaus [1])

THÉORÈME 3 (Banach-Steinhaus). *Pour qu'une suite $\{U_n\}$ d'opérateurs linéaires continus d'un B-espace* X *dans un B-espace* Y *converge dans* X *vers un opérateur linéaire continu, il est nécessaire et suffisant que*

1) *les normes des opérateurs U_n soient bornées dans leur ensemble*:

$$\| U_n \| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

2) *la suite $\{U_n (x')\}$ soit de Cauchy quel que soit l'élément x' d'un ensemble D dense dans* X.

DÉMONSTRATION. La *condition* 1) est *nécessaire* d'après le théorème 2. La condition 2) l'est de toute évidence.

Condition suffisante. Prenons un $x \in$ X et trouvons $x' \in D$ tel que

$$\| x - x' \| < \varepsilon.$$

Pour m, n assez grands, on a

$$\| U_m (x') - U_n (x') \| < \varepsilon.$$

Donc

$$\| U_m (x) - U_n (x) \| \leqslant \| U_m (x') - U_n (x') \| + \\ + \| U_m (x) - U_m (x') \| + \| U_n (x) - U_n (x') \| < \varepsilon + \\ + (\| U_m \| + \| U_n \|) \| x - x' \| < (2M + 1) \varepsilon.$$

L'espace Y étant complet, il existe $U (x) = \lim\limits_{n \to \infty} U_n (x)$, et d'après le théorème 2 l'opérateur U est linéaire et continu.

REMARQUE 1. Le théorème (la condition suffisante) reste valable si l'on remplace la convergence en soi de la suite $\{U_n (x')\}$ $(x' \in D)$ par la convergence vers $U (x')$, où U est un opérateur linéaire continu donné. La complétude de l'espace Y n'est pas indispensable dans ce cas.

REMARQUE 2. La condition 2) peut être remplacée par la convergence sur un ensemble D fondamental dans X. En effet, la convergence sur D implique la convergence sur $\mathcal{L} (D)$ qui est dense dans X.

REMARQUE 3. La première condition du théorème 3 peut être remplacée par la condition (1) d'après le théorème 1.

COROLLAIRE. *L'ensemble des points de convergence d'une suite d'opérateurs linéaires continus est ou bien de première catégorie ou bien l'espace tout entier.*

En effet, si l'ensemble des points de convergence était de deuxième catégorie, d'après la remarque suivant le théorème 1 la suite de normes serait bornée. D'autre part, cet ensemble en tant qu'ensemble de deuxième catégorie est dense dans une boule, donc dans l'espace X tout entier, puisqu'il est muni manifestement d'une structure d'espace vectoriel. Le théorème 3 est valable.

REMARQUE 4. Les théorèmes 1 et 2 et le théorème 3 (la condition suffisante) restent en vigueur si l'on y remplace les suites d'opérateurs par des suites généralisées d'opérateurs.

§ 2. Quelques applications à la théorie des fonctions

Les théorèmes du paragraphe précédent admettent d'innombrables applications. Voyons quelques unes d'entre elles.

2.1. Commençons par la convergence des *formules des quadratures mécaniques*

$$\int_a^b x(t)\,dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k x(t_k) \quad (a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b),$$

utilisées pour le calcul approché des intégrales. Telles sont les formules des rectangles, des trapèzes, de Simpson. A ce type se rapportent également les formules plus compliquées de Newton-Cotes et Gauss. La théorie générale des *formules de cubature* a été élaborée par S. Sobolev (cf. S. Sobolev [II]).

Une formule seule ne pouvant assurer une précision aussi grande que l'on veut, il semble naturel de considérer la suite de formules

$$\int_a^b x(t)\,dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \tag{1}$$

$$(a \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant b; \quad n = 0, 1, \ldots)$$

et de voir sous quelles conditions l'erreur de calcul des intégrales par ces formules tend vers zéro pour $n \to \infty$. Si ceci a lieu pour une fonction donnée x, on dira que les formules des quadratures mécaniques (1) *convergent* vers la fonction x.

La réponse au problème de la convergence de ces formules est donnée par le

THÉORÈME 1 (Szegö). *Pour que les formules des quadratures mécaniques* (1) *soient convergentes pour toute fonction continue, il faut et il suffit que*

1) $\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant M \quad (n = 0, 1, \ldots)$;

2) *la convergence ait lieu pour tout polynôme.*

DÉMONSTRATION. Dans l'espace $\mathbf{C}[a, b]$ considérons les fonctionnelles

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt.$$

On a vu au V.2.1 que

$$\|f_n\| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \quad (n=0, 1, \ldots).$$

Donc, la condition 1) exprime le fait que les normes des fonctionnelles f_n sont bornées dans leur ensemble, et la condition 2) que $f_n(x) \to f(x)$ pour x appartenant à l'ensemble des polynômes qui est dense dans $C[a, b]$. Par suite, le résultat formulé est un cas particulier du théorème de Banach-Steinhaus (compte tenu de la remarque 1 qui le suit).

Remarque 1. Si les coefficients $A_k^{(n)}$ sont strictement positifs quels que soient k et n, la première condition est une conséquence de la seconde.

En effet, pour $x(t) \equiv 1$, d'après la deuxième condition les formules sont convergentes, c'est-à-dire

$$b-a = \int_a^b dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)},$$

d'où il résulte que les sommes $\sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}$ sont bornées.

Remarque 2. Dans la deuxième condition, on peut remplacer l'ensemble de tous les polynômes par un ensemble dense dans $C[a, b]$, par exemple par l'ensemble de toutes les fonctions linéaires par morceaux, ou même par un ensemble complet dans $C[a, b]$, par exemple par les puissances de la variable indépendante (cf. remarque 2 suivant le théorème de Banach-Steinhaus).

Remarque 3. Ce qui vient d'être dit sur les formules (1) vaut pour le cas plus général des formules

$$\int_a^b p(t)\, x(t)\, dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \tag{2}$$

$$(a \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant b; \quad n=0, 1, \ldots),$$

où $p(t)$ est une fonction sommable fixe dite fonction de poids.

Indiquons une méthode d'établissement de formules des quadratures mécaniques.

Pour chaque $n = 0, 1, \ldots$ on se donne de façon arbitraire des valeurs $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$ dans l'intervalle $[a, b]$ et on construit le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n(x; t)$ de la fonction $x(t)$, qui coïncide avec $x(t)$ aux points $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$. On sait que

$$P_n(x; t) = \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n)}(t)\, x(t_k^{(n)}),$$

où

$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t - t_k^{(n)})\,\omega_n'(t_k^{(n)})}$$

$$(\omega_n(t) = (t - t_0^{(n)})(t - t_1^{(n)}) \ldots (t - t_n^{(n)}); \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 0, 1, \ldots).$$

En remplaçant la fonction $x(t)$ par son polynôme d'interpolation dans l'intégrale $\int_a^b p(t)\,x(t)\,dt$, on obtient la formule des quadratures mécaniques :

$$\int_a^b p(t)\,x(t)\,dt \cong \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \qquad \left(A_k^{(n)} = \int_a^b p(t)\,l_k^{(n)}(t)\,dt\right). \tag{3}$$

Les formules obtenues par cette méthode sont dites *formules d'interpolation* (cf. Natanson [I], page 590).

Si la fonction $x(t)$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, son polynôme d'interpolation est confondu avec elle, et la formule (3) sera exacte dans ce cas. Donc, si $x(t)$ est un polynôme arbitraire, pour n assez grand l'erreur de la formule est nulle, c'est-à-dire les formules d'interpolation des quadratures mécaniques convergent toujours sur l'ensemble des polynômes. Donc, seule la première condition du théorème 1 est une condition nécessaire et suffisante de convergence de ces formules pour toute fonction continue. En particulier, d'après la remarque 1 la convergence aura lieu si tous les coefficients $A_k^{(n)} \geqslant 0$.

Ceci aura lieu si, par exemple, la fonction de poids est strictement positive et les points $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$ choisis tels que les polynômes $\omega_n(t)$ forment un système orthogonal par rapport au poids $p(t)$. Les formules ainsi obtenues sont dites *formules de Gauss*. Elles diffèrent des autres formules par le fait qu'elles sont exactes pour les polynômes de degré $2n + 1$ (cf. Natanson [I], page 601).

2.2. Considérons l'espace $\tilde{C}$ des fonctions périodiques de même période (pour fixer les idées 2π), continues, définies sur la droite réelle tout entière. Chacune de ces fonctions peut manifestement être traitée comme une fonction définie sur un intervalle $[a, a + 2\pi]$ de longueur 2π et vérifiant $x(a + 2\pi) = x(a)$. Ceci nous permet d'identifier $\tilde{C}$ avec un sous-espace fermé de $C[a, a + 2\pi]$.

D'où il suit que l'opérateur $y = U(x)$

$$y(s) = \int_a^{a+2\pi} K(s, t)\,x(t)\,dt \quad (s \in [a, a + 2\pi]), \tag{4}$$

de noyau continu $K(s, t)$, sera opérateur linéaire de $\widetilde{C}$ dans C. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'expression de la norme de l'opérateur U est

$$\|U\| = \max_s \int_a^{a+2\pi} |K(s, t)|\, dt \tag{5}$$

(cf. V.2.4).

D'une façon générale, l'opérateur (4) envoie des fonctions périodiques dans des fonctions non périodiques. Pour que U soit un opérateur de $\widetilde{C}$ dans $\widetilde{C}$, de toute évidence il est nécessaire et suffisant que son noyau $K(s, t)$ soit 2π-périodique en s, c'est-à-dire $K(s + 2\pi, t) = K(s, t)$. Si, enfin, le noyau $K(s, t)$ est défini sur le plan tout entier et est 2π-périodique en t, alors dans (4) et (5) l'intégration peut être effectuée sur tout intervalle de longueur 2π.

Formons la série de Fourier d'une fonction continue 2π-périodique $x(t)$:

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin kt\, dt$$

$$(k = 0, 1, \ldots).$$

En associant à chaque fonction $x(t)$ de $\widetilde{C}$ la somme partielle $S_n(x)$ de sa série de Fourier, on obtient un opérateur S_n de $\widetilde{C}$ dans $\widetilde{C}$. On sait que cette somme s'exprime au moyen de l'intégrale de Dirichlet:

$$y = S_n(x), \quad y(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}}\, dt,$$

c'est-à-dire l'opérateur S_n est de la forme (4) et de plus c'est un opérateur linéaire continu, puisque son noyau est continu. Montrons que $\|S_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

En effet, d'après (5) et la périodicité du noyau

$$\|S_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{t-s}{2}}{\sin \frac{t-s}{2}} \right| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt,$$

où $m = 2n + 1$. En utilisant les inégalités connues du cours d'analyse

$$|\sin t| \leqslant |t|, \quad \sin s \geqslant \frac{2}{\pi} s \quad \left(0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

on obtient

$$\| S_n \| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin mt}{\sin t} \right| dt > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\frac{k\pi}{m}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2m}} \frac{|\sin mt|}{\sin t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{|\sin mt|}{\sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right)} dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\frac{\pi}{4m}}^{\frac{\pi}{2m}} \frac{\frac{2}{\pi} mt}{t + \frac{k\pi}{m}} dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\frac{2}{\pi} m \frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m} + \frac{k\pi}{m}} \frac{\pi}{4m} \geqslant \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{8\pi} \sum_{k=2}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \ln \frac{m}{2} \geqslant \frac{1}{8\pi} \ln n.$$

Donc

$$\| S_n \| \geqslant \frac{1}{8\pi} \ln n,$$

d'où résulte ce que nous voulions.

Le théorème 1.3 nous dit qu'il existe une fonction périodique continue dont la série de Fourier ne converge uniformément vers aucune fonction.

Les raisonnements précédents nous permettent d'établir également l'existence d'une fonction périodique continue dont la série de Fourier est divergente en tout point donné *a priori*.

Considérons à cet effet la suite de fonctionnelles f_n dans l'espace $\tilde{C}$:

$$f_n(x) = S_n(x)(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin (2n+1) \frac{t - t_0}{2}}{\sin \frac{t - t_0}{2}} x(t)\, dt.$$

Comme dans V.2.2, la norme de la fonctionnelle f_n est définie par

$$\| f_n \| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{t-t_0}{2}}{\sin \frac{t-t_0}{2}} \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt =$$

$$= \| S_n \|,$$

donc $\| f_n \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Par suite, d'après le théorème 1.1 il existe un élément $x_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}$ pour lequel $\sup_n | f_n (x_0) | = \infty$, c.q.f.d.

Considérons maintenant un ensemble dénombrable quelconque $e = \{t_k\}$ sur la droite numérique et formons les fonctionnelles $f_n^{(k)}$:

$$f_n^{(k)} (x) = S_n (x) (t_k) \quad (k,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

En leur appliquant le principe de condensation des singularités on trouve un élément $x_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}$ tel que

$$\sup_n | f_n^{(k)} (x_0) | = \infty \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire une fonction $x_0 (t)$ dont la série de Fourier est divergente en tout point de l'ensemble e.

Du Bois-Reymond (cf. Zygmund) a le premier indiqué un exemple de fonction dont la série de Fourier n'est pas partout convergente.

Si l'on traite S_n comme un opérateur linéaire de $\mathbf{L}^1$ dans $\mathbf{L}^1$, $\| S_n \|$ garde sa valeur précédente en raison de la symétrie du noyau et le théorème 1.3 nous permet de conclure qu'il existe une fonction sommable dont la série de Fourier ne converge pas en moyenne dans $\mathbf{L}^1$.

2.3. On obtient une importante généralisation des résultats précédents en introduisant la notion d'opérateur polynomial.

Considérons de nouveau l'espace $\widetilde{\mathbf{C}}$ des fonctions continues 2π-périodiques et désignons par $\widetilde{\mathbf{H}}_n$ son sous-espace composé de tous les polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$.

Un opérateur linéaire continu U dans l'espace $\widetilde{\mathbf{C}}$ est *polynomial* (trigonométrique) *d'ordre* n si

1) $U (x) \in \widetilde{\mathbf{H}}_n \ \forall x \in \widetilde{\mathbf{C}}$;

2) $x \in \widetilde{\mathbf{H}}_n \Rightarrow U (x) = x$.

Il est équivalent de dire que l'opérateur polynomial associe aux fonctions 2π-périodiques des polynômes trigonométriques d'ordre $\leqslant n$, ces derniers restant invariants.

Un exemple élémentaire d'opérateur polynomial est l'opérateur S_n étudié dans 2.2. Un autre exemple est l'opérateur associant à une fonction son polynôme d'interpolation (trigonométrique) construit sur un système fixe de nœuds.

On conviendra des notations suivantes. Si $y = U(x)$, on désignera par $U(x; s)$ la valeur de la fonction y pour s donné: par exemple $S_n(x; s) = S_n(x)(s)$. D'autre part, si $x(t)$ est une fonction de $\tilde{C}$, on notera $x^h(t)$ la fonction déduite de $x(t)$ par une translation de l'argument:

$$x^h(t) = x(t+h).$$

Il est clair que $x^h \in \tilde{C}$, $\forall h$. Signalons encore qu'en vertu de la continuité uniforme de la fonction $x \in \tilde{C}$ on a

$$\| x^h - x \| = \max_t | x^h(t) - x(t) | \to 0 \text{ pour } h \to 0. \tag{6}$$

On peut établir des résultats généraux très importants pour les opérateurs polynomiaux et les suites de tels opérateurs. Ces résultats sont tous basés sur le lemme suivant qui relie un opérateur polynomial quelconque à l'opérateur S_n.

LEMME 1. *Si U est un opérateur polynomial d'ordre n, on a l'identité*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x^\tau; s-\tau)\,d\tau = S_n(x; s) \quad (x \in \tilde{C}) \tag{7}$$

(identité de Zygmund-Marzinkiewicz-Berman).

DÉMONSTRATION. Supposons que $x \in \tilde{H}_n$, donc $x^\tau \in \tilde{H}_n$. Par suite

$$U(x^\tau; s-\tau) = x^\tau(s-\tau) = x(s).$$

S_n étant un opérateur polynomial d'ordre n, on a

$$S_n(x; s) = x(s),$$

c.q.f.d.

Supposons maintenant que $x(t) = \cos mt$ ou $x(t) = \sin mt$, où $m > n$. Pour fixer les idées étudions le premier cas. On a

$$x^\tau(t) = \cos m(t+\tau) = \cos mt \cos m\tau - \sin mt \sin m\tau =$$
$$= x_1(t)\cos m\tau + x_2(t)\sin m\tau.$$

Donc, si l'on pose

$$y_1 = U(x_1), \quad y_2 = U(x_2)$$

(y_1, y_2 sont des éléments de $\tilde{H}_n$), alors

$$U(x^\tau; s-\tau) = y_1(s-\tau)\cos m\tau + y_2(s-\tau)\sin m\tau.$$

Or, $y_1(s-\tau)$ et $y_2(s-\tau)$ sont des polynômes trigonométriques par rapport à τ, d'ordre $\leqslant n$, donc orthogonaux aux fonctions $\cos m\tau$

et $\sin m\tau$. Et par suite

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x^\tau;\, s-\tau)\,d\tau = 0.$$

Il est évident que le second membre de (7) est nul aussi.

L'identité (7) a donc été démontrée dans ce cas, mais comme ses deux membres sont additifs par rapport à x, elle est valable pour un polynôme trigonométrique quelconque.

Considérons maintenant le premier membre de l'identité (7) et prouvons que pour s fixe c'est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $\tilde{C}$.

En effet, désignons le premier membre de (7) par $f_s(x)$ et vérifions que la fonctionnelle f_s a un sens quel que soit l'élément $x \in \tilde{C}$. Montrons pour cela que l'intégrant est une fonction continue de τ. On a

$$\begin{aligned}
&|U(x^{\tau+h};\, s-\tau-h) - U(x^\tau;\, s-\tau)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |U(x^{\tau+h};\, s-\tau-h) - U(x^\tau;\, s-\tau-h)| + \\
&\qquad + |U(x^\tau;\, s-\tau-h) - U(x^\tau;\, s-\tau)| \leqslant \| U(x^{\tau+h} - x^\tau) \| + \\
&\qquad + |U(x^\tau;\, s-\tau-h) - U(x^\tau;\, s-\tau)| \leqslant \| U \| \, \| x^{\tau+h} - x^\tau \| + \\
&\qquad\qquad + |U(x^\tau;\, s-\tau-h) - U(x^\tau;\, s-\tau)|.
\end{aligned}$$

Pour h assez petit le premier terme est aussi petit que l'on veut en vertu de (6), le second aussi en vertu de la continuité de la fonction $U(x^\tau,\, t)$.

La fonctionnelle f_s est manifestement additive, et comme

$$|f_s(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U(x^\tau;\, s-\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| U \| \, \| x^\tau \| \,d\tau = \| U \| \, \| x \|,$$

alors f_s est une fonctionnelle bornée.

Si, enfin, l'on désigne $g_s(x) = S_n(x;\, s)$, l'identité (7) exprimera la coïncidence des fonctionnelles f_s et g_s. Mais on a vu précédemment que ces fonctionnelles étaient confondues sur l'ensemble dense dans $\tilde{C}$ de tous les polynômes trigonométriques. Comme f_s et g_s sont des fonctionnelles continues, il en résulte qu'elles sont confondues sur l'espace $\tilde{C}$ tout entier, c.q.f.d.

THÉORÈME 2. *L'opérateur polynomial trigonométrique d'ordre n, possédant la plus petite norme est l'opérateur S_n, c'est-à-dire on a toujours*

$$\| U \| \geqslant \| S_n \| > A \ln n.$$

En effet, l'identité (7) donne

$$\| S_n(x) \| = \max_s | S_n(x\,;\, s) | \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_s | U(x^\tau\,;\, s-\tau) | \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \| U \| \, \| x \|,$$

d'où $\| S_n \| \leqslant \| U \|$.

THÉORÈME 3 (Lozinski-Harchiladzé). *Si $\{U_n\}$ est une suite d'opérateurs polynomiaux trigonométriques, U_n étant d'ordre n, leurs normes tendent vers l'infini. En particulier, une telle suite ne peut être convergente sur l'espace $\tilde{\mathbf{C}}$ tout entier.*

La première proposition découle immédiatement du théorème précédent. On déduit la seconde à partir du théorème 1.1.

Signalons le fait important suivant, cas particulier du théorème énoncé. Quels que soient les nœuds d'interpolation, il existe une fonction continue 2π-périodique, telle que sa suite de polynômes d'interpolation ne converge pas uniformément (théorème de Faber).

Notons sans le démontrer que les propositions des théorèmes 2 et 3 sont valables dans l'espace $\mathbf{L}^1$.

Dans l'espace $\mathbf{C}\,[0, 1]$, on peut, de façon analogue, considérer des opérateurs polynomiaux (algébriques), c'est-à-dire des opérateurs linéaires continus de $\mathbf{C}\,[0, 1]$ dans le sous-espace $\mathbf{H}_n$ des polynômes algébriques de degré $\leqslant n$, laissant invariants les éléments de $\mathbf{H}_n$. Cependant, il est plus commode d'étudier le cas algébrique en le ramenant au cas trigonométrique (cf. Natanson [I] page 672).

Considérons un opérateur polynomial (algébrique) U_n associant à une fonction continue la somme des n premiers termes de la série de Fourier de cette fonction suivant un système de polynômes orthogonaux donné. En appliquant à la suite des opérateurs l'analogue du théorème 3 pour le cas algébrique, on arrive au résultat suivant (Nicolaev [1]) : *quel que soit le système orthogonal de polynômes considéré, il existe une fonction continue dont la série de Fourier suivant ce système ne converge pas uniformément.*

Les théorèmes 2 et 3 ont été établis par S. Lozinski et F. Harchiladzé (cf. Lozinski [1], [2]). S. Lozinski a approfondi ces idées.

2.4. Etudions le problème de la représentation des fonctions par des intégrales singulières.

Soit donnée une suite $\{K_n(s, t)\}$ de fonctions sommables sur le carré $[a, b\,;\, a, b]$. On dit qu'une fonction $x(s)$ est représentable par une intégrale singulière si la suite

$$x_n(s) = \int_a^b K_n(s, t)\, x(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

converge vers $x(s)$ dans un sens quelconque.

Les intégrales singulières se rencontrent systématiquement dans divers problèmes d'analyse. Exemple: les intégrales de Dirichlet, Fejér, Vallée Poussin, Hilbert, etc.

Bornons-nous aux noyaux continus et démontrons le théorème de convergence en moyenne des intégrales singulières dans l'espace $\mathbf{L}^1(a, b)$.

THÉORÈME 4. *Pour que la suite* (8) *soit convergente vers x dans l'espace* $\mathbf{L}^1$, *quelle que soit la fonction sommable x, il est nécessaire et suffisant que*

$$1) \qquad \int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t)\, x(t)\, dt - x(s) \right| ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{9}$$

pour tout x d'un ensemble D complet dans l'espace $\mathbf{L}^1$;

$$2) \qquad \int_a^b |K_n(s, t)|\, ds \leqslant M \quad (t \in [a, b]; \quad n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

En effet, si l'on désigne par U_n l'opérateur engendré dans l'espace $\mathbf{L}^1$ par le noyau $K_n(s, t)$:

$$y = U_n(x), \quad y(s) = \int_a^b K_n(s, t)\, x(t)\, dt,$$

la première condition signifie que $U_n(x) \to x$ pour $x \in D$, et la seconde, en vertu de V.2.5, que $\| U_n \| \leqslant M$. Donc, le résultat formulé est un cas particulier du théorème de Banach-Steinhaus (plus exactement de la remarque 2 suivant ce théorème) (cf. 1.2).

REMARQUE 1. Dans la partie suffisante du théorème on peut remplacer la condition (1) par deux plus simples. Notamment

$$\int_\alpha^\beta K_n(s, t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad (s \in]\alpha, \beta[\subset [a, b]), \tag{11}$$

$$\int_a^b |K_n(s, t)|\, dt \leqslant M \quad (s \in [a, b]; \; n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

On vérifie sans peine que dans ce cas, pour D, on peut prendre l'ensemble des fonctions caractéristiques de tous les intervalles contenus dans $[a, b]$.

En effet, si $\tilde{x}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors pour $s \in]\alpha, \beta[$

$$\tilde{x}_n(s) = \int_\alpha^\beta K_n(s, t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \tilde{x}(s);$$

si $s \notin [\alpha, \beta]$ et par exemple $a \leqslant s < \alpha$, alors

$$\tilde{x}_n(s) = \int_\alpha^\beta K_n(s, t)\,dt = \int_a^\beta K_n(s, t)\,dt - \int_a^\alpha K_n(s, t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 = $$
$$= 0 = \tilde{x}(s).$$

Donc, $\tilde{x}_n(s) \to \tilde{x}(s)$ pour tous les $s \neq \alpha$, β, c'est-à-dire presque partout. La condition (12) permet de passer à la limite sous le signe d'intégration dans $\int_a^b \left| \int_a^b K_n(s, t)\,\tilde{x}(t)\,dt - \tilde{x}(s) \right| ds$ et d'établir ainsi que cette limite est nulle.

Remarque 2. Si les noyaux $K_n(s, t)$ sont symétriques, la condition (12) est confondue avec la condition 2) du théorème, donc les conditions (11) et (12) sont par elles-mêmes nécessaires et suffisantes dans ce cas.

Si l'on traite les opérateurs U_n engendrés par les noyaux $K_n(s, t)$ comme des opérateurs dans l'espace $C[a, b]$, on obtient de façon analogue des conditions de convergence uniforme de la suite (8) vers une fonction continue $x(s)$.

Les intégrales singulières sont étudiées de manière plus approfondie dans Dunford et Schwartz [II] et dans l'article de I. Natanson [1].

2.5. Voyons en conclusion la sommation généralisée des séries (cf. Zygmund).

Soient

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{13}$$

une série numérique, $\{s_k\}$ la suite de ses sommes partielles. Considérons la matrice infinie

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nk} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{14}$$

et formons la somme

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} s_k \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

en supposant que toutes les séries du second membre sont convergentes.

On dit que la série (13) est sommée par la matrice (14) si la suite $\{\sigma_n\}$ admet une limite finie:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

appelée *somme généralisée* de (13).

Ainsi, par exemple, une *méthode de sommation de Cesáro* est caractérisée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

lorsque

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

Au lieu de la sommation généralisée des séries, on peut envisager la détermination de la limite généralisée d'une suite en associant à une suite numérique donnée $x = \{\xi_k\}$ la suite

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et étudier son comportement pour $n \to \infty$. Il est clair qu'on passe facilement d'un problème à l'autre. Mais, comme les suites sont plus commodes à étudier, nous opterons pour elles tout en conservant l'ancien terme de «méthode de sommation».

Il semble indiqué d'envisager uniquement des méthodes de sommation applicables à toute suite convergente au sens usuel du terme et donnant une limite ordinaire pour limite généralisée. Les méthodes de sommation possédant cette propriété sont dites *permanentes* ou *régulières*. Les conditions de permanence de la méthode de sommation, définie par la matrice (14), sont rassemblées dans le théorème suivant.

THÉORÈME 5 (Toeplitz). *Pour que la méthode de sommation définie par la matrice* (14) *soit permanente, il est nécessaire et suffisant que*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \dots)$.

DÉMONSTRATION. Considérons les fonctionnelles

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; \quad n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$\sigma(x) = \lim_{k\to\infty} \xi_k$$

dans l'espace c des suites convergentes.

Dans VI.2.2 on a vu que

$$\|\sigma_n\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

donc, la condition 3) exprime que les normes des fonctionnelles σ_n sont bornées.

Soient par ailleurs les suites

$$x_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \quad \text{et} \quad x_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

(l'unité occupe le rang k).

Comme

$$\sigma_n(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}, \quad \sigma_n(x_k) = \alpha_{nk} \quad (n, k = 1, 2, \ldots),$$

les conditions 1) et 2) peuvent être écrites sous la forme

$$\sigma_n(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \sigma(x_k), \quad \sigma_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \sigma(x_0).$$

L'ensemble des éléments $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ étant complet dans c, les conditions du théorème sont confondues avec celles du théorème de Banach-Steinhaus (compte tenu des remarques 1 et 2). Donc, les conditions 1) à 3) sont nécessaires et suffisantes pour que

$$\sigma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma(x),$$

or, cela signifie que la méthode de sommation est permanente.

La matrice correspondant à la méthode de Cesáro vérifie de toute évidence les conditions du théorème. D'où le résultat notoire de la permanence de la méthode des moyennes arithmétiques (Cesáro).

CHAPITRE VIII

TOPOLOGIE FAIBLE DANS UN ESPACE DE BANACH

Aux chapitres III et V nous avons eu affaire à la topologie faible. Dans ce chapitre on se propose d'en étudier les propriétés de manière plus approfondie. Au paragraphe 4, on traite un problème d'économie mathématique en se servant des propriétés de la topologie faible et du théorème de la forme générale des fonctionnelles linéaires continues dans l'espace des fonctions continues.

§ 1. Ensembles faiblement bornés

1.1. Nous commençons par formuler d'importants corollaires du théorème de Banach-Steinhaus pour la topologie faible et la topologie (*)-faible. Considérons d'abord les critères de convergence faible et de convergence (*)-faible des suites.

Soit une suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles linéaires continues, définies sur un B-espace X. Si pour tout $x \in \mathbf{X}$ existe la limite finie

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{1}$$

la fonctionnelle f est aussi linéaire et continue d'après le théorème VII.1.2 et de plus $f_n \to f\ (\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$.

Le théorème de Banach-Steinhaus nous conduit au critère suivant de convergence (*)-faible.

THÉORÈME 1. *Soit* X *un B-espace. Une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$f_n \to f\ (\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})) \tag{2}$$

est que

1) *la suite de normes* $\{\|f_n\|\}$ *soit bornée*;

2) *la relation* (1) *ait lieu pour tout* $x \in D$ *dense dans* X.

REMARQUE. Dans la condition 2) on peut simplement exiger que D soit fondamental dans X (cf. remarque 2 suivant le théorème de Banach-Steinhaus).

La norme n'est pas continue pour la convergence faible, c'est-à-dire (2) n'implique pas $\|f_n\| \to \|f\|$. On peut simplement affirmer

que

$$\| f \| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| f_n \|$$

(cf. théorème VII.1.2).

Considérons maintenant la convergence faible dans X. On notera que l'injection canonique π de l'espace normé X dans X^{**} est un isomorphisme linéaire de l'e.l.c. $(X, \sigma(X, X^*))$ sur l'e.l.c. $\pi(X)$ regardé comme un sous-espace de l'e.l.c. $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$: en effet, dans les deux espaces la convergence des suites généralisées d'éléments équivaut à la convergence pour toutes les $f \in X^*$.

Cette remarque simple permet souvent de ramener l'étude de la topologie faible dans X à celle de la topologie $(*)$-faible dans X^{**}. Par exemple, l'application π étant isométrique, la remarque suivant le théorème 1 nous dit que si $x_n \to x$ $(\sigma(X, X^*))$, alors $\| x \| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| x_n \|$. En se servant du théorème 1, par des raisonnements analogues on obtient le

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que dans l'espace normé* X *la suite* $x_n \to x$ $(\sigma(X, X^*))$ *est que*

1) $\sup_n \| x_n \| < \infty$;

2) $f(x_n) \to f(x)$ *pour l'ensemble des fonctionnelles* f, *dense (fondamental) dans l'espace* X^*.

1.2. Voyons maintenant les ensembles faiblement bornés. On dit qu'un ensemble E est *faiblement borné* dans un espace normé X si pour tout $f \in X^*$ on a $\sup \{ | f(x) | : x \in E \} < \infty$.

Un ensemble E est *$(*)$-faiblement borné* dans X^* si pour tout $x \in X$ on a $\sup \{ | f(x) | : f \in E \} < \infty$.

Il est évident qu'il y a équivalence entre l'ensemble E est faiblement borné dans X et l'ensemble E est borné dans l'e.l.c. $(X, \sigma(X, X^*))$, de même qu'entre l'ensemble E est $(*)$-faiblement borné dans X^* et l'ensemble E est borné dans l'e.l.c. $(X^*, \sigma(X^*, X))$.

THÉORÈME 3. X *étant un B-espace, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit* $(*)$-*faiblement borné dans* X^* *est qu'il soit borné en norme dans* X^*.

DÉMONSTRATION. Il nous faut simplement prouver que l'ensemble $(*)$-faiblement borné E est borné en norme. Supposons le contraire. On peut alors extraire de E une suite $\{f_n\}$ telle que $\| f_n \| \geqslant n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. Comme

$$\left| \frac{1}{n} f_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sup \{ | f(x) | : f \in E \} \to 0 \quad (x \in X),$$

alors $(1/n) f_n \to 0$ $(\sigma(X^*, X))$, ce qui est incompatible avec la condition 1) du théorème 1, puisque $\| (1/n) f_n \| \geqslant n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Tout comme on a déduit le théorème 3 du théorème 1, on déduit du théorème 2 le

THÉORÈME 4. *Pour qu'un ensemble E soit faiblement borné dans un espace normé* X, *il faut et il suffit qu'il soit borné en norme dans* X.

Au chapitre III nous avons promis de démontrer ce théorème (cf. théorème III.3.3), mais ce n'est que maintenant que nous avons été en mesure de le faire grâce au théorème de Banach-Steinhaus. Comme tout ensemble faiblement compact est faiblement borné, il résulte du théorème 4 que tout ensemble faiblement compact est borné en norme.

On rappelle également que la fermeture faible et la fermeture en norme sont confondues pour les parties convexes d'un espace normé X (cf. théorème III.3.2). On montrera plus bas que malgré cette propriété, la topologie faible et la topologie de la norme sont différentes dans un B-espace de dimension infinie.

Le raisonnement du début de 1.1 montre que si X est un B-espace, l'espace X^* est $(*)$-faiblement séquentiellement complet, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$ existe la limite de la suite de nombres $\{f_n(x)\}$ $(f_n \in X^*)$, alors existe $f \in X^*$, $f_n \to f$ $(\sigma(X^*, X))$.

L'espace X ne possède pas toujours cette propriété. Un B-espace X est dit *faiblement séquentiellement complet* si l'e.l.c. $(X, \sigma(X, X^*))$ est séquentiellement complet, c'est-à-dire on a la propriété suivante : si pour tout $f \in X^*$ existe la limite de la suite de nombres $\{f(x_n)\}$ $(x_n \in X)$, alors il existe $x \in X$ tel que $x_n \to x$ $(\sigma(X, X^*))$. La complétude $(*)$-faible séquentielle de X^* entraîne la complétude faible séquentielle du B-espace réflexif X. Au chapitre X, nous verrons que l'espace c_0 n'est pas faiblement séquentiellement complet et que l'espace non réflexif $L^1[0, 1]$ l'est (cf. théorème X.4.9). La différence fondamentale entre topologie forte et topologie faible est exprimée par le

THÉORÈME 5. *Pour que dans un espace normé* X *la topologie faible et la topologie de la norme soient confondues il est nécessaire et suffisant que* X *soit de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. La condition suffisante découle du théorème IV.1.2. Prouvons la condition nécessaire. De III.3.3, il résulte qu'une boule de l'espace dual B_{X^*} est dans ce cas contenue dans l'enveloppe absolument convexe d'un nombre fini de fonctionnelles, d'où il suit que X^*, donc X, est de dimension finie.

§ 2. Théorie d'Eberlein-Smulian

Si E est un ensemble dans un espace topologique X, il est susceptible de posséder trois propriétés, proches de celle de compacité (cf. I.2.7). Rappelons-les.

1) E est relativement compact, c'est-à-dire l'adhérence $\overline{E}$ est compacte.

2) E est relativement séquentiellement compact, c'est-à-dire toute suite de E contient une suite partielle convergeant vers un point de X;

3) E est relativement dénombrablement compact, c'est-à-dire toute suite de E admet un point limite dans X.

Dans le cas général on a les implications suivantes 1) $\Rightarrow$ 3) et 2) $\Rightarrow$ 3). Dans I.5.1 nous avons prouvé que les propriétés 1) à 3) étaient équivalentes si X est un espace métrique. Nous établissons ici un fait analogue si X est un B-espace muni de la topologie faible. On remarquera tout de suite qu'un ensemble faiblement compact n'est pas nécessairement métrisable. Considérons en effet un B-espace X réflexif non séparable (par exemple un espace hilbertien muni d'une base non dénombrable). Sa boule B_X est faiblement compacte, mais si elle était métrisable pour la topologie faible, elle serait faiblement séparable d'après le corollaire 1 du théorème I.5.2, et fortement séparable en raison de sa convexité. X serait donc séparable contrairement à l'hypothèse.

L'équivalence des propriétés 1) à 3) pour la topologie faible a été prouvée au terme de plusieurs années d'efforts de nombreux mathématiciens. La principale contribution ayant été faite par Smulian et Eberlein (dans les années 40), il nous a semblé naturel d'appeler cet important chapitre de la théorie des B-espaces, théorie d'Eberlein-Smulian *). Notre exposé suit R. Whitley et H. Cohen.

LEMME 1. *Soient* X *un B-espace,* Y *un sous-espace de dimension finie de* X**. *Il existe alors un ensemble fini* $\{f_m\}_{m=1}^n$, $\|f_m\| = 1$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ *d'éléments de* X*, *tel que pour tout* $F \in$ Y *l'on ait*

$$\max \{|F(f_m)| : 1 \leqslant m \leqslant n\} \geqslant 1/2 \, \|F\|. \tag{1}$$

DÉMONSTRATION. La sphère unité de Y étant compacte, elle admet un 1/4-réseau fini $\{F_m\}_{m=1}^n$ ($\|F_m\| = 1$, $m = 1, 2, \ldots, n$). Choisissons des éléments $f_m \in$ X*, $\|f_m\| = 1$ dans X*, tels que $|F_m(f_m)| > 3/4$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. Prenons $F \in$ Y et prouvons (1). On peut admettre que $F \neq 0$. Pour la fonctionnelle $F/\|F\|$ il existe alors F_m tel que $\|F/\|F\| - F_m\| < 1/4$. On a

$$\begin{aligned} |F(f_m)| &\geqslant \|F\| \, |F_m(f_m)| - \|F\| \, |F_m(f_m) - (F/\|F\|)(f_m)| \geqslant \\ &\geqslant \|F\| \, |F_m(f_m)| - \|F\| \, \|F/\|F\| - \\ &\quad - F_m\| > 3/4 \, \|F\| - 1/4 \, \|F\| = 1/2 \, \|F\|, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (1).

LEMME 2. *Soit* E *un ensemble relativement faiblement dénombrablement compact dans un B-espace* X. *Désignons par* E_1 *la* σ (X**, X)-

*) Voir historique dans Dunford et Schwartz [I].

adhérence de l'ensemble $\pi(E)$, $\pi : X \to X^{**}$ *étant l'injection canonique. Alors* E_1 *est* $\sigma(X^{**}, X^*)$*-compact et pour tout point* $F \in E_1$ *il existe une suite* $\{x_n\} \subset E$ *telle que* $\pi(x) = F$ *pour tout point limite faible* $x \in X$ *de cette suite.*

Remarque. Il est évident que la suite $\{x_n\}$ du lemme 2 possède un point limite unique.

Démonstration. L'ensemble E étant relativement dénombrablement compact, pour tout $f \in X^*$ l'ensemble $f(E)$ est un ensemble relativement compact de scalaires. Il s'ensuit que E est faiblement borné et par suite fortement borné (théorème 1.4). Donc, l'ensemble E_1 est $\sigma(X^{**}, X^*)$-compact d'après le théorème d'Alaoglu-Bourbaki.

Soit $F \in E_1$. Construisons la suite cherchée $\{x_n\}$ par récurrence. Choisissons $f_1 \in X^*$, $\|f_1\| = 1$. Comme $F \in E_1$, il existe $x_1 \in E$, tel que

$$|(F - \pi(x_1))(f_1)| < 1.$$

L'espace Y_2 engendré par les fonctionnelles F et $F - \pi(x_1)$ est de dimension finie. D'après le lemme 1, il existe des vecteurs $f_2, \ldots, f_{k(2)}$ de norme 1 dans X^*, tels que

$$\max\{|G(f_m)| : 2 \leqslant m \leqslant k(2)\} \geqslant 1/2\, \|G\|$$

pour tout $G \in Y_2$. En utilisant encore le fait que $F \in E_1$, nous pouvons trouver $x_2 \in E$, tel que

$$\max\{|(F - \pi(x_2))(f_m)| : 1 \leqslant m \leqslant k(2)\} < 1/2.$$

En appliquant le lemme 1 à $Y_3 = \mathcal{L}(F - \pi(x_2), F - \pi(x_1), F)$, on trouve des points $f_{k(2)+1}, \ldots, f_{k(3)}$ de norme 1 dans X^*, tels que

$$\max\{|G(f_m)| : k(2) < m \leqslant k(3)\} \geqslant 1/2\, \|G\|$$

pour tout $G \in Y_3$.

Comme $F \in E_1$, on trouve $x_3 \in E$ tel que

$$\max\{|(F - \pi(x_3))(f_m)| : 1 \leqslant m \leqslant k(3)\} < 1/3.$$

En poursuivant ce processus, on obtient la suite $\{x_n\} \subset E$ vérifiant les relations

$$\max\{|G(f_m)| : k(n-1) < m \leqslant k(n)\} \geqslant 1/2\, \|G\| \tag{2}$$

pour tout $G \in Y_n = \mathcal{L}(F - \pi(x_n), F - \pi(x_{n-1}), \ldots, F)$, où $f_m \in X^*$, $\|f_m\| = 1$ et

$$\max\{|(F - \pi(x_n))(f_m)| : 1 \leqslant m \leqslant k(n)\} < 1/n. \tag{3}$$

Soit $x \in X$ point limite de la suite $\{x_n\}$ pour la topologie faible (de tels points existent puisque E est relativement faiblement dénombrablement compact). L'enveloppe linéaire $\overline{\mathcal{L}}(\{x_n\})$ fermée

(pour la norme) étant faiblement fermée, $x \in \overline{\mathcal{L}}(\{x_n\})$. D'où

$$F - \pi(x) \in F - \overline{\mathcal{L}}(\{\pi(x_n)\}) \subset \overline{\mathcal{L}}(\{F, F - \pi(x_1), \ldots \\ \ldots, F - \pi(x_n), \ldots\}),$$

où l'adhérence est considérée par rapport à la norme dans X^{**}.

D'après (2), pour tout $G \in \mathcal{L}(\{F, F - \pi(x_1), \ldots, F - \pi(x_n), \ldots\})$ on a

$$\sup_m |G(f_m)| \geqslant 1/2 \, \|G\|.$$

Donc, ceci est également vrai pour tout G appartenant à l'adhérence de ce sous-espace, et notamment pour $F - \pi(x)$. D'après (3), pour m fixe on a

$$|(F - \pi(x_n))(f_m)| < 1/p \text{ pour } n \geqslant k(p) \geqslant m.$$

Alors

$$|(F - \pi(x))(f_m)| \leqslant |(F - \pi(x_n))(f_m)| + |f_m(x_n - x)| \leqslant \\ \leqslant 1/p + |f_m(x_n - x)|,$$

pour $n \geqslant k(p) \geqslant m$. Comme x est un point limite faible pour $\{x_n\}$, pour tout $N > m$ il existe un n tel que

$$|f_m(x_n - x)| < 1/N \quad \text{et} \quad n \geqslant k(N) \geqslant m.$$

Pour un tel x_n, on a (puisque $k(N) \geqslant m$, on peut convenir plus haut que $p = N$)

$$|(F - \pi(x_n))(f_m)| + |f_m(x_n - x)| < 2/N.$$

Donc, N étant arbitraire, on obtient $(F - \pi(x))(f_m) = 0$ pour tous les $m \in \mathbb{N}$. Comme

$$1/2 \, \|F - \pi(x)\| \leqslant \sup_m |(F - \pi(x))(f_m)| = 0,$$

on a $F = \pi(x)$, c.q.f.d.

THÉORÈME 1. *Soit E un ensemble dans un B-espace* X. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *E est relativement faiblement compact*;
2) *E est relativement faiblement séquentiellement compact*;
3) *E est relativement faiblement dénombrablement compact.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Prenons une suite $\{x_n\}$ d'éléments de E et désignons par Y l'enveloppe linéaire fermée de l'ensemble $\{x_n\}$. D'après le corollaire 3 du théorème III.3.2, l'ensemble $E \cap$ Y est relativement compact pour la topologie faible de l'espace séparable Y. Le corollaire du lemme V.7.1 nous dit que l'adhérence faible de l'ensemble $E \cap$ Y est faiblement métrisable. Donc, d'après le

théorème I.5.2, il existe une suite partielle $x_{n_k} \to x$ (σ (Y, Y*)) et par conséquent $x_{n_k} \to x$ (σ (X, X*)).

2) $\Rightarrow$ 3) est évident.

3) $\Rightarrow$ 1). Désignons par E_1 la σ (X**, X*)-adhérence de l'ensemble π (E) et par E_2 la σ (X, X*)-adhérence de l'ensemble E. Le lemme 2 nous dit que E_1 est contenu dans π (X) et est σ (X**, X*)-compact. π étant un homéomorphisme pour les topologies faible et (*)-faible (cf. 1.1), π (E_2) = E_1, donc E_2 est faiblement compact.

Remarque. Si E est relativement faiblement dénombrablement compact, pour tout x appartenant à l'adhérence faible de E il existe une suite $\{x_n\} \subset E$ telle que $x_n \to x$ (σ (X, X*)).

En effet, d'après le lemme 2 il existe une suite $\{x_n\} \subset E$ admettant x pour unique limite. D'après le théorème 1, l'ensemble E_2 est faiblement compact. Or, une suite possédant un point limite unique dans un espace compact converge vers ce point (corollaire du lemme I.2.2). Donc $x_n \to x$ (σ (X, X*)).

Corollaire. *Soit E un ensemble dans un B-espace* X. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *E est faiblement compact*;

2) *E est faiblement séquentiellement compact*;

3) *E est faiblement dénombrablement compact.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) en vertu du théorème 1, quant à 2) $\Rightarrow$ 3) elle est évidente.

3) $\Rightarrow$ 1). Une suite convergente possédant un point limite unique (sa limite précisément), E est faiblement fermé en vertu de la remarque qui suit le théorème 1. Le théorème 1 nous dit maintenant que E est faiblement compact.

§ 3. Convergence faible dans des espaces concrets

Dans ce paragraphe nous allons voir ce que signifie la convergence faible d'une suite d'éléments dans les B-espaces $\mathbf{L}^p$ (T, Σ, μ) et C (K).

3.1. Prouvons d'abord le lemme.

Lemme 1. *Supposons que $1 < p \leqslant 2$. Il existe une constante strictement positive c telle que pour tous les u réels on ait*

$$|1 + u|^p \geqslant 1 + pu + c\theta(u),$$

où

$$\theta(u) = \begin{cases} |u|^2, & |u| < 1. \\ |u|^p, & |u| \geqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Soit la fonction

$$\chi(u) = |1 + u|^p - 1 - pu$$

et

$$\psi(u) = \frac{\chi(u)}{\theta(u)}.$$

Comme

$$\lim_{u\to 0} \psi(u) = \lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^p - 1 - pu}{u^2} = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2},$$

$$\lim_{u\to\infty} \psi(u) = \lim_{u\to\infty} \frac{(1+u)^p - 1 - pu}{|u|^p} = 1,$$

il existe $\delta > 0$, $\Delta > 0$ et $c > 0$ tels que

$$\psi(u) \geqslant c \quad \text{pour} \quad |u| \leqslant \delta \quad \text{ou} \quad |u| \geqslant \Delta. \tag{3}$$

On a par ailleurs

$$\chi'(u) = p\,|1+u|^{p-1}\operatorname{sign}(1+u) - p, \quad \chi''(u) = p(p-1)\,|1+u|^{p-2}$$
$$(u \neq -1).$$

Comme $\chi''(u) > 0$ et $\chi'(0) = 0$, la fonction $\chi(u)$ admet un minimum unique pour $u = 0$. Or $\chi(0) = 0$, donc $\chi(u) > 0$ pour $\delta \leqslant |u| \leqslant \Delta$ et par suite $\psi(u) > 0$ pour les u indiqués. En réduisant au besoin le nombre c trouvé plus haut, on peut admettre que

$$\psi(u) \geqslant c \quad (\delta \leqslant |u| \leqslant \Delta).$$

Ceci et (3) nous donnent ce que nous voulions.

3.2. Dans certains espaces, la convergence faible de la suite $\{x_n\}$ vers x et la convergence de la suite des normes $\|x_n\| \to \|x\|$ entraînent la convergence en norme de la suite $\{x_n\}$ vers x.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une suite $\{x_n\}$ converge en norme vers x dans l'espace réel $\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$ $(1 < p < \infty)$, il est nécessaire et suffisant que*

1) $x_n \to x$ *faiblement*;
2) $\|x_n\| \to \|x\|$.

DÉMONSTRATION. Les conditions 1) et 2) sont évidemment nécessaires. Prouvons qu'elles sont suffisantes. On rappelle que du fait que $(\mathbf{L}^p)^* = \mathbf{L}^q$ $(1/p + 1/q = 1)$, la convergence faible $x_n \to x$ signifie que pour tout $y \in \mathbf{L}^q$

$$\int x_n(t)\,y(t)\,d\mu \to \int x(t)\,y(t)\,d\mu.$$

Posons $A_0 = \{t \in T : x(t) = 0\}$. Admettons que $1 < p \leqslant 2$ et utilisons l'inégalité (1) du lemme 1. En remplaçant dans cette inégalité u par $\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)}$ pour $t \notin A_0$, on obtient

$$\left|\frac{x_n(t)}{x(t)}\right|^p \geqslant 1 + p\,\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} + c\theta\left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)}\right).$$

Multiplions l'inégalité obtenue par $|x(t)|^p$ et intégrons. Il vient

$$\int_T |x_n(t)|^p d\mu \geqslant \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu + \int_T |x(t)|^p d\mu +$$
$$+ p \int_T |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) (x_n(t) - x(t)) d\mu +$$
$$+ c \int_{T \setminus A_0} |x(t)^p \theta \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu. \quad (4)$$

Désignons par $\tilde{y}$ l'élément

$$\tilde{y}(t) = |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t)$$

de $\mathbf{L}^q$ et par $\tilde{f}$ la fonctionnelle linéaire correspondante sur $\mathbf{L}^p$, et mettons l'inégalité (4) sous la forme

$$c \int_{T \setminus A_0} |x(t)|^p \theta \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu + \int_{A_0} |x_n(t)|^p d\mu \leqslant$$
$$\leqslant [\| x_n \|^p - \| x \|^p + p(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n))],$$

d'où l'on voit, compte tenu des conditions du théorème, que l'expression du second membre, et donc les deux intégrales du premier membre de la dernière inégalité tendent vers zéro.

Si $A'_n = \{t \in T \setminus A_0 : \ |x_n(t) - x(t)| \geqslant |x(t)|\}$, $A''_n = \{t \in T \setminus A_0 : |x_n(t) - x(t)| < |x(t)|\}$, alors d'après la définition de la fonction θ (cf. (2)) on peut écrire

$$\int_{T \setminus A_0} |x(t)|^p \theta \left(\frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)} \right) d\mu = \int_{A'_n} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu +$$
$$+ \int_{A''_n} |x(t)|^{p-2} |x_n(t) - x(t)|^2 d\mu. \quad (5)$$

On a vu que le premier membre de (5) tend vers zéro pour $n \to \infty$. Donc, les deux intégrales du second membre de (5) tendent vers zéro.

D'autre part, vu que $|x_n(t) - x(t)| < |x(t)|$ sur l'ensemble A''_n, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_{A''_n} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \leqslant \int_{A''_n} |x(t)|^{p-1} |x_n(t) - x(t)| d\mu =$$
$$= \int_{A''_n} \left| |x(t)|^{p/2-1} |x_n(t) - x(t)| \right| |x(t)|^{p/2} d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_{A''_n} |x(t)|^{p-2} |x_n(t) - x(t)|^2 d\mu \right]^{1/2} \left[\int_{A''_n} |x(t)|^p d\mu \right]^{1/2},$$

c'est-à-dire

$$\int_{A_n''} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

puisque le premier facteur tend vers zéro et le second est borné. Donc

$$\int_{T\setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu = \int_{A_n'} + \int_{A_n''} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a en définitive

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu = \int_{T\setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu + \int_{A_0} |x_n(t)|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui prouve la convergence de la suite $\{x_n\}$ vers x.

Si $p > 2$, au lieu de l'inégalité (1) il faudra se servir de l'inégalité

$$|1 + u|^p \geqslant 1 + pu + c\,|u|^p, \tag{1'}$$

dont la démonstration peut être calquée sur celle de (1). En portant $u = \frac{x_n(t) - x(t)}{x(t)}$ dans (1') pour $t \notin A_0$, en multipliant par $|x(t)|^p$ et en intégrant on obtient

$$\int_T |x_n(t)|^p \, d\mu \geqslant \int_{A_0} |x_n(t)|^p \, d\mu + \int_T |x(t)|^p \, d\mu +$$
$$+ p \int_T |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t) \, (x_n(t) - x(t)) \, d\mu + c \int_{T\setminus A_0} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu.$$

Si $\tilde{x}$ et $\tilde{f}$ gardent leur signification précédente et si l'on désigne $c' = 1/\min(1, c)$, on obtient

$$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu \leqslant c' \, [\|x_n\|^p - \|x\|^p + p\,(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_n))],$$

d'où il suit que $x_n \to x$ en norme dans L^p.

3.3. Etudions la signification de la convergence faible dans $L^p(T, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

THÉORÈME 2. *Pour qu'une suite $\{x_n\}$ soit faiblement convergente vers x dans l'espace $L^p(T, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, il est nécessaire et suffisant que*

1) $\sup_n \|x_n\| < \infty$;

2) $\int_A x_n(t) \, d\mu \to \int_A x(t) \, d\mu, \ \forall A \in \Sigma(\mu)$.

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\{\chi_A : A \in \Sigma(\mu)\}$ étant fondamental dans $\mathbf{L}^p$ (cf. IV.3.4), le théorème 2 est un cas particulier du théorème 1.2.

On voit de la démonstration que la condition 2) n'est pas vérifiée pour tous les $A \in \Sigma(\mu)$ mais pour un ensemble de parties dont les fonctions caractéristiques forment un ensemble fondamental dans $\mathbf{L}^p$. En particulier, dans $\mathbf{L}^p(a, b)$ il suffit de considérer l'ensemble des parties $A = [a, s]$, où $a \leqslant s \leqslant b$, et dans $\mathbf{l}^p$, l'ensemble de toutes les parties A composées d'un point, autrement dit la condition 2) se transforme alors en convergence en coordonnées.

3.4. Considérons maintenant la convergence faible dans $\mathbf{C}(K)$.

THÉORÈME 3. *Pour qu'une suite $\{x_n\}$ soit faiblement convergente vers x_0 dans l'espace $\mathbf{C}(K)$, il est nécessaire et suffisant que*

1) $|x_n(t)| \leqslant M$ *pour tous les* $t \in K$ $(n \in \mathbb{N})$;

2) $x_n(t) \to x_0(t)$ *pour tout* $t \in K$.

DÉMONSTRATION. Il est évident que les *conditions* 1) et 2) sont *nécessaires*. En effet, d'après le théorème 1.2 $\sup \|x_n\| = M < \infty$, donc $|x_n(t)| \leqslant M$.

On prouve que 2) est nécessaire de la manière suivante: pour $t \in K$ fixe considérons la fonctionnelle f_t

$$f_t(x) = x(t)$$

dans l'espace $\mathbf{C}(K)$. La convergence faible $x_n \to x_0$ entraîne

$$f_t(x_n) \to f_t(x_0),$$

ce qui n'est autre que la condition 2).

Condition suffisante. Nous utilisons le théorème VI.3.1 relatif à la construction de l'espace $\mathbf{C}(K)^*$. D'après ce théorème il faut prouver que pour toute fonction $\varphi \in \mathbf{rca}(K)$ on a

$$\int_K x_n(t)\, d\varphi \to \int_K x_0(t)\, d\varphi. \tag{6}$$

Vérifions que la relation a bien lieu.

On a la majoration

$$\left| \int_K x_n(t)\, d\varphi - \int_K x_0(t)\, d\varphi \right| \leqslant \int_K |x_n(t) - x_0(t)|\, d|\varphi|, \tag{7}$$

où $|\varphi|$ est la variation totale de φ, mesure sur K. Cette mesure étant finie, la fonction identiquement égale à M est sommable relativement à cette mesure. Le théorème de Lebesgue nous dit que le second membre de (7) tend vers zéro, d'où l'on déduit (6).

Les théorèmes III.3.2 et 3 entraînent un intéressant

COROLLAIRE. *Supposons qu'une suite* $\{x_n(t)\}$ *de fonctions continues soit bornée et converge en chaque point d'un compact* K *vers une fonction continue* $x_0(t)$. *Il existe alors des combinaisons convexes* $y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k(t)$ *telles que la suite* $\{y_n(t)\}$ *converge uniformément vers* $x_0(t)$.

3.5. Nous avons montré plus haut (cf. théorème 1.5) que si la topologie faible est confondue avec la topologie de la norme, alors le B-espace est de dimension finie. Nous allons exhiber un exemple d'espace de dimension infinie dans lequel la convergence faible d'une suite entraîne la convergence forte. Ceci montre que l'étude des suites est insuffisante pour l'étude de la topologie faible.

THÉORÈME 4 (Schur). *Pour les suites la convergence faible dans l'espace* l^1 *est confondue avec la convergence en norme.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $x_n \to x_0$ faiblement. En remplaçant x_n par $x_n - x_0$ on peut admettre que $x_n \to 0$ faiblement. Il faut alors prouver que $\| x_n \| \to 0$. Supposons le contraire. Admettons qu'il existe une suite partielle $\{x_{n_m}\}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \| x_{n_m} \| = l > 0. \tag{8}$$

La convergence faible n'est pas violée par un passage aux suites partielles; en remplaçant au besoin x_{n_m} par $\frac{x_{n_m}}{\| x_{n_m} \|}$ on obtient encore une suite convergeant faiblement vers zéro et dont les normes de tous les éléments sont égales à l'unité.

On peut donc admettre que la suite donnée $\{x_n\}$ satisfait aux conditions suivantes:

$$x_n \to 0 \quad \text{faiblement dans } l^1 \tag{9}$$

et

$$\| x_n \| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Supposons que $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots)$. Soient les fonctionnelles f_k:

$$f_k(x) = \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

D'après (9) on doit avoir $f_k(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire

$$\xi_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Posons maintenant $n_1 = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_1)}| = \| x_{n_1} \| = 1.$$

Il existe donc un $p_1 > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p_1} |\xi_k^{(n_1)}| > 3/4.$$

Supposons qu'on ait choisi des entiers $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_j$ et $0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_j$, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| < 1/4 \quad (s = 1, 2, \ldots, j) \tag{12}$$

et.

$$\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| > 3/4 \quad (s = 1, 2, \ldots, j). \tag{13}$$

D'après (11) il existe un $n_{j+1} > n_j$, tel que

$$\sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| < 1/4.$$

Cette inégalité et (10) nous donnent

$$\sum_{k=p_j+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n_{j+1})}| - \sum_{k=1}^{p_j} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > 3/4,$$

et par suite on peut exhiber un $p_{j+1} > p_j$, tel que

$$\sum_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} |\xi_k^{(n_{j+1})}| > 3/4.$$

Le raisonnement effectué nous montre qu'il existe deux suites $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ et $0 = p_0 < p_1 < \ldots$ d'entiers, telles que (12) et (13) sont vérifiées pour chaque $s = 1, 2, \ldots$

Posons maintenant

$$\eta_k = \operatorname{sign} \xi_k^{(n_s)} \quad (p_{s-1} < k \leqslant p_s; \quad k, s = 1, 2, \ldots).$$

La suite $\{\eta_k\} \in l^\infty$ donc dans l'espace l^1 on peut envisager la fonctionnelle linéaire f_0:

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k \quad (x = \{\xi_k\}).$$

Minorons la quantité $f_0(x_{n_s})$. Comme $|\eta_k| \leqslant 1$, on obtient

$$|f_0(x_{n_s})| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k^{(n_s)}\right| \geqslant \left|\sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} \eta_k \xi_k^{(n_s)}\right| -$$

$$- \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\eta_k \xi_k^{(n_s)}| \geqslant \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| -$$

$$- \sum_{k=1}^{p_{s-1}} |\xi_k^{(n_s)}| - \sum_{k=p_s+1}^{\infty} |\xi_k^{(n_s)}| = 2 \sum_{k=p_{s-1}+1}^{p_s} |\xi_k^{(n_s)}| - \|x_{n_s}\|.$$

Donc $f_0(x_{n_s}) > 1/2$ en vertu de (10) et (13), ce qui contredit (9).

3.6. Considérons maintenant la convergence faible dans un espace hilbertien **H**.

Comme chaque fonctionnelle linéaire f dans **H** est de la forme

$$f(x) = (x, y) \quad (x \in \mathbf{H})$$

(cf. V.3.2) la convergence faible $x_n \to x_0$ signifie que pour tout $y \in \mathbf{H}$

$$(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y).$$

Le fait (prouvé plus haut pour l'espace $\mathbf{L}^p$) que la convergence faible et la convergence des normes entraînent la convergence en norme s'établit très simplement pour un espace hilbertien. En effet, si $x_n \to x_0$ faiblement et de plus $\|x_n\| \to \|x_0\|$, alors

$$\|x_n - x_0\|^2 = (x_n - x_0, x_n - x_0) =$$
$$= (x_n, x_n) + (x_0, x_0) - (x_n, x_0) - \overline{(x_n, x_0)}.$$

Or

$$(x_n, x_0) \to (x_0, x_0),$$

donc

$$\|x_n - x_0\| \to 0.$$

Pour le contenu de ce paragraphe voir essentiellement Banach. La faible convergence dans $\mathbf{L}^2$ a été étudiée par Hilbert. Le théorème de faible convergence dans l'espace **C** $[a, b]$ figure dans Riesz [2].

§ 4. Un problème de déplacement de la masse et l'espace normé engendré par lui

4.1. L'analyse de quelques problèmes d'organisation et de planification de la production a amené Kantorovitch [5] à étudier une importante classe de problèmes d'extrémums de dimension finie, auxquels l'application des méthodes de l'analyse mathématique classique a donné peu de résultats. Ces recherches ont abouti finale-

ment à l'apparition d'une nouvelle discipline mathématique, appelée programmation linéaire.

Le déplacement d'une masse est un problème directement lié au problème élémentaire suivant de programmation linéaire, qui est largement utilisé dans la planification des transports ferroviaires, routiers, aériens, maritimes et fluviaux.

Problème de transport. Les composantes du vecteur

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \tag{1}$$

(plus exactement leurs modules) caractérisent les volumes de production (pour $\varphi_k \leqslant 0$) ou de consommation (pour $\varphi_k > 0$) d'un bien homogène dans m origines $k \in K = \{1, 2, \ldots, m\}$. On suppose que le volume total de consommation est égal au volume total de production, c'est-à-dire

$$\sum_{k \in K} \varphi_k = 0. \tag{2}$$

Le plan de transport est défini par le choix de la matrice

$$\psi = [\psi_{ij}]_{i,\, j \in K}, \quad \psi_{ij} \geqslant 0, \quad i \in K, \quad j \in K, \tag{3}$$

dont les éléments représentent les quantités de bien acheminées de chaque origine i en chaque destination j. Il est évident que la quantité de bien acheminée vers toute destination k sera égale à $\sum_{i \in K} \psi_{ik}$ et la quantité emportée de k égale à $\sum_{j \in K} \psi_{kj}$. Or, cela signifie que la matrice (3) définit le plan de transport si sont réalisées les relations de bilan suivantes:

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} - \sum_{j \in K} \psi_{kj} = \varphi_k, \quad k \in K. \tag{4}$$

Le coût de chaque plan de transport (3) est défini dans le modèle considéré par la formule

$$\tau(\psi) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} r_{ij} \psi_{ij}, \tag{5}$$

où r_{ij} sont des quantités positives données caractérisant le coût du transport d'une unité de bien de i en j.

Donc, l'ensemble des plans admissibles de transport est défini par l'ensemble Ψ_φ des solutions positives (3) du système d'équations linéaires (4). Quant au plan $\psi \in \Psi_\varphi$ le plus économique, dit plan optimal, que l'on cherche c'est celui pour lequel le coût (5) est minimal.

En utilisant les résultats généraux de la théorie de la programmation linéaire (ou moyennant un raisonnement direct) on vérifie sans peine que le problème d'extrémum posé admet toujours une

solution. De plus, un plan admissible de transport (3) est optimal si et seulement si existe un vecteur $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ tel que

$$u_j - u_i \leqslant r_{ij}, \quad i \in K, \quad j \in K, \tag{6}$$

et de plus $\psi_{ij}(u_j - u_i - r_{ij}) = 0$, $i \in K$, $j \in K$. Cette dernière relation signifie que si un plan admissible de i en j présente des ψ_{ij} non nuls, la condition correspondante dans (6) doit être réalisée comme une égalité. Il importe de noter que le critère d'optimalité indiqué permet de construire des algorithmes *) efficaces dont la réalisation sur calculatrice permet de résoudre des problèmes de transport comportant plusieurs milliers d'origines et de destinations.

En conclusion de ce préambule faisons quelques remarques sur le problème de transport envisagé et prouvons une proposition qui nous sera utile plus bas dans le problème de déplacement d'une masse.

Les composantes du vecteur (1) peuvent de toute évidence être mises sous la forme

$$\varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-, \quad k \in K,$$

où

$$\varphi_k^+ = \max\{0, \varphi_k\}, \qquad \varphi_k^- = -\min\{0, \varphi_k\}, \qquad \varphi_k^+ + \varphi_k^- = |\varphi_k|.$$

D'après (2) les quantités

$$\varphi^+(K) = \sum_{k \in K} \varphi_k^+, \quad \varphi^-(K) = \sum_{k \in K} \varphi_k^-$$

sont confondues et égales à la demi-somme des valeurs absolues des composantes du vecteur (1). B

Considérons maintenant la fonction

$$v(\psi) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} \psi_{ij} \tag{7}$$

et montrons que pour toute matrice $\psi \in \Psi_\varphi$ on a

$$v(\psi) \geqslant \varphi^+(K), \tag{8}$$

qui se change en égalité si et seulement si

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} = \varphi_k^+, \quad \sum_{j \in K} \psi_{kj} = \varphi_k^-, \quad k \in K. \tag{9}$$

En effet, de (4) et puisque les éléments sont positifs il suit

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} \geqslant \varphi_k^+, \quad \sum_{j \in K} \psi_{kj} \geqslant \varphi_k^-, \quad k \in K. \tag{10}$$

---

*) Les algorithmes de cette nature ont été proposés pour la première fois dans le travail de Kantorovitch et Gavourine [1] (ce travail écrit en 1940 est cité dans l'article de Kantorovitch [6]).

En sommant les premières ou les deuxièmes inégalités sur tous les $k \in K$ on obtient l'inégalité (8) annoncée. Il est clair que l'égalité a lieu si et seulement si sont satisfaites les relations (9).

Remarquons encore que la minoration (8) de la fonction (7) a lieu sur l'ensemble Ψ_φ, c'est-à-dire l'ensemble des matrices (3) vérifiant les conditions (9) n'est pas vide. Ces conditions sont réalisées, par exemple, pour la matrice

$$\psi^* = [\psi^*_{ij}]_{i,\, j \in K}, \quad \psi^*_{ij} = \frac{\varphi_i^- \cdot \varphi_j^+}{\varphi^+(K)}, \quad i \in K, \quad j \in K. \tag{11}$$

Lemme 1. *Si dans le problème de transport considéré les quantités positives r_{ij} vérifient l'inégalité*

$$r_{ij} \leqslant r_{ik} + r_{kj}, \quad i \in K, \quad j \in K, \quad k \in K, \tag{12}$$

il existe un plan optimal de transport (3) *pour lequel est réalisée l'égalité dans* (8).

Démonstration. Considérons des ensembles fermés bornés non vides

$$\Psi_\varphi^\nu = \{\psi \in \Psi_\varphi \mid v(\psi) \leqslant \nu\}, \quad \nu \in [\varphi^+(K), +\infty[.$$

Les fonctions (5) et (7) étant continues, il existe pour chaque $\nu \geqslant \varphi^+(K)$ une matrice $\psi_\nu \in \Psi_\varphi^\nu$, telle que

$$\tau(\psi_\nu) = \min\{\tau(\psi) : \ \psi \in \Psi_\varphi^\nu\},$$

$$v(\psi_\nu) = \min\{v(\psi) : \ \psi \in \Psi_\varphi^\nu, \quad \tau(\psi) = \tau(\psi_\nu)\}.$$

On demande de prouver que si la condition (12) est réalisée pour toutes les matrices $\psi_\nu \in \Psi_\varphi^\nu$, on a l'égalité

$$v(\psi_\nu) = \varphi^+(K). \tag{13}$$

Supposons que l'inégalité stricte est réalisée dans (8) pour une matrice $\psi = \psi_\nu$. Pour un $k_0 \in K$ on doit alors avoir les inégalités strictes dans (10). D'où l'existence de $i_0 \in K$ et $j_0 \in K$ tels que $\varepsilon = \min\{\psi_{i_0k_0}, \psi_{k_0j_0}\} > 0$.

Considérons la matrice $\psi' \in \Psi_\varphi$ déduite de la matrice initiale $\psi = \psi_\nu$ par la substitution suivante:

$$\psi'_{i_0j_0} = \psi_{i_0j_0} + \varepsilon, \quad \psi'_{i_0k_0} = \psi_{i_0k_0} - \varepsilon, \quad \psi'_{k_0j_0} = \psi_{k_0j_0} - \varepsilon.$$

On a pour cette matrice

$$\tau(\psi') = \tau(\psi) + \varepsilon\ (r_{i_0j_0} - r_{i_0k_0} - r_{k_0j_0}) \leqslant \tau(\varphi),$$

$$v(\psi') = v(\psi) - \varepsilon,$$

ce qui contredit le choix de la matrice $\psi_\nu \in \Psi_\varphi^\nu$. Cette contradiction montre que les égalités (13) sont réalisées pour tous les $\nu \in [\varphi^+(K), +\infty[$, d'où le lemme.

REMARQUE. Du lemme prouvé il suit que si r_{ij} vérifient les relations (12), la condition (4) peut être remplacée par la condition plus stricte (9).

4.2. L'analogue infinidimensionnel du problème de transport a été considéré pour la première fois dans le travail de Kantorovitch [6] (cf. aussi Kantorovitch [8], Kantorovitch et Rubinstein [1], [2]).

Problème de déplacement d'une masse. L'ensemble fini des origines est remplacé par un compact métrique arbitraire K muni d'une métrique $r(t, s)$ caractérisant le coût du transport d'une unité de masse d'un point $t \in K$ en un point $s \in K$. L'analogue du vecteur (1) vérifiant la condition (2) est une fonction φ σ-additive définie sur la tribu $\mathscr{B}$ des boréliens de K, dont la variation positive $\varphi_+(K)$ est confondue avec la variation négative $\varphi_-(K)$, c'est-à-dire telle que

$$\varphi(K) = \varphi_+(K) - \varphi_-(K) = 0. \tag{14}$$

On rappelle que (cf. I.6.3) pour $e \in \mathscr{B}$

$$\varphi_+(e) = \sup\{\varphi(e') : e' \in \mathscr{B},\ e' \subset e\},$$
$$\varphi_-(e) = \sup\{-\varphi(e') : e' \in \mathscr{B},\ e' \subset e\}.$$

Pour chaque $e \in \mathscr{B}$ les quantités $\varphi_+(e)$ et $\varphi_-(e)$ sont interprétées respectivement comme les quantités demandée et disponible de masse sur e. La condition (14) a donc le même sens que la condition (2) dans le cas d'un nombre fini de points.

Le plan de déplacement de la masse sur K est déterminé par le choix d'une mesure finie ψ définie sur la tribu $\widetilde{\mathscr{B}}$ des boréliens du compact $\widetilde{K} = K \times K$. La mesure de l'ensemble $e \times e'$, où $e, e' \in \mathscr{B}$, désignée plus loin par $\varphi(e, e')$, représente la quantité que l'on envisage de transporter de e en e'. Un tel plan est admissible s'il vérifie les relations de bilan

$$\psi(K, e) - \psi(e, K) = \varphi(e), \quad e \in \mathscr{B}, \tag{15}$$

semblables aux relations (4) du problème de transport.

Comme plus haut, on désignera par Ψ_φ l'ensemble des déplacements admissibles ψ. Il semble naturel de calculer le coût total de chaque déplacement à l'aide de l'intégrale double

$$\tau(\psi) = \int_{\widetilde{K}} r(t, s)\, d\psi(t, s). \tag{16}$$

Donc, le déplacement optimal cherché est caractérisé par la fonction $\psi \in \Psi_\varphi$ qui minimise (16).

On montrera plus bas que le problème d'extrémum posé admet toujours une solution, et on verra que le critère de déplacement optimal diffère peu de celui du problème de transport. Il s'avère qu'un déplacement admissible $\psi \in \Psi_\varphi$ est optimal si et seulement si

existe une fonction $u : K \to \mathbb{R}$, telle que

$$u(s) - u(t) \leqslant r(t, s), \quad t \in K, \quad s \in K, \tag{17}$$

et de plus $u(s) - u(t) = r(t, s)$ si (t, s) appartient au supp ψ de la mesure ψ *), c'est-à-dire si pour deux voisinages arbitraires e_t et e_s des points t et s on a les inégalités strictes $\psi(e_t, e_s) > 0$.

Arrêtons-nous sur un problème datant de deux siècles (cf. Kantorovitch [8]).

En 1781 déjà, l'éminent mathématicien G. Monge posait le problème suivant de déblai-remblai: décomposer deux volumes égaux en particules infiniment petites et les mettre en rapport de telle sorte que la somme des produits des chemins par les volumes des particules déplacées soit minimale.

En étudiant ce problème Monge a élaboré la théorie géométrique des congruences. Quant au problème proprement dit, il a émis l'hypothèse que les chemins cherchés sont des normales à une famille à un paramètre de surfaces.

Le problème de Monge a par la suite occupé d'autres mathématiciens et mécaniciens de renom. Cependant la démonstration rigoureuse de cette hypothèse ne sera donnée qu'un siècle plus tard, en 1884, par P. Appel, dans un mémoire de 200 pages. Bien que l'auteur ait réussi plus tard à simplifier la démonstration, celle-ci n'en est pas moins restée fastidieuse et se basait sur des théorèmes délicats du calcul des variations déjà développé à l'époque.

Or, la démonstration de l'hypothèse de Monge, et ce pour une plus vaste classe de problèmes de déplacement d'une masse, peut être obtenue comme un simple corollaire du critère de déplacement optimal énoncé plus haut. Nous prouvons d'abord une proposition auxiliaire.

Lemme 2. *Supposons qu'une fonction $u : K \to \mathbb{R}$ vérifie la condition* (17) *et soient des points t_0, s_0 et z_0 de K tels que*

$$u(s_0) - u(t_0) = r(t_0, s_0) = r(t_0, z_0) + r(z_0, s_0). \tag{18}$$

Alors l'ensemble

$$U_{z_0} = \{z \in K \mid u(z) = u(z_0)\} \tag{19}$$

est situé entre deux sphères, passant par z_0 et centrées en t_0 et s_0. En d'autres termes, les inégalités

$$r(t_0, z) \geqslant r(t_0, z_0), \quad r(z, s_0) \geqslant r(z_0, s_0)$$

sont vérifiées pour tout point $z \in U_{z_0}$.

*) Pour la définition de support de la mesure de Borel voir Halmos.

DÉMONSTRATION. En vertu de (17), on a

$$u(z_0) - u(t_0) \leqslant r(t_0, z_0), \quad u(s_0) - u(z_0) \leqslant r(z_0, s_0).$$

Ceci et (18) entraînent

$$u(z_0) - u(t_0) = r(t_0, z_0), \quad u(s_0) - u(z_0) = r(z_0, s_0).$$

D'où, d'après la condition (17), l'on déduit pour tout point $z \in U_{z_0}$

$$r(t_0, z) \geqslant u(z) - u(t_0) = u(z_0) - u(t_0) = r(t_0, z_0),$$

$$r(z, s_0) \geqslant u(s_0) - u(z) = u(s_0) - u(z_0) = r(z_0, s_0),$$

c.q.f.d.

Le critère d'optimalité nous permet maintenant d'affirmer que le théorème de Monge-Appel est valable pour tout problème de déplacement de masse sur un compact convexe dans un espace euclidien ou un espace hilbertien quelconques. De plus, si le déplacement admissible défini par la mesure $\psi \in \Psi_\varphi$ est optimal nous pouvons prendre pour condition nécessaire l'existence d'une famille à un paramètre de surfaces $u(z) = \text{const}$, correspondant à la fonction $u: K \to \mathbb{R}$ du critère d'optimalité. En effet, si l'on transporte un bien de t_0 en s_0, c'est-à-dire $(t_0, s_0) \in \operatorname{supp} \psi$, alors l'intervalle $]t_0, s_0[$ est, d'après le lemme 2, confondu pour tout $z_0 \in]t_0, s_0[$ avec la normale à la surface correspondante (19).

Une autre particularité du problème de Monge est que pour fonction σ-additive $\varphi: \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition (14) on prend

$$\varphi(e) = \mu(e \cap N) - \mu(e \cap M), \quad e \in \mathscr{B},$$

où μ est une mesure fixe (la mesure de Lebesgue), M et N des ensembles mesurables donnés tels que $\mu(N) = \mu(M)$. Cependant nous ne nous sommes pas servis de cette particularité dans la démonstration du théorème de Monge-Appel.

4.3. Pour démontrer les propositions énoncées relativement au problème de déplacement d'une masse, nous commencerons, suivant les travaux de Kantorovitch et Rubinstein [1], [2], par étudier l'espace vectoriel normé engendré par ce problème en raison de son intérêt intrinsèque. En particulier, on obtiendra incidemment une importante caractéristique de convergence (*)-faible des fonctionnelles linéaires dans l'espace des fonctions continues sur un compact métrique.

Soient un compact métrique K muni de la métrique $r(t, s)$ et la tribu $\mathscr{B}$ de ses boréliens. Dans le B-espace **rca** (K) des fonctions σ-additives $\varphi: \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ *) considérons l'ensemble plus étroit $\Phi_0(\mathscr{B})$ des fonctions vérifiant la condition (14). Associons à toute mesure

*) Signalons que toute fonction σ-additive finie d'ensemble, définie sur la tribu $\mathscr{B}$ des boréliens d'un compact métrique K, est régulière (cf. Halmos).

borélienne finie ψ sur $\widetilde{K}$ $(= K \times K)$ la fonction

$$\varphi(e) = \psi(K, e) - \psi(e, K), \quad e \in \mathscr{B}, \tag{20}$$

qui satisfait visiblement à la condition (14) et appartient donc à l'ensemble $\Phi_0(\mathscr{B})$. Par ailleurs, quelle que soit $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$ pour la fonction *)

$$\psi^*(e, e') = \frac{\varphi_-(e) \cdot \varphi_+(e')}{\varphi_+(K)}, \; e \in \mathscr{B}, \quad e' \in \mathscr{B}, \tag{21}$$

on a

$$\psi^*(K, e) - \psi^*(e, K) = \varphi_+(e) - \varphi_-(e) = \varphi(e), \quad e \in \mathscr{B},$$

c'est-à-dire l'ensemble Ψ_φ des mesures $\psi \in \Psi(\mathscr{B})$ vérifiant la condition (20) n'est pas vide.

Il est immédiat de vérifier que pour les ensembles Ψ_φ indiqués on a les relations suivantes:

$$\Psi_{\varphi_1} + \Psi_{\varphi_2} = \{\psi_1 + \psi_2 \mid \psi_1 \in \Psi_{\varphi_1}, \; \psi_2 \in \Psi_{\varphi_2}\} \subset \Psi_{\varphi_1 + \varphi_2}, \tag{22}$$

$$0 \in \Psi_0, \quad \lambda\Psi_\varphi = \{\lambda\psi \in \Psi_\varphi\} = \Psi_{\lambda\varphi}, \quad \lambda > 0. \tag{23}$$

De plus, pour obtenir l'ensemble $\Psi_{-\varphi}$ il suffit de remplacer chaque fonction ψ de l'ensemble Ψ_φ par la mesure « transposée » ψ^{T}, où $\psi^{\mathrm{T}}(E) = \psi(E^{\mathrm{T}})$, $E^{\mathrm{T}} = \{(t, s): (s, t) \in E\}$, pour tout borélien $E \subset \widetilde{K}$. En particulier

$$\psi^{\mathrm{T}}(e, e') = \psi(e', e), \quad e \in \mathscr{B}, \quad e' \in \mathscr{B}.$$

Donc

$$\Psi_{-\varphi} = \{\psi^{\mathrm{T}} \mid \psi \in \Psi_\varphi\} = (\Psi_\varphi)^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Il est facile de prouver maintenant que la fonction positive définie sur $\Phi_0(\mathscr{B})$

$$\|\varphi\|_\tau = \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \tau(\psi) = \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \int_{\widetilde{K}} r(t, s)\, d\psi(t, s) \tag{25}$$

vérifie les axiomes de la semi-norme:

$$\|\lambda\varphi\|_\tau = |\lambda| \cdot \|\varphi\|_\tau, \tag{26}$$

$$\|\varphi_1 + \varphi_2\|_\tau \leqslant \|\varphi_1\|_\tau + \|\varphi_2\|_\tau. \tag{27}$$

En effet, l'inégalité (27) découle de l'inclusion (22) et de l'additivité de la fonction (16). Quant à l'égalité (26), pour $\lambda \geqslant 0$ elle résulte de (23) et de l'homogénéité de la fonction (16), et pour $\lambda < 0$,

*) Cette fonction se construit d'après le même principe que la matrice admissible (11) du problème de transport. Elle correspond à un transport dans lequel la masse $\varphi_-(e)$ existant sur chaque borélien e est distribuée proportionnellement aux demandes $\varphi_+(e')$ sur tous les $e' \in \mathscr{B}$.

de (24) si l'on tient compte du fait que

$$\tau(\psi^{\mathrm{T}}) = \int_{\tilde{K}} r(t, s)\, d\psi(s, t) = \int_{\tilde{K}} r(s, t)\, d\psi(s, t) = \tau(\psi).$$

On montrera plus bas (cf. remarque 1 suivant le théorème 1) que la fonction (25) vérifie aussi la condition

$$\| \varphi \|_\tau = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \tag{28}$$

c'est-à-dire est une norme dans $\Phi_0(\mathscr{B})$. Cependant la vérification de ce fait, pour des raisons de commodité, viendra après l'établissement de quelques propriétés de l'espace $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ traité provisoirement comme un espace topologique muni de la topologie engendrée par la semi-métrique *) $\rho_\tau(\varphi_1, \varphi_2) = \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_\tau$ **). Plus bas on prouvera que cette topologie est une topologie d'espace normé, mais formellement on n'utilisera pas ce fait. Il nous faudra donc convenir de la terminologie dans ce cas.

On dira qu'une suite $\{\varphi_n\}$ est fortement convergente vers φ (et l'on notera $\varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi$) si $\| \varphi_n - \varphi \|_\tau \to 0$. On désigne par $(\Phi_0^\tau(\mathscr{B}))^*$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $\Phi_0(\mathscr{B})$, continues pour la convergence forte. On dira que la suite $\{\varphi_n\}$ est faiblement convergente vers φ (et l'on écrira $\varphi_n \dashrightarrow \varphi$) si $L(\varphi_n) \to L(\varphi)$ pour tout $L \in (\Phi_0^\tau(\mathscr{B}))^*$.

4.4. Nous démontrons quelques propositions auxiliaires.

On rappelle que le support $\operatorname{supp} \psi$ de la mesure ψ est composé des $(t, s) \in K \times K$ tels que $\psi(e_t, e_s) > 0$ pour tout voisinage e_t et e_s des points correspondants. Les supports $\operatorname{supp} \varphi$ des fonctions $\varphi \in \mathbf{rca}(K)$ sont constitués, eux, des points $t \in K$, dont tout voisinage e_t est tel que $\max\{\varphi_+(e_t), \varphi_-(e_t)\} > 0$. Ce qui signifie que

$$\operatorname{supp} \varphi = (\operatorname{supp} \varphi_+) \cup (\operatorname{supp} \varphi_-)$$

et est confondu avec le plus petit fermé $F \subset K$ vérifiant la condition $\varphi(e) = \varphi(e \cap F)$, $e \in \mathscr{B}$.

Lemme 3. *Pour toute fonction* $\varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ *on a les majorations suivantes*:

$$\| \varphi \|_\tau \leqslant \varphi_+(K) \cdot \max\{r(t, s) : t \in \operatorname{supp} \varphi_-,\ s \in \operatorname{supp} \varphi_+\},$$

$$\| \varphi \|_\tau \leqslant \varphi_+(K) \operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi),$$

où $\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi)$ *désigne le diamètre de l'ensemble* $\operatorname{supp} \varphi$ *dans* K.

---

*) La semi-métrique vérifie tous les axiomes de la métrique sauf que $\rho(x, y) = 0$ entraîne $x = y$. La topologie engendrée par une semi-métrique se définit comme celle engendrée par une métrique.

**) Cette métrique est souvent appelée métrique de Kantorovitch-Rubinstein. (*Note du rédacteur.*)

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour la mesure $\psi^* \in \Psi_\varphi$, définie d'après (21), on a

$$\psi^* (K, K) = \varphi_- (K) = \varphi_+ (K),$$
$$\operatorname{supp} \psi^* = (\operatorname{supp} \varphi_-) \times (\operatorname{supp} \varphi_+).$$

Donc

$$\| \varphi \|_\tau = \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \tau (\psi) \leqslant \tau (\psi^*) = \iint_{KK} r (t, s) \, d\psi^* (t, s) \leqslant \varphi_+ (K) \times$$
$$\times \max \{r (t, s) : \ t \in \operatorname{supp} \varphi_-, \ s \in \operatorname{supp} \varphi_+\} \leqslant \varphi_+ (K) \operatorname{diam} (\operatorname{supp} \varphi),$$

c.q.f.d.

Les majorations précédentes nous permettent maintenant d'établir d'importantes propriétés des ensembles

$$S_0^\nu = \{\varphi \in \Phi_0 (\mathscr{B}) : \ \varphi_+ (K) + \varphi_- (K) \leqslant \nu\}, \tag{29}$$

dont la réunion sur tous les $\nu \geqslant 0$ est confondue manifestement avec $\Phi_0 (\mathscr{B})$. Considérons à cet effet dans $\mathrm{rca}\,(K)$ l'ensemble $\tilde{\Phi} (\mathscr{B})$ des fonctions à supports finis, c'est-à-dire l'enveloppe linéaire des fonctions élémentaires

$$\varphi_t (e) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in e, \\ 0 \text{ pour } t \notin e, \end{cases}$$

dont les supports sont des ensembles à un point.

Soient les ensembles

$$\tilde{\Phi}_0 (\mathscr{B}) = \Phi_0 (\mathscr{B}) \cap \tilde{\Phi} (\mathscr{B}), \quad \tilde{S}_0^\nu = S_0^\nu \cap \tilde{\Phi} (\mathscr{B}).$$

Les fonctions élémentaires de $\tilde{\Phi}_0 (\mathscr{B})$ sont

$$\varphi_{ts} = \varphi_s - \varphi_t, \tag{30}$$

pour lesquelles lorsque $t \neq s$, on a

$$\operatorname{supp} \varphi_{ts} = \{t, \ s\}, \quad (\varphi_{ts})_+ = \varphi_s, \quad (\varphi_{ts})_- = \varphi_t$$

et par suite, d'après le lemme 3,

$$\| \varphi_{ts} \|_\tau \leqslant (\varphi_{ts})_+ (K) \operatorname{diam} (\operatorname{supp} \varphi_{ts}) = r (t, s). \tag{31}$$

L'enveloppe linéaire des fonctions (30) est confondue de toute évidence avec $\tilde{\Phi}_0 (\mathscr{B})$ tout entier.

LEMME 4. *Quels que soient* $\nu > 0$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe dans* $\tilde{S}_0^\nu$ *un* ε-*réseau fini relativement à la semi-norme* (25) *) *dans* S_0^ν.

DÉMONSTRATION. Mettons le compact donné K sous la forme $K = \bigcup_{i=1}^m e_i$, où les boréliens non vides e_i sont tels que $e_i \cap e_j = \varnothing$

*) Un ε-réseau pour une semi-métrique se définit comme pour métrique.

pour $i \neq j$, max (diam e_i) $< \varepsilon/(2\nu)$. Fixons un point t_i dans chaque e_i, un point arbitraire t_0 dans K et un entier naturel

$$q > \frac{2m}{\varepsilon} \operatorname{diam} K.$$

Considérons maintenant l'ensemble P des vecteurs entiers

$$p = (p_1, \ldots, p_m), \tag{32}$$

vérifiant la condition

$$\sum_{i=1}^{m} |p_i| + \left|\sum_{i=1}^{m} p_i\right| \leqslant q\nu$$

et montrons que les fonctions

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{q} \varphi_{t_0 t_i}, \quad p \in P, \tag{33}$$

qui leur correspondent et qui appartiennent évidemment à $\tilde{S}_0^\nu$ constituent l'ε-réseau requis.

Commençons par associer à chaque fonction $\varphi \in S_0^\nu$ la fonction

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i)\, \varphi_{t_i} = \sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i)\, \varphi_{t_0 t_i} \tag{34}$$

de $\tilde{S}_0^\nu$ et vérifions que

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \|_\tau \leqslant \varepsilon/2. \tag{35}$$

A cet effet, considérons dans $\Phi_0(\mathscr{B})$ les fonctions

$$\varphi_i(e) = \varphi(e \cap e_i) - \varphi(e_i)\, \varphi_{t_i}(e), \quad e \in \mathscr{B}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Leurs supports sont contenus dans les adhérences des e_i correspondants, donc

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp} \varphi_i) \leqslant \operatorname{diam} e_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2\nu}.$$

De plus

$$(\varphi_i)_+(K) = (\varphi_i)_+(e_i) \leqslant \varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)$$

et par suite, en vertu du lemme

$$\| \varphi_i \|_\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2\nu} [\varphi_+(e_i) + \varphi_-(e_i)].$$

Or

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_\tau=\left\|\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\right\|_\tau\leqslant\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|_\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2\nu}\sum_{i=1}^{m}[\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)]=\frac{\varepsilon}{2\nu}[\varphi_+(K)+\varphi_-(K)]\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire la majoration (35).

Il reste maintenant à trouver pour la fonction (34) un vecteur $p\in P$ tel que la fonction (33) qui lui correspond satisfasse à la condition

$$\|\tilde{\varphi}-\tilde{\tilde{\varphi}}\|_\tau<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Posons $p_i=s_ic_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, où $s_i=\operatorname{sign}\varphi(e_i)$ et c_i sont les parties entières des quantités positives $q\,|\,\varphi(e_i)\,|$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{m}|p_i|+\left|\sum_{i=1}^{m}p_i\right|=\sum_{i=1}^{m}c_i+\left|\sum_{i=1}^{m}[q\varphi(e_i)-p_i]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}c_i+\sum_{i=1}^{m}|q\varphi(e_i)-p_i|=\sum_{i=1}^{m}c_i+\sum_{i=1}^{m}[q\,|\,\varphi(e_i)\,|-c_i]=$$

$$=q\sum_{i=1}^{m}|\varphi(e_i)|\leqslant q\sum_{i=1}^{m}[\varphi_+(e_i)+\varphi_-(e_i)]\leqslant q\nu,$$

c'est-à-dire le vecteur (32) appartient à l'ensemble P. Montrons que la fonction (33) correspondant à ce vecteur vérifie la condition requise (36). En effet

$$\|\tilde{\varphi}-\tilde{\tilde{\varphi}}\|_\tau=\left\|\sum_{i=1}^{m}\left[\varphi(e_i)-\frac{p_i}{q}\right]\varphi_{t_0t_i}\right\|_\tau\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi(e_i)-\frac{p_i}{q}\right|\|\varphi_{t_0t_i}\|_\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{q}\operatorname{diam}K\sum_{i=1}^{m}[q\,|\,\varphi(e_i)\,|-c_i]\leqslant\frac{m}{q}\operatorname{diam}K<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

COROLLAIRE 1. *L'ensemble linéaire $\tilde{\Phi}_0(\mathscr{B})$ est partout dense dans l'espace $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$.*

COROLLAIRE 2. *Pour que deux fonctionnelles linéaires continues soient confondues sur l'espace $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ il suffit qu'elles prennent les mêmes valeurs sur toutes les fonctions* (30).

LEMME 5. *La convergence forte et la convergence faible dans* $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ *coïncident pour les fonctions de* S_0^ν. *De façon plus précise si* $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset S_0^\nu$, *alors* $\varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0$ *si et seulement si* $\varphi_n \dashrightarrow \varphi_0$.

DÉMONSTRATION. La convergence faible découle visiblement de la convergence forte sans condition subsidiaire. Supposons maintenant que $\varphi_n \dashrightarrow \varphi_0$, $\varphi_n \in S_0^\nu$. Si la fonction φ_n ne convergeait pas fortement vers φ_0, il existerait pour un $\varepsilon > 0$ une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ telle que

$$\| \varphi_{n_k} - \varphi_0 \|_\tau \geqslant 2\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots$$

D'après le lemme 4, on peut sans restreindre la généralité admettre que cette suite partielle est de Cauchy. Il existe donc un k_0 tel que

$$\| \varphi_{n_k} - \varphi_{n_{k_0}} \|_\tau \leqslant \varepsilon$$

pour tous les $k \geqslant k_0$ *). Le théorème de Hahn-Banach affirme l'existence d'une fonctionnelle $L \in (\Phi_0^\tau(\mathscr{B}))^*$, telle que

$$\| L \| = 1, \quad L(\varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0) = \| \varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0 \|_\tau.$$

Pour tous les $k \geqslant k_0$, on a alors

$$L(\varphi_{n_k} - \varphi_0) = L(\varphi_{n_{k_0}} - \varphi_0) + L(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_{k_0}}) \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

ce qui contredit la convergence faible de φ_n vers φ_0. Cette contradiction achève la démonstration du lemme.

LEMME 6. *Quels que soient* $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$ *et* $\psi \in \Psi_\varphi$ *on a*

$$\psi(K, K) \geqslant \varphi_+(K) = \varphi_-(K),$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si

$$\psi(K, e) = \varphi_+(e), \quad \psi(e, K) = \varphi_-(e), \quad e \in \mathscr{B}.$$

DÉMONSTRATION. Un fait analogue est démontré dans 4.1 pour le problème de transport. En reprenant ces raisonnements et en remplaçant certains points par des ensembles $e \in \mathscr{B}$ et les sommes finies par des intégrales, on obtient le résultat voulu.

4.5. Trouvons maintenant la forme générale des fonctionnelles linéaires de $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$. Considérons à cet effet l'espace $\mathbf{Lip}^1(K)$ des fonctions $u: K \to \mathbb{R}$ vérifiant une condition de Lipchitz, c'est-à-dire telles que

$$\| u \|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{r(t, s)} < \infty.$$

*) La démonstration est exactement la même que pour un espace métrique.

Il est évident que cet espace est semi-normé et de plus

$$\| u \|_{\mathrm{Lip}} = 0 \Leftrightarrow u(t) = \text{const}, \quad x \in K. \tag{37}$$

Pour obtenir un espace normé il faut considérer le quotient de $\mathrm{Lip}^1(K)$ par le sous-espace des fonctions constantes ou bien se borner à l'étude d'un sous-espace vectoriel, par exemple

$$\mathrm{Lip}^1(K, t_0) = \{u \in \mathrm{Lip}^1(K) \mid u(t_0) = 0\}.$$

Le théorème qui suit exprime que l'espace normé $\mathrm{Lip}^1(K, t_0)$ est linéairement isométrique à l'espace $(\Phi_0^\tau(\mathscr{B}))^*$ des fonctionnelles linéaires continues dans $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$.

THÉORÈME 1. *La fonctionnelle additive et homogène*

$$L_u(\varphi) = \int_K u(t)\, d\varphi(t), \quad \varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B}), \tag{38}$$

associée à $u \in \mathrm{Lip}^1(K)$, *est continue et de plus*

$$\| L_u \| = \| u \|_{\mathrm{Lip}}\,^{*)}. \tag{39}$$

Inversement, quelle que soit la fonctionnelle linéaire continue L *dans* $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$, *il existe une fonction* $u \in \mathrm{Lip}^1(K)$ *telle que* $L = L_u$. *De plus cette fonction est définie à un facteur additif constant près.*

DÉMONSTRATION. Pour tous les $u \in \mathrm{Lip}^1(K)$, $\varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B})$, $\psi \in \Psi_\varphi$ on a

$$L_u(\varphi) = \int_K u(t)\, d\varphi = \int_K u(t)\, d\psi(K, t) - \int_K u(t)\, d\psi(t, K) =$$

$$= \int_{\tilde{K}} u(s)\, d\psi(t, s) - \int_{\tilde{K}} u(t)\, d\psi(t, s) = \int_{\tilde{K}} (u(s) - u(t))\, d\psi(t, s) \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{\mathrm{Lip}} \int_{\tilde{K}} r(t, s)\, d\psi(t, s) = \| u \|_{\mathrm{Lip}}\, \tau(\psi).$$

Donc

$$L_u(\varphi) \leqslant \| u \|_{\mathrm{Lip}} \inf_{\psi \in \Psi_\varphi} \tau(\psi) = \| u \|_{\mathrm{Lip}} \| \varphi \|_\tau. \tag{40}$$

Par suite, la fonctionnelle (38) est linéaire et de plus

$$\| L_u \| \leqslant \| u \|_{\mathrm{Lip}}. \tag{41}$$

Pour obtenir l'inégalité inverse il suffit de considérer les fonctions élémentaires (30) pour lesquelles

$$L_u(\varphi_{ts}) = \int_K u(z)\, d\varphi_{ts}(z) = u(s) - u(t).$$

---

*) $\| L_u \| = \sup \{ | L_u(\varphi) | : \| \varphi \|_\tau \leqslant 1 \}$.

Compte tenu de (31) on a

$$\| u \|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{r(t, s)} \leqslant \sup_{t \neq s} \frac{L_u(\varphi_{ts})}{\| \varphi_{ts} \|_\tau} \leqslant \| L_u \|. \tag{42}$$

L'égalité voulue (39) résulte de (41) et (42).

Pour démontrer la deuxième partie du théorème nous fixons un point $t_0 \in K$ et nous associons à chaque fonctionnelle $L \in (\Phi_0^\tau(\mathscr{B}))^*$ la fonction

$$u(t) = L(\varphi_{t_0 t}), \quad t \in K.$$

Pour tous t et $s \in K$ on a

$$L(\varphi_{ts}) = L(\varphi_{t_0 s} - \varphi_{t_0 t}) = u(s) - u(t),$$

$$u(s) - u(t) = L(\varphi_{ts}) \leqslant \| L \| \, \| \varphi_{ts} \|_\tau \leqslant \| L \| \, r(t, s).$$

Donc

$$u \in \mathrm{Lip}^1(K)$$

et

$$L(\varphi_{ts}) = L_u(\varphi_{ts}) = u(s) - u(t), \quad t \in K, \quad s \in K.$$

Le corollaire 2 du lemme 3 nous dit que les fonctionnelles L et L_u sont alors confondues.

La dernière assertion du théorème sur le choix arbitraire de la fonction u résulte de (37) et (39).

Remarque 1. En utilisant l'inégalité (40) on peut montrer maintenant que la semi-norme (25) est une norme.

Considérons à cet effet une fonction non nulle $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$ et la partition correspondante du compact K en boréliens K_φ^+ et K_φ^- disjoints, tels que

$$\varphi_+(e) = \varphi(e \cap K_\varphi^+), \quad \varphi_-(e) = -\varphi(e \cap K_\varphi^-), \quad e \in \mathscr{B}\ ^{*)}.$$

La fonction φ étant distincte de zéro, on a $\varphi_+(K) = \varphi_+(K_\varphi^+) > 0$. En vertu de la régularité de φ_+, il existe un ensemble fermé $F \subset K_\varphi^+$ tel que $\varphi_+(F) > 0$. Prenons $0 < \varepsilon < {}^1/_2 \varphi_+(F)$ et utilisons l'égalité $\varphi_-(F) = 0$ et la régularité des fonctions φ_+ et φ_- pour trouver un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour un δ-voisinage de l'ensemble F

$$F_\delta = \{t \in K : \ r(t, F) = \min_{s \in F} r(t, s) < \delta\}$$

l'on ait

$$\varphi_-(F_\delta) < \varepsilon, \quad \varphi_+(F_\delta \setminus F) < \varepsilon.$$

Il est aisé de voir que la fonction

$$u(t) = \begin{cases} \delta - r(t, F) & \text{pour } t \in F_\delta, \\ 0 & \text{pour } t \notin F_\delta \end{cases}$$

*) Voir théorème I.6.2.

vérifie une condition de Lipchitz et $\| u \|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$. En vertu de (40) on a alors

$$\| \varphi \|_\tau \geqslant \| u \|_{\mathrm{Lip}} \| \varphi \|_\tau \geqslant L_u(\varphi) = \int_K u(t)\, d\varphi = \int_{F_\delta} u(t)\, d\varphi =$$

$$= \int_{F_\delta} u(t)\, d\varphi_+ - \int_{F_\delta} u(t)\, d\varphi_-.$$

Comme

$$r(t, F) \begin{cases} = 0 \text{ pour } t \in F, \\ < \delta \text{ pour } t \in F_\delta \setminus F \end{cases}$$

il vient

$$\int_{F_\delta} u(t)\, d\varphi = \delta\varphi_+(F_\delta) - \int_{F_\delta} r(t, F)\, d\varphi_+ \geqslant$$

$$\geqslant \delta\varphi_+(F_\delta) - \delta\varphi_+(F_\delta \setminus F) > \delta\,[\varphi_+(F_\delta) - \varepsilon],$$

$$\int_{F_\delta} u(t)\, d\varphi_- \leqslant \delta\varphi_-(F_\delta) < \delta\varepsilon.$$

Donc

$$\| \varphi \|_\tau \geqslant \delta\,[\varphi_+(F_\delta) - 2\varepsilon] > 0,$$

c.q.f.d.

Remarque 2. Pour tout $M \subset K$, chaque fonction $\tilde{u} \in \mathrm{Lip}^1(M)$ est la restriction à M d'une fonction $u \in \mathrm{Lip}^1(K)$ de même norme.

En effet, la fonction $\tilde{u}$ est prolongeable en continuité à l'adhérence $\overline{M}$ de l'ensemble M. Ensuite, la fonctionnelle linéaire définie par la fonction obtenue sur l'ensemble

$$E = \{\varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B}) : \operatorname{supp} \varphi \subseteq \overline{M}\}$$

est prolongeable avec respect de la norme à l'espace $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ tout entier. On obtient en définitive une fonction de $\mathrm{Lip}^1(K)$ qui ne diffère que par un facteur additif constant de la fonction voulue.

Remarque 3. Outre le compact métrique K, muni de la métrique $r(t, s)$ considérons maintenant le compact métrique $K' = K$, muni de la métrique $r'(t, s) = [r(t, s)]^\alpha$, où $\alpha \in]0, 1]$. L'espace normé correspondant $\mathrm{Lip}^1(K', t_0)$ est confondu manifestement avec l'espace $\mathrm{Lip}^\alpha(K, t_0)$, dans lequel

$$\| u \|_{\mathrm{Lip}^\alpha} = \sup_{t \neq s} \frac{u(s) - u(t)}{[r(t, s)]^\alpha}.$$

Donc, ce dernier est linéairement isométrique à l'espace $(\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_{K'}))^*$ des fonctionnelles linéaires de $\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_{K'})$.

Montrons maintenant le critère d'optimalité cité dans 4.2.

THÉORÈME 2. *La mesure* $\psi \in \Psi_\varphi$ *réalise l'égalité*

$$\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau \tag{43}$$

si et seulement si existe une fonction $u: K \to \mathbb{R}$, *telle que*

$$u(s) - u(t) \leqslant r(t, s), \quad t \in K, \quad s \in K, \tag{44}$$

et

$$u(s) - u(t) = r(t, s) \quad \textit{pour} \quad (t, s) \in \operatorname{supp} \psi. \tag{45}$$

DÉMONSTRATION. Pour toute mesure $\psi \in \Psi_\varphi$ et toute fonction $u \in \mathbf{Lip}^1(K)$ de norme $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1$ on a

$$\tau(\psi) = \int_{\tilde{K}} r(t, s)\, d\psi(t, s) \geqslant \int_{\tilde{K}} (u(s) - u(t))\, d\psi(t, s) =$$

$$= \int_K u(s)\, d\psi(K, s) - \int_K u(t)\, d\psi(t, K) = \int_K u(t)\, d\varphi = L_u(\varphi), \tag{46}$$

$$L_u(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\tau \leqslant \tau(\psi). \tag{47}$$

Supposons maintenant que pour une mesure $\psi \in \Psi_\varphi$ on ait trouvé une fonction $u: K \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions (44) et (45). Alors dans (46) l'égalité est réalisée pour cette fonction. Ceci et (47) entraînent (43).

Inversement, supposons que (43) est réalisée pour une mesure $\psi \in \Psi_\varphi$. Le théorème 1 et le théorème de Hahn-Banach affirment l'existence d'une fonction $u \in \mathbf{Lip}^1(K)$ de norme $\|u\|_{\mathrm{Lip}} = 1$ telle que $L_u(\varphi) = \|\varphi\|_\tau$. Il est équivalent de dire que cette fonction vérifie (44) et réalise l'égalité dans la première inégalité (47). Donc, il y a égalité dans (47) et par suite dans (46). Or, cela signifie que la fonction u satisfait à la condition (45), d'où le théorème.

Ce théorème entraîne notamment que les τ-normes des fonctions élémentaires $\varphi_{t,s} \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ coïncident avec les distances $r(t, s)$ des points correspondants. En effet, quels que soient t_0 et s_0 de K, pour la fonction

$$\psi_{t_0 s_0}(e, e') = \varphi_{t_0}(e)\, \varphi_{s_0}(e'), \quad e \in \mathscr{B}, \quad e' \in \mathscr{B},$$

de $\Psi_{\varphi_{t_0 s_0}}$ on a

$$\operatorname{supp} \psi_{t_0 s_0} = \{(t_0, s_0)\}, \quad \tau(\psi_{t_0 s_0}) = \int_K \int_K r(t, s)\, d\psi_{t_0 s_0}(t, s) = r(t_0, s_0),$$

et les conditions du théorème sont réalisées par la fonction

$$u(t) = r(t_0, t), \quad t \in K.$$

Cependant plus importants sont les corollaires formulés plus bas et que l'on vérifie grâce à la remarque 2 et au lemme 1 de 4.1.

COROLLAIRE 1. *Soit $\overline{K} \subset K$ un ensemble fermé. Supposons que pour une fonction $\widetilde{\varphi} \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B}_{\overline{K}})$ on ait trouvé une mesure $\widetilde{\psi} \in \Psi_{\widetilde{\varphi}}$ telle que*

$$\tau(\widetilde{\psi}) = \int_{\overline{K}} \int_{\overline{K}} r(t, s)\, d\widetilde{\psi}(t, s) = \|\widetilde{\varphi}\|_\tau.$$

Alors pour une fonction $\varphi(e) = \widetilde{\varphi}(e \cap \overline{K})$, $e \in \mathscr{B}_K$, de $\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_K)$ et une mesure

$$\psi(e, e') = \widetilde{\psi}(e \cap \overline{K}, e' \cap \overline{K}), \quad e \in \mathscr{B}_K, \quad e' \in \mathscr{B}_K,$$

de Ψ_φ on a l'égalité analogue

$$\tau(\psi) = \int_K \int_K r(t, s)\, d\psi(t, s) = \|\varphi\|_\tau,$$

et de plus

$$\|\varphi\|_\tau = \|\widetilde{\varphi}\|_\tau.$$

COROLLAIRE 2. *Si une fonction $\varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ admet un support fini, dans l'ensemble Ψ_φ il existe toujours une mesure ψ telle que $\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$ et de plus*

$$\psi(K, K) = \varphi_+(K) = \varphi_-(K),$$

c'est-à-dire

$$\psi(K, e) = \varphi_+(e), \quad \psi(e, K) = \varphi_-(e), \quad e \in \mathscr{B}.$$

La dernière assertion est valable aussi pour les fonctions $\varphi \in \Phi_0^\tau(\mathscr{B})$ à supports infinis. Mais pour prouver ce fait nous aurons préalablement besoin d'établir une relation entre une τ-norme et la convergence $(*)$-faible des fonctionnelles linéaires dans l'espace $\mathbf{C}(K)$.

4.6. Nous savons déjà (cf. théorème VI.3.1) que l'espace $(\mathbf{C}(K))^*$ des fonctionnelles linéaires continues dans $\mathbf{C}(K)$ est linéairement isométrique au B-espace $\mathbf{rca}(K)$. Si une suite $\{\varphi_n\}$ de $\mathbf{rca}(K)$ converge $(*)$-faiblement vers φ_0, on écrira : $\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0$. On remarquera que la convergence $(*)$-faible de $\{\varphi_n\}$ vers φ_0 entraîne celle de $\varphi_n(K) \to \varphi_0(K)$. Par ailleurs, dans $\mathbf{rca}(K)$ on notera la norme de φ par $\|\varphi\|$, c'est-à-dire $\|\varphi\| = \varphi_+(K) + \varphi_-(K)$. Du théorème 1.1, il suit que si $\varphi_n \xrightarrow{(*)} \varphi_0$ il vient

$$\|\varphi_0\| \leqslant \underline{\lim}\, \|\varphi_n\| \leqslant \overline{\lim}\, \|\varphi_n\| < \infty. \tag{48}$$

D'autre part, chaque ensemble (*)-faiblement fermé M dans rca (K) est (*)-faiblement séquentiellement complet (cf. 1.2), c'est-à-dire si les fonctions $\varphi_n \in M$ sont telles que pour tout $x \in \mathrm{C}(K)$ les intégrales $\int_K x\, d\varphi_n$ sont convergentes, alors elles sont (*)-faiblement convergentes vers une fonction $\varphi_0 \in M$. Ceci concerne notamment l'ensemble $\mathrm{rca}_+(K)$ de toutes les mesures $\varphi \in \mathrm{rca}(K)$, le sous-espace $\Phi_0(\mathscr{B}) \subset \mathrm{rca}(K)$, ainsi que les boules fermées

$$S^\nu = \{\varphi \in \mathrm{rca}(K) : \|\varphi\| \leqslant \nu\}$$

de rayon quelconque $\nu \in [0, +\infty[$ et les boules fermées dans $\Phi_0(\mathscr{B})$:

$$S_0^\nu = \{\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B}) : \|\varphi\| \leqslant \nu\},$$

que nous avons rencontrées dans 4.4. A noter encore que l'espace $\mathrm{C}(K)$ étant séparable (cf. théorème IV.4.3), les boules S^ν et S_0^ν sont (*)-faiblement séquentiellement compactes (cf. théorème I.7.6).

L'espace rca (K) est d'un grand usage en théorie des probabilités, en géométrie et dans d'autres disciplines mathématiques. La convergence (*)-faible joue dans cet espace un rôle bien plus important que la convergence forte. Ceci s'explique premièrement par la compacité (*)-faible des boules S^ν et, deuxièmement, par le fait que la norme de rca (K) s'avère trop grossière dans l'étude de pas mal de problèmes. Cette norme n'est pas liée directement à la métrique initiale $r(t, s)$ et la topologie engendrée par elle dans K. Pour cette raison la mesure de voisinage définie par cette norme pour les fonctions de rca (K) n'est pas toujours compatible avec la notion intuitive de ce fait. Par exemple pour $t \neq t_0$ la v-norme de la différence $\varphi_t - \varphi_{t_0}$ est égale à deux, indépendamment de la distance $r(t, t_0)$ de t à t_0. De plus, dans les applications il n'est pas toujours commode de manipuler la topologie (*)-faible dans rca (K), car celle-ci n'est pas métrisable. La τ-norme est susceptible d'être plus utile dans de pareils cas.

Pour les fonctions $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$, en plus de la convergence forte $\xrightarrow{v}$ et de la convergence (*)-faible $\overset{(*)}{\dashrightarrow}$ dans l'espace rca (K), il existe encore la convergence forte $\xrightarrow{\tau}$ et la convergence faible $\dashrightarrow$ dans l'espace $\Phi_0^\tau(\mathscr{B})$. La dernière est plus faible que la (*)-faible, car la condition de Lipchitz n'est pas vérifiée par toute fonction continue. Donc, pour les fonctions de $\Phi_0(\mathscr{B})$, on a compte tenu de (48)

$$\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0 \Rightarrow \sup \|\varphi_n\| < +\infty, \quad \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0. \tag{49}$$

D'autre part, d'après le lemme 5 de 4.4, il vient:

$$\{\varphi_n\} \subset S_0^\nu, \ \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0 \Leftrightarrow \{\varphi_n\} \subset S_0^\nu, \ \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0. \tag{50}$$

LEMME 7. *Si une suite de fonctions* $\varphi_n \in S_0^\nu$ *est de Cauchy pour une* τ*-norme, elle converge* $(*)$*-faiblement vers une fonction* $\varphi_0 \in S_0^\nu$.

DÉMONSTRATION. L'ensemble S_0^ν étant $(*)$-faiblement séquentiellement compact, pour prouver le lemme il suffit de vérifier que la suite considérée $\{\varphi_n\} \subset S_0^\nu$ ne peut admettre plus d'un point limite $(*)$-faible. De (49) et (50) il résulte que chaque point limite $(*)$-faible de la suite $\{\varphi_n\}$ est également point τ-limite de cette suite. Or, comme cette suite est de Cauchy pour la τ-norme, elle ne peut admettre plus d'un point τ-limite. Ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 3. *L'ensemble* S_0^ν *est* τ*-compact quel que soit* $\nu \in [0, \infty[$. *De plus les trois types de convergence sont confondus pour les fonctions de* S_0^ν *figurant dans* (49) *et* (50), *c'est-à-dire*

$$\varphi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \varphi_0 \Longleftrightarrow \varphi_n \dashrightarrow \varphi_0 \Longleftrightarrow \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi_0.$$

DÉMONSTRATION. Les assertions du théorème résultent immédiatement du lemme 7 et des relations (49) et (50).

COROLLAIRE. *Une suite de fonctions* $\varphi_n \in \mathbf{rca}\,(K)$ *converge* $(*)$*-faiblement vers une fonction* φ_0 *si et seulement si* $\sup \|\varphi_n\| < \infty$, $\varphi_n(K) \to \varphi_0(K)$ *et pour un (donc pour tout) point* $t_0 \in K$ *les fonctions* $\varphi_n' = \varphi_n - \varphi_n(K)\,\varphi_{t_0}$ *de* $\Phi_0(\mathscr{B})$ *sont* τ*-convergentes vers la fonction* $\varphi_0' = \varphi_0 - \varphi_0(K)\,\varphi_{t_0}$.

REMARQUE. D'après le lemme 3, qui a été prouvé dans 4.4, pour toute fonction $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$ on a

$$\|\varphi\|_\tau \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{diam} K \, \|\varphi\|.$$

D'autre part, les normes $\|\varphi\|$ et $\|\varphi\|_\tau$ ne sont de toute évidence équivalentes que pour des compacts finis K. D'où il suit que, si un compact K contient une infinité de points, l'espace normé $\Phi_0^\tau(\mathscr{B}_K)$ n'est pas complet. Cependant, en raison de la τ-complétude de l'ensemble S_0^ν, on peut se dispenser de la complétion de cet espace dans beaucoup d'applications.

Les propriétés de convergence $(*)$-faible citées sont essentiellement utilisées pour prouver que le problème de déplacement d'une masse admet une solution pour toute fonction initiale $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$. Il est aisé de voir que la convergence $(*)$-faible $\psi_n \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0$ dans $\mathbf{rca}\,(\tilde{K})$, $\tilde{K} = K \times K$, entraîne la convergence $(*)$-faible $\psi_n(K, \cdot) \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0(K, \cdot)$ et $\psi_n(\cdot, K) \overset{(*)}{\dashrightarrow} \psi_0(\cdot, K)$ dans $\mathbf{rca}\,(K)$. On désigne par $\|\psi\|$ la norme de la mesure ψ dans $\mathbf{rca}\,(\tilde{K})$.

THÉORÈME 4. *Quelle que soit la fonction* $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$, *il existe dans l'ensemble* Ψ_φ *une mesure* ψ, *telle que* $\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$ *et de plus*

$$\psi(K, K) = \varphi_+(K) = \varphi_-(K) = \frac{1}{2}\|\varphi\|, \tag{51}$$

c'est-à-dire

$$\psi(K, e) = \varphi_+(e), \quad \psi(e, K) = \varphi_-(e), \quad e \in \mathscr{B}. \tag{52}$$

DÉMONSTRATION. Soit une fonction arbitraire $\varphi \in \Phi_0(\mathscr{B})$. D'après le lemme 4 on peut construire pour elle une suite de fonctions $\varphi_n \in \Phi(\mathscr{B})$ à supports finis, telle que

$$\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi\|, \quad \varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi. \tag{53}$$

D'après le théorème 3, cette suite sera aussi (*)-faiblement convergente vers la fonction φ.

Les fonctions φ_n possédant des supports finis, d'après le corollaire 2 du théorème 2, il existe pour chacune d'elles une mesure $\psi_n \in \Psi_{\varphi_n}$ telle que $\tau(\psi_n) = \|\varphi_n\|_\tau$ et de plus

$$\|\psi_n\| = \psi_n(K, K) = (\varphi_n)_+(K) = (\varphi_n)_-(K) = \frac{1}{2}\|\varphi_n\|, \tag{54}$$

c'est-à-dire

$$\psi_n(K, e) = (\varphi_n)_+(e), \quad \psi_n(e, K) = (\varphi_n)_-(e), \quad e \in \mathscr{B}.$$

L'espace $C(\widetilde{K})$ est séparable, puisque $\widetilde{K}$ est un compact métrique (cf. théorème IV.4.3). Donc, les ensembles bornés dans $\mathbf{rca}(\widetilde{K}) = C(\widetilde{K})^*$ sont relativement compacts et métrisables pour la topologie (*)-faible (cf. théorème V.7.6). D'après (54), de la suite $\{\psi_n\}$ on peut extraire une suite partielle $\{\psi_{n_k}\}$ (*)-faiblement convergente vers une mesure ψ, et de plus

$$\|\psi\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|\psi_{n_k}\| \leqslant 1/2\,\|\varphi\|. \tag{55}$$

Montrons que la mesure ψ vérifie l'assertion du théorème.

Tout d'abord on a vu que la convergence (*)-faible des mesures ψ_{n_k} vers ψ entraîne celle, dans $\mathbf{rca}(K)$, des suites de mesures $\{\psi_{n_k}(K, \cdot)\}$ et $\{\psi_{n_k}(\cdot, K)\}$ respectivement vers $\psi(K, \cdot)$ et $\psi(\cdot, K)$. De plus $\varphi_{n_k} \xrightarrow{(*)} \varphi$. En passant à la limite (*)-faible dans les relations

$$\psi_{n_k}(K, \cdot) - \psi_{n_k}(\cdot, K) = \varphi_{n_k}^{\mathfrak{s}},$$

qui résultent de la définition des ensembles $\Psi_{\varphi_{n_k}}$, on obtient

$$\psi(K, \cdot) - \psi(\cdot, K) = \varphi,$$

c'est-à-dire la mesure ψ appartient à Ψ_φ. La réalisation des relations (51) et (52) découle de (55) et du lemme 6. Enfin, l'égalité

$$\tau(\psi) = \|\varphi\|_\tau$$

se déduit à partir des égalités $\tau(\psi_{n_k}) = \|\varphi_{n_k}\|_\tau$ par passage à la limite compte tenu de (53). Le théorème est entièrement prouvé.

REMARQUE. De ce théorème il suit notamment que si dans le problème initial de déplacement d'une masse, on remplace la condition (15) par la condition plus forte (53), c'est-à-dire si l'on rétrécit la classe de déplacements admissibles, le problème ne subit pas de changement.

Notons en conclusion que les résultats relatifs au problème de déplacement d'une masse et l'espace normé engendré par lui datent des années 50.

Par la suite ils ont été à maintes reprises utilisés, notamment en théorie de l'information, en théorie ergodique, de même qu'ils ont été complétés et développés dans diverses directions par de nombreux auteurs (voir par exemple S. Krein et Y. Petounine [1], Rubinstein [1] à [3], Verchik [1], [2], Friederichs [1], Rvatchev [1]). Soudakov [1] et Ekhlakov [1] ont obtenu d'intéressants résultats sur l'existence de transports optimaux à densités dans le problème de déplacement de la mesure de Lebesgue. Lévine [1], [3], [4] (voir également l'article antérieur cité dans ces travaux) étudie le cas où K est un compact quelconque, $r(t, s)$ une fonction continue positive sur $K \times K$. Cependant, même si la fonctionnelle (25) n'est plus une norme dans $\Phi_0(\mathscr{R})$, il n'empêche que de nombreux résultats restent valables dans cette situation plus générale. Notons certains d'eux. Considérons le problème, dual du problème de déplacement d'une masse, qui consiste à maximiser la fonctionnelle

$$\int_K u(t)\, d\varphi \tag{56}$$

sous les contraintes (17) sur $u \in C(K)$. Désignons par A la valeur optimale du problème de déplacement d'une masse, c'est-à-dire la borne inférieure de la fonctionnelle (16) sur l'ensemble des mesures ψ vérifiant (15). Désignons par B la valeur optimale du problème dual, c'est-à-dire la borne supérieure de la fonctionnelle (56) sous les contraintes (17). Il est aisé de voir que le critère de déplacement optimal contenu dans le théorème 2 (pour le cas où r est une métrique) peut être énoncé comme une relation de dualité $A = B$. Dans le cas général il peut ne pas exister de déplacement optimal, mais la relation de dualité indiquée a toujours un sens, et si $r(t, t) = 0$ $(t \in K)$ elle est réalisée. D'autre part, si $r(t, t) = 0$ $(t \in K)$ et r vérifie l'inégalité triangulaire, il existe un déplacement optimal de la masse ψ et le théorème 4 est valable, c'est-à-dire on peut se dispenser des transports transitoires. Ce dernier cas a été examiné par Alsynbaev, Imomnazarov et Rubinstein [1] qui ont construit un espace auxiliaire muni d'une norme non symétrique et qui ont établi tous les résultats exigés en procédant comme pour le cas classique.

CHAPITRE IX

OPÉRATEURS ADJOINTS ET COMPACTS

§ 1. Ensembles compacts dans des espaces normés

1.1. Dans I.5.2 nous avons indiqué le critère de compacité d'un ensemble dans l'espace $\mathbf{C}(K)$. Etablissons maintenant les conditions de compacité d'un ensemble dans l'espace $\mathbf{L}^p(D)$ $(1 < p < \infty$, D est un ensemble borné mesurable de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n)$.

Considérons une famille $\{\omega_h\}$ de fonctions d'une variable réelle, dépendant d'un paramètre strictement positif réel et possédant les propriétés suivantes:

1) $0 \leqslant \omega_h(\xi) \leqslant M$ $(\xi \geqslant 0,\ h > 0)$;

2) $\omega_h(\xi) = 0$ pour $\xi \geqslant h$;

3) ω_h est continue pour $\xi < h$;

4) si l'on désigne par t un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et par $|t|$ sa longueur, pour tous les $h > 0$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega_h(|t|)\,dt = v_h,$$

où v_h est le volume d'une boule n-dimensionnelle de rayon h; d'après la propriété 2) l'intégration peut être étendue à une boule G_h de dimension n, centrée en l'origine des coordonnées.

Prolongeons les fonctions de $\mathbf{L}^p(D)$ à $\mathbf{R}^n$ tout entier en les supposant nulles en dehors de l'ensemble D.

Désignons encore par $G_h(s)$ la boule de dimension n, de rayon h et de centre $s \in \mathbf{R}^n$ et posons pour $x \in \mathbf{L}^p(D)$

$$x_h(s) = \frac{1}{v_h} \int_{\mathbf{R}^n} \omega_h(s-t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t)\, x(t)\, dt \quad (s \in \mathbf{R}^n), \quad (1)$$

où pour simplifier $\omega_h(s-t) = \omega_h(|s-t|)$.

La fonction x_h est appelée *moyenne au sens de Stéklov* de la fonction x ou fonction moyenne (par rapport à x); la famille de fonctions $\{\omega_h\}$ est appelée *noyau de moyennisation*. Si pour ω_h on prend la fonction

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < h, \\ 0, & \xi \geqslant h. \end{cases}$$

alors $x_h(s)$ est la valeur moyenne de la fonction x sur la boule $G_h(s)$ au sens ordinaire de ce terme.

LEMME 1. *Soit $x \in L^p(D)$. Pour tout $h > 0$ la fonction moyenne x_h est continue et de plus*

$$|x_h(s)| \leqslant \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \left\{ \int_{G_h(s)} |(x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} \leqslant \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \|x\| \quad (s \in \mathbf{R}^n). \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. On a

$$x_h(s) - x_h(s') = \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s)} \omega_h(s-t)\, x(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{v_h} \int_{G_h(s')} \omega_h(s'-t)\, x(t)\, dt \quad (s, s' \in \mathbf{R}^n).$$

Supposons que $0 < \lambda < 1$ et posons

$$A'_\lambda = G_{\lambda h}(s) \cap G_{\lambda h}(s'), \quad A''_\lambda = [G_h(s) \cup G_h(s')] \setminus A'_\lambda.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$|x_h(s) - x_h(s')| \leqslant \frac{1}{v_h} \Big[\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| \, |x(t)| \, dt +$$

$$+ 2M \int_{A''_\lambda} |x(t)| \, dt \Big] \leqslant \frac{1}{v_h} \Big[\Big(\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t|^q \, dt \Big)^{1/q} \times$$

$$\times \Big(\int_{A'_\lambda} |x(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} + 2M \Big(\int_{A''_\lambda} |x(t)|^p \, dt \Big)^{1/p} (\text{mes}\, A''_\lambda)^{1/q} \Big] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|x\|}{v_h} \Big\{ \Big[\int_{A'_\lambda} |\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)|^q \, dt \Big]^{1/q} + 2M [\text{mes}\, A''_\lambda]^{1/q} \Big\}.$$

Si $|s' - s| \to 0$ et $\lambda \to 1$, il est évident que mes $A''_\lambda \to 0$. Donc, pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver des $\delta > 0$ et $\lambda_0 < 1$, tels que pour $|s' - s| < \delta$ et $\lambda = \lambda_0$ le second terme de l'accolade soit $< \varepsilon$.

La fonction $\omega_h(s - t)$ est uniformément continue, comme fonction de t, sur l'ensemble $G_{\lambda_0 h}(s)$ donc on peut exhiber un $\delta_0 \leqslant \delta$ tel que

$$|\omega_h(s-t) - \omega_h(s'-t)| \leqslant \varepsilon \quad (|s' - s| < \delta_0, \ t \in A'_{\lambda_0}).$$

En définitive on a

$$|x_h(s) - x_h(s')| \leqslant \frac{\varepsilon \|x\|}{v_h} (v_h + 1) \quad (|s - s'| \leqslant \delta_0). \tag{3}$$

Ce qui prouve la continuité de x_h.

La majoration (2) se déduit de la formule (1) grâce à l'inégalité de Hölder.

REMARQUE. La quantité δ_0 trouvée dans la démonstration du lemme ne dépend pas de la fonction x.

LEMME 2. *Si x est une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}^n$, alors pour $h \to 0$ les fonctions moyennes x_h tendent uniformément vers x sur $\mathbf{R}^n$.*

DÉMONSTRATION. Comme

$$x(s) = \frac{1}{v_h} \int\limits_{G_h(s)} \omega_h(s-t)\, x(s)\, dt,$$

il vient

$$|x_h(s) - x(s)| \leqslant \frac{1}{v_h} \int\limits_{G_h(s)} \omega_h(s-t)\, |x(t) - x(s)|\, dt.$$

Comme $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$ pour h assez petit, on obtient

$$|x_h(s) - x(s)| \leqslant \frac{\varepsilon}{v_h} \int\limits_{G_h(s)} \omega_h(s-t)\, dt = \varepsilon$$

simultanément pour tous les $s \in \mathbf{R}^n$.

En associant à l'élément $x \in \mathbf{L}^p(D)$ la fonction moyenne x_h, on obtient un opérateur linéaire défini dans $\mathbf{L}^p(D)$. Notons-le U_h: $U_h(x) = x_h$. Il est aisé de voir que U_h est un opérateur continu de $\mathbf{L}^p(D)$ dans $\mathbf{C}(Q)$, où Q est un ensemble fermé borné quelconque contenant D. En effet, d'après le lemme 1, la fonction x_h est continue sur $\mathbf{R}^n$, donc sur Q, et de (2) il vient

$$\|x_h\|_{\mathbf{C}(Q)} = \max_{s \in Q} |x_h(s)| \leqslant \frac{M}{(v_h)^{1/p}} \|x\|_{\mathbf{L}^p},$$

d'où

$$\|U_h\| \leqslant \frac{M}{v_h^{1/p}}.$$

Si l'on traite U_h comme un opérateur linéaire dans l'espace $\mathbf{L}^p(D)$, la majoration de la norme peut être essentiellement améliorée.

LEMME 3. *Si U_h est considéré comme un opérateur dans l'espace $\mathbf{L}^p(D)$, alors*

$$\|U_h\| \leqslant M \quad (h > 0). \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité (2) donne

$$\|x_h\|_{\mathbf{L}^p(D)} = \Big[\int\limits_D |x_h(s)|^p\, ds\Big]^{1/p} \leqslant \Big\{\frac{M^p}{v_h} \int\limits_D \Big[\int\limits_{G_h(s)} |x(t)|^p dt\Big]\, ds\Big\}^{1/p}.$$

En intervertissant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\| x_h \|_{L^p(D)} \leqslant \left\{ \frac{M^p}{v_h} \int_D \left[\int_{G_h(t)} | x(t) |^p \, ds \right] dt \right\}^{1/p} = M \left[\int_D | x(t) |^p \, dt \right]^{1/p},$$

ce qui exprime (4).

LEMME 4. *Pour $h \to 0$ on a $x_h \to x$ dans l'espace $L^p(D)$.*

DÉMONSTRATION. Soit D_0 un cube fermé dans R^n, contenant D et tellement grand qu'il existe un cube fermé D_1 contenant D et contenu à son tour dans le cube D_0. Démontrons que l'ensemble $\mathring{C}(D_0)$ des fonctions continues sur D_0 et s'annulant sur la frontière du cube D_0, est dense dans $L^p(D)$. Supposons que $x \in L^p(D_0)$. L'ensemble des fonctions presque partout bornées étant dense dans $L^p(D_0)$, on peut admettre que la fonction x est bornée sur D_0. Supposons par exemple que $| x(t) | \leqslant K$ pour $t \in D_0$. Prenons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après le théorème de Lusin, il existe une fonction φ continue sur D_0, confondue avec x partout sauf sur un ensemble $A \subset D_0$, tel que mes $A \leqslant \varepsilon$; de plus $| \varphi(t) | \leqslant K$ pour $t \in D_0$. Choisissons le cube D_1 tel que mes $(D_0 \setminus D_1) < \varepsilon$ et construisons, en utilisant le théorème de prolongement des fonctions continues (Natanson [II]), une fonction x_0 continue sur D_0, confondue avec φ sur D_1 et nulle sur la frontière du cube D_0. D'après le théorème cité, on peut choisir cette fonction telle que $| x_0(t) | \leqslant K$ pour $t \in D_0$. Majorons la norme de la différence $x - x_0$ (dans $L^p(D_0)$). On a

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x - \varphi \| + \| \varphi - x_0 \|.$$

Or

$$\| x - \varphi \| = \left[\int_{D_0} | x(t) - \varphi(t) |^p \, dt \right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_A | x(t) - \varphi(t) |^p \, dt \right]^{1/p} \leqslant 2K\varepsilon^{1/p},$$

$$\| \varphi - x_0 \| = \left[\int_{D_0} | \varphi(t) - x_0(t) |^p \, dt \right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_{D_0 \setminus D_1} | \varphi(t) - x_0(t) |^p \, dt \right]^{1/p} \leqslant 2K\varepsilon^{1/p},$$

d'où

$$\| x - x_0 \| \leqslant 4K\varepsilon^{1/p}.$$

Reste à remarquer que $x_0 \in \mathring{C}(D_0)$.

Si x est une fonction de $\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$, en la supposant nulle en dehors de D_0, on peut d'après le lemme 2 conclure que $x_h \to x$ uniformément dans $\mathbf{R}^n$, donc dans D_0. *A fortiori* $x_h \to x$ dans $\mathbf{L}^p(D_0)$. D'après le lemme 3, les normes des opérateurs U_h sont bornées dans leur ensemble. Or $\mathring{\mathbf{C}}(D_0)$ est dense dans $\mathbf{L}^p(D_0)$, donc on peut se servir du théorème de Banach-Steinhaus (VII.1.2), et la convergence $x_h \to x$ a lieu sur l'espace $\mathbf{L}^p(D_0)$ tout entier. Mais la fonction de $\mathbf{L}^p(D)$ prolongeable par zéro en dehors de D appartient à $\mathbf{L}^p(D_0)$, donc la convergence a lieu sur $\mathbf{L}^p(D)$ également. Ce qui démontre le lemme.

1.2. Indiquons maintenant les critères de compacité d'un ensemble dans l'espace $\mathbf{L}^p(D)$.

THÉORÈME 1 (Kolmogorov). *Pour qu'un ensemble E soit relativement compact dans $\mathbf{L}^p(D)$ il est nécessaire et suffisant que*

1) *E soit borné*;

2) *les fonctions moyennes soient convergentes (dans $\mathbf{L}^p(D)$) uniformément sur E vers les fonctions génératrices, c'est-à-dire*

$$x_h \to x \quad \textit{uniformément sur } E.$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que 1) est nécessaire. Montrons que 2) l'est également. E étant relativement compact, il admet un ε-réseau fini que nous supposerons être $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$. D'après le lemme 4, pour h ($h \leqslant h_\varepsilon$) assez petit on a $\| x_h^{(k)} - x^{(k)} \| \leqslant \varepsilon$ ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Pour tout $x \in E$ trouvons $x^{(k)}$ tel que

$$\| x - x^{(k)} \| \leqslant \varepsilon.$$

Donc

$$\| x_h - x \| = \| U_h(x) - x \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U_h(x - x^{(k)}) \| + \| x_h^{(k)} - x^{(k)} \| + \| x - x^{(k)} \| < 2\varepsilon + M\varepsilon.$$

Conditions suffisantes. Désignons par E_h l'ensemble des éléments de la forme $U_h(x)$, où $x \in E$. D'après le lemme 1, on a $E_h \subset \mathbf{C}(\overline{D})$. Prouvons que E_h est relativement compact dans $\mathbf{C}(\overline{D})$. La première condition de compacité d'un ensemble dans l'espace $\mathbf{C}(\overline{D})$, savoir E_h est borné dans $\mathbf{C}(\overline{D})$, est satisfaite d'après l'inégalité (2). L'équicontinuité des fonctions de E_h résulte de l'inégalité (3).

Donc, pour tout h l'ensemble E_h est relativement compact dans $\mathbf{C}(\overline{D})$ et *à fortiori* dans $\mathbf{L}^p(D)$. D'après la condition 2) il existe un h_0 aussi petit que l'on veut tel que $\| x - x_{h_0} \| = \| x - U_{h_0} x \| < \varepsilon$, $\forall x \in E$. Par suite, E_h est un ε-réseau relativement compact pour E. Le théorème de Hausdorff (cf. I.5.1) nous dit que l'ensemble E est relativement compact.

Ceci achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. Le critère de compacité indiqué dans le théorème est valable aussi dans l'espace $L^1(D)$ (cf. Toulaïkov [1]).

1.3. Indiquons un autre critère de compacité d'un ensemble dans l'espace $L^p(D)$. Pour ne pas alourdir les énoncés on se bornera au cas où D est l'intervalle $[a, b]$.

THÉORÈME 2 (M. Riesz). *Pour qu'un ensemble E soit relativement compact dans un espace $L^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$ il est nécessaire et suffisant que*

1) *E soit borné;*

2) *les fonctions translatées soient convergentes vers la fonction donnée uniformément en $x \in E$, c'est-à-dire $\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p dt \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformément en $x \in E$.*

DÉMONSTRATION. Les *conditions* sont *nécessaires*. Soit dans l'espace $L^p(a, b)$ l'opérateur de translation V_τ

$$y = V_\tau(x), \quad y(t) = x(t + \tau).$$

De toute évidence, V_τ est opérateur linéaire dans $L^p(a, b)$ et

$$\| V_\tau \| \leqslant 1. \tag{5}$$

Prouvons que

$$V_\tau(x) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} x \quad (\text{dans } L^p(a, b)). \tag{6}$$

En effet, si x est une fonction continue,

$$\int_a^b |x(t+\tau) - x(t)|^p \leqslant \int_a^b \varepsilon^p dt = \varepsilon^p (b-a) \quad (\tau \leqslant \tau_\varepsilon)$$

et par suite (6) est réalisée. Comme l'ensemble des fonctions continues est dense dans $L^p(a, b)$, le théorème de Banach-Steinhaus est valable en vertu de (5), de sorte que (6) a lieu pour tout $x \in L^p(a, b)$.

La suite de la démonstration est une répétition intégrale de celle du théorème 1.

Les *conditions* sont *suffisantes*. Montrons que si sont réunies les conditions du théorème, celles du théorème 1 le seront également sous réserve que pour noyau de moyennisation l'on prenne

$$\omega_h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < h, \\ 0, & \xi \geqslant h \end{cases} \quad (h > 0).$$

Dans les notations précédentes on a

$$\| U_h(x) - x \|^p = \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left| \int_{-h}^{h} [x(t+\tau) - x(t)]\, d\tau \right|^p dt.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégrale intérieure et intervertissant ensuite l'ordre d'intégration, on obtient

$$\| U_h(x) - x^p \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2h)^p} \int_a^b \left\{ \left[\int_{-h}^{h} 1^q\, d\tau \right]^{p/q} \left[\int_{-h}^{h} | x(t+\tau) - x(t) |^p\, d\tau \right] \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} d\tau \int_a^b | x(t+\tau) - x(t) |^p\, dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \| V_\tau(x) - x \|^p\, d\tau.$$

Si la deuxième condition du théorème est réalisée, pour un $\varepsilon > 0$ il existe $h_0 > 0$ tel que pour $| \tau | \leqslant h_0$ on a $\| V_\tau(x) - x \|^p < \varepsilon$, $\forall x \in E$. et en vertu de l'inégalité établie plus haut

$$\| U_h(x) - x \|^p \leqslant \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \varepsilon\, d\tau = \varepsilon.$$

La deuxième condition du théorème 1 est donc satisfaite. Les premières conditions des deux théorèmes étant confondues, l'ensemble E est justiciable du théorème 1 qui dit que E est relativement compact.

1.4. Formulons enfin un critère général de compacité d'un ensemble dans un espace normé (cf. Guelfand [1]).

THÉORÈME 3 (Guelfand). *Pour qu'un ensemble E soit relativement compact dans un B-espace* X *il est nécessaire et, si* X *est séparable, suffisant que pour toute suite de fonctionnelles* $\{f_n\}$ *(*)-faiblement convergente vers zéro*

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{7}$$

uniformément sur E, c'est-à-dire à chaque $\varepsilon > 0$ on puisse associer n_ε tel que pour $n > n_\varepsilon$

$$| f_n(x) | < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

DÉMONSTRATION. La *condition* est *suffisante*. Prouvons d'abord que E est borné. En effet, dans le cas contraire on pourrait exhiber une suite d'éléments $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ telle que $\| x_n \| = \gamma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. D'après le théorème relatif au nombre suffisant de fonctionnelles, il existerait des fonctionnelles f'_n, $\| f'_n \| = 1$ et $f'_n(x_n) = \| x_n \|$. En

posant $f_n = \frac{1}{\gamma_n} f'_n$, on obtiendrait une suite $\{f_n\}$ convergeant vers zéro mais en même temps

$$f_n(x_n) = \gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Donc $f_n(x) \to 0$ non uniformément sur E.

Appelons B la boule unité fermée de l'espace $\mathbf{X}^*$, munie de la topologie (*)-faible. Nous savons déjà (voir III.3.1) que chaque élément $x \in \mathbf{X}$ peut être traité comme une fonction continue sur $(\mathbf{X}^*, \sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$, donc sur B. Désignons par φ l'injection de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{C}(B)$. Prouvons que l'ensemble $\varphi(E)$ est relativement compact dans le B-espace $\mathbf{C}(B)$. On voit aisément que l'application φ est une isométrie linéaire, ce qui prouve que E est relativement compact. B est un compact métrique (de métrique r) d'après le théorème V.7.6. Vérifions que les conditions du théorème d'Arzelá-Ascoli (cf. théorème I.5.4) sont réunies pour l'ensemble $\varphi(E)$. Puisque nous avons démontré que l'ensemble E est borné, il nous reste à nous assurer qu'il est équicontinu. Supposons le contraire. Cela signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que quel que soit $\delta > 0$ on peut exhiber des $x_\delta \in E$ et $f_n, f'_n \in B$, tels que $r(f_n, f'_n) < \delta$ et

$$|f_n(x_\delta) - f'_n(x_\delta)| \geqslant \varepsilon.$$

En considérant successivement $\delta = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$ on obtient une suite d'éléments x_n de E et deux suites de fonctionnelles $\{f_n\}$, $\{f'_n\} \subset B$, telles que

$$r(f_n, f'_n) < 1/n$$

et

$$|f_n(x_n) - f'_n(x_n)| \geqslant \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8}$$

B étant un compact métrique, on peut admettre (en passant au besoin aux suites partielles) que $f_n \to f_0$ $(\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$, $f_0 \in B$. Comme $r(f_n, f'_n) < 1/n$, on a $f'_n \to f_0$ $(\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$. Puisque $f_n - f'_n \to \mathbf{0}$ pour la topologie (*)-faible, en vertu de (7) $f_n(x) - f'_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément sur E, ce qui contredit (8).

La *condition* est *nécessaire*. Nous allons montrer que, si une suite $\{U_n\}$ d'opérateurs linéaires continus d'un espace $\mathbf{X}$ dans un espace $\mathbf{Y}$ normé est telle que

$$U_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}, \quad \forall x \in \mathbf{X}, \tag{9}$$

alors dans (9) la convergence est uniforme sur E, pourvu que E soit relativement compact.

Comme $\mathbf{X}$ est un B-espace, il résulte de (9) que les normes des opérateurs U_n sont bornées (cf. VII.1.1) : $\|U_n\| \leqslant M$. L'ensemble E étant compact, il admet un $\frac{\varepsilon}{2M}$-réseau fini : $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Pour les n

assez grands on a

$$\| U_n(x_k) \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

D'autre part, $\forall x \in E$, $\exists x_k$ tel que

$$\| x - x_k \| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{11}$$

Pour les mêmes n on aura alors

$$\| U_n(x) \| \leqslant \| U_n(x_k) \| + \| U_n(x - x_k) \| < \frac{\varepsilon}{2} + \| U_n \| \, \| x - x_k \| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire $U_n(x) \to 0$ uniformément sur E.

Remarque. La condition suffisante du théorème 3 est en général mise en défaut si X n'est pas séparable (cf. Boukhvalov [1]; ibid. cf. généralisations des théorèmes 3 et V.7.8).

§ 2. Opérateurs compacts

2.1. On a indiqué au chapitre V que tout opérateur linéaire d'un espace de dimension finie dans un autre espace, de dimension finie aussi, est défini par une matrice rectangulaire. L'étude de ces opérateurs est une chose relativement aisée, puisque les propriétés des matrices finies sont bien connues de l'algèbre. Cependant, si l'on se place dans un espace normé quelconque, il n'est pas toujours possible d'établir pour les opérateurs des propriétés analogues à celles de opérateurs « finidimensionnels ». De ce point de vue, les plus pros ches de ces derniers sont les opérateurs compacts. Les principales propriétés des opérateurs compacts ne seront mises en évidence qu'au chapitre XIII, tome 2. Dans ce paragraphe, nous ne donnons que la définition et quelques corollaires simples qui en découlent et nous n'étudions de manière plus approfondie que les opérateurs compacts dans un espace hilbertien.

Un opérateur U d'un espace normé X dans un espace normé Y est *compact* s'il applique tout ensemble borné de X dans un ensemble relativement compact de Y. Si U est continu on dit qu'il est *complètement continu*.

Dans la suite, nous utiliserons cette définition presque exclusivement pour le cas où U est un opérateur linéaire. On démontre sans peine que tout opérateur linéaire compact est complètement continu. En effet, l'image de la boule unité de X est un ensemble relativement compact, donc borné, de Y, de sorte que $\sup\limits_{\| x \| \leqslant 1} \| U(x) \| < \infty$, c'est-à-dire U est borné.

Notons enfin que dans le cas indiqué, on peut se contenter d'exiger dans la définition que l'image de la boule unité (ou de toute autre

boule) par l'opérateur U soit un ensemble relativement compact. Sauf mention du contraire, tout opérateur compact sera opérateur linéaire compact.

La définition de l'opérateur compact et les propriétés élémentaires de cette classe d'opérateurs, que nous allons étudier dans ce paragraphe, ont été énoncées par Hilbert (voir Hilbert) pour l'espace $\mathbf{L}^2$. Dans le cas général, voir Banach.

Les opérateurs de dimension finie cités ci-dessus sont manifestement compacts. Un autre exemple trivial d'opérateur compact est une fonctionnelle linéaire continue dans un espace $\mathbf{X}$, traitée comme un opérateur de $\mathbf{X}$ dans l'espace des scalaires.

L'opérateur U_h (voir 1.1) introduit au paragraphe 1 est un exemple d'opérateur compact plus intéressant. En effet, il est immédiat de vérifier que la compacité de l'ensemble $U_h(E)$ découle du seul fait que E est borné.

Considérons enfin l'opérateur intégral U de noyau continu

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

On conviendra que U est un opérateur de $\mathbf{C}[a, b]$ dans $\mathbf{C}[a, b]$. Prouvons que U est compact. En effet, si E est un ensemble borné dans $\mathbf{C}[a, b]$ ($\| x \| \leqslant M$ pour $x \in E$), alors $U(E)$ est de même manifestement borné ($\| y \| \leqslant M \| U \|$ pour $y \in U(E)$). D'autre part, si $x \in \mathbf{X}$, alors ($y = U(x)$)

$$| y(s') - y(s) | \leqslant \int_a^b | K(s', t) - K(s, t) | \, | x(t) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_a^b | K(s', t) - K(s, t) | \, dt.$$

Si s et s' sont assez proches, le second membre est aussi petit que l'on veut indépendamment de $x \in E$. Ceci exprime que les fonctions de l'ensemble $U(E)$ sont équicontinues. Donc, $U(E)$ est relativement compact dans $\mathbf{C}[a, b]$.

En utilisant le théorème IX.1.2, on démontre que U est compact si on le regarde comme un opérateur de $\mathbf{L}^p(a, b)$ dans $\mathbf{L}^r(a, b)$ ($1 < p, r < \infty$).

Tout ce qui vient d'être dit et les démonstrations effectuées sont valables dans les espaces $\mathbf{C}(K)$ et $\mathbf{L}^p(D)$.

2.2. Nous allons prouver trois théorèmes simples concernant les opérateurs compacts. Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ des espaces normés.

THÉORÈME 1. *Si U est un opérateur compact de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$, le domaine de valeurs $\mathbf{Y}_0 = \Delta_U$ de l'opérateur U est séparable.*

DÉMONSTRATION. Soient B_n la boule de X de centre 0 et de rayon n, Q_n l'ensemble $U(B_n)$ de Y, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme $y = U(x)$ $(x \in B_n)$. Comme $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Or, $\overline{Q}_n$ est compacte, donc séparable (I.5.1). Et par suite Y_0 est séparable.

THÉORÈME 2. a) *Toute combinaison linéaire* $U = \alpha U_1 + \beta U_2$ *d'opérateurs compacts* U_1 *et* U_2 *de* X *dans* Y *est un opérateur compact.*

b) *Si* $U \in B(X, Y)$ *et* $V \in B(Y, Z)$, *le produit* VU *est compact pourvu que l'un de ces opérateurs le soit.*

DÉMONSTRATION. a) Soient E un ensemble borné dans X et $\{y_n\} \subset \subset U(E)$. On a

$$y_n = \alpha U_1(x_n) + \beta U_2(x_n) \quad (x_n \in E, \quad n \in \mathbb{N}).$$

L'opérateur U_1 étant compact, de la suite $\{U_1(x_n)\}$ on peut extraire une suite partielle convergente $\{U_1(x_{n_k})\}$. Pour la même raison on peut extraire une suite partielle convergente de la suite $\{U_2(x_{n_k})\}$. Supposons que c'est $\{U_2(x_{n_{k_j}})\}$. Il est évident que la suite $\{U(x_{n_{k_j}})\}$ est convergente, c'est-à-dire $U(E)$ est relativement compact.

b) Cette proposition résulte immédiatement du fait qu'un opérateur linéaire continu envoie un ensemble borné dans un ensemble borné et un ensemble compact dans un ensemble compact.

THÉORÈME 3. *Soit* $\{U_n\}$ *une suite d'opérateurs linéaires continus de* X *dans un B-espace* Y, *convergeant vers un opérateur* U (*dans l'espace* $B(X, Y)$). *Si* U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *sont compacts* U *l'est également.*

DÉMONSTRATION. Soit B la boule unité de l'espace X. Montrons que $U(B)$ est relativement compact. Prenons U_{n_0} tel que

$$\| U_{n_0} - U \| < \varepsilon.$$

L'ensemble $U_{n_0}(B)$ est compact. C'est un ε-réseau pour $U(B)$ puisque pour $y \in U(B)$ l'on a

$$\| y - y_{n_0} \| = \| U(x) - U_{n_0}(x) \| \leqslant \| U - U_{n_0} \| \, \| x \| < \varepsilon$$
$$(y_{n_0} = U_{n_0}(x), \quad y = U(x), \quad x \in B).$$

D'après la remarque qui suit le théorème de Hausdorff, $U(B)$ est relativement compact. Or cela exprime que U est compact.

REMARQUE. Dans les conditions du théorème on ne peut pas remplacer la convergence dans l'espace des opérateurs, c'est-à-dire la convergence en norme, par la convergence dans X. En effet, on a vu

plus haut que les opérateurs U_h (cf. IX.1.1) sont compacts et

$$U_h(x) \to x \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^p \quad (x \in \mathbf{L}^p).$$

Mais l'opérateur identique n'est pas compact dans $\mathbf{L}^p$. On peut reformuler le théorème IV.1.3 comme suit: une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur identique soit compact dans un espace normé $\mathbf{X}$ est que $\mathbf{X}$ soit de dimension finie.

§ 3. Opérateurs adjoints

3.1. Soient donnés un opérateur linéaire continu U d'un espace normé $\mathbf{X}$ dans un espace normé $\mathbf{Y}$, g une fonctionnelle linéaire continue dans $\mathbf{Y}$ (g est un élément de l'espace dual $\mathbf{Y}^*$). Pour $x \in \mathbf{X}$ posons

$$f(x) = g(U(x)). \tag{1}$$

La fonctionnelle f est donc le produit de la fonctionnelle g regardée comme un opérateur linéaire de $\mathbf{Y}$ dans l'espace des nombres réels (ou complexes), par l'opérateur U: $f = gU$. Donc, f est une fonctionnelle linéaire continue, et de plus

$$\| f \| \leqslant \| U \| \, \| g \|. \tag{2}$$

Ainsi, la formule (1) associe à toute fonctionnelle $g \in \mathbf{Y}^*$ une fonctionnelle $f \in \mathbf{X}^*$. L'opérateur qui réalise cette correspondance s'appelle opérateur *adjoint* de U et se note U^*, c'est-à-dire $f = U^*g$ exprime (1) ou ce qui revient au même $U^*(g) = gU$.

Donc, à tout opérateur $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est associé un opérateur adjoint U^* de $\mathbf{Y}^*$ dans $\mathbf{X}^*$. Nous montrons que $U^* \in B(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$.

THÉORÈME 1. *L'opérateur adjoint U^* est un opérateur linéaire continu de $\mathbf{Y}^*$ dans $\mathbf{X}^*$, et*

$$\| U^* \| = \| U \|. \tag{3}$$

DÉMONSTRATION. Vérifions que l'opérateur U^* est linéaire. Si $g = \lambda g_1 + \mu g_2$ et $f = U^*(g)$, on a

$$f(x) = g(U(x)) = \bar{\lambda} g_1(U(x)) + \bar{\mu} g_2(U(x)) = \bar{\lambda} U^*(g_1)(x) + \bar{\mu} U^*(g_2)(x).$$

D'où

$$U^*(g) = \lambda U(g_1) + \mu U(g_2).$$

L'inégalité (2) nous dit que U^* est borné:

$$\| U^* \| \leqslant \| U \|.$$

Prenons un $x \in \mathbf{X}$ quelconque et soit $y = U(x)$. Construisons une fonctionnelle $g \in \mathbf{Y}^*$ telle que

$$(y) = \| y \|, \quad \| g \| = 1.$$

On a

$$\| U(x) \| = \| y \| = g(y) = (gU)(x) =$$
$$= U^*(g)(x) \leqslant \| U^*(g) \| \, \| x \| \leqslant \| U^* \| \, \| x \|,$$

d'où il est clair que

$$\| U \| \leqslant \| U^* \|.$$

Notons encore que si U_1 et U_2 sont deux opérateurs linéaires continues de X dans Y et

$$U = \lambda U_1 + \mu U_2.$$

alors

$$U^* = \bar{\lambda} U_1^* + \bar{\mu} U_2^*.$$

En effet ($g \in Y^*$, $x \in X$)

$$U^*(g)(x) = \lambda [g(U_1(x))] + \mu [g(U_2(x))] = (\bar{\lambda} g)(U_1(x)) +$$
$$+ (\bar{\mu} g)(U_2(x)) = U_1^*(\bar{\lambda} g)(x) + U_2^*(\bar{\mu} g)(x) = [\bar{\lambda} U_1^*(g) + \bar{\mu} U_2^*(g)](x).$$

Soient V et U des opérateurs linéaires continus de X dans Y et respectivement de Y dans Z. Si $W = UV$, alors $W^* = V^* U^*$.

En effet, si l'on pose $f = W^*(g)$, $f_1 = U^*(g)$ ($g \in Z^*$), on peut écrire

$$f(x) = g(W(x)) = g(UV(x)) = f_1(V(x)) = V^* U^*(g)(x)$$
$$(x \in X).$$

3.2. Soient X et Y des espaces réels de dimensions m et n finies, U un opérateur linéaire de X dans Y. L'opérateur U est défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

au moyen des formules

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{4}$$

où

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in X, \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in Y.$$

Soit $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ une fonctionnelle dans Y

$$g(y) = \sum_{j=1}^{n} \psi_i \eta_i.$$

La fonctionnelle $f = U^*g$ sera de la forme

$$f(x) = g(U(x)) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\xi_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\psi_j\right) \xi_k,$$

c'est-à-dire $f = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, où

$$\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\psi_j = \sum_{j=1}^{n} a^*_{kj}\psi_j$$

$$(a^*_{kj} = a_{jk}; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m).$$

Donc, l'opérateur U^* est défini par la matrice

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \ldots & a^*_{1n} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & \ldots & a^*_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^*_{m1} & a^*_{m2} & \ldots & a^*_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

qui est la transposée de A.

Supposons maintenant que U est un opérateur intégral de noyau continu

$$y = U(x), \quad y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

On admettra que U est un opérateur dans $\mathbf{L}^p(a, b)$ $(1 < p < \infty)$.

En prenant la fonctionnelle $g \in (\mathbf{L}^p)^*$

$$g(y) = \int_a^b \psi(s)\, y(s)\, ds \qquad \left(y \in \mathbf{L}^p, \quad \psi \in \mathbf{L}^p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

on aura

$$g(U(x)) = \int_a^b \psi(s) \left[\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt\right] ds =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\, \psi(s)\, ds\right] x(t)\, dt = \int_a^b \varphi(t)\, x(t)\, dt.$$

Donc, l'opérateur adjoint U^* est aussi un opérateur intégral de noyau $K^*(s, t) = K(t, s)$:

$$f = U^*g, \qquad \varphi(t) = \int_a^b K^*(t, s)\, \psi(s)\, ds = \int_a^b K(s, t)\, \psi(s)\, ds.$$

REMARQUE. Si l'on se place dans des espaces complexes de dimension finie, l'opérateur adjoint sera déterminé par la matrice

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

$$(a_{jk}^* = \overline{a_{kj}}; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de se rappeler que les fonctionnelles $f = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathbf{X}^*$ et $g = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in \mathbf{Y}^*$ sont définies par les formules

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\varphi}_k \xi_k \quad (x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbf{X}),$$

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\psi}_k \eta_k \quad (y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbf{Y}).$$

De façon analogue, dans le cas d'un espace $\mathbf{L}^p$ complexe l'opérateur adjoint d'un opérateur intégral sera intégral et de noyau

$$K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}.$$

3.3. On définit également l'adjoint de U^*. Cet opérateur est appelé *biadjoint* de U et noté U^{**}. D'après le théorème 1, c'est un opérateur linéaire continu de $\mathbf{X}^{**}$ dans $\mathbf{Y}^{**}$. Nous allons identifier l'espace $\mathbf{X}$ à un sous-espace de $\mathbf{X}^{**}$ et l'espace $\mathbf{Y}$ à un sous-espace de $\mathbf{Y}^{**}$, et prouver que l'opérateur U^{**} est confondu avec U sur $\mathbf{X}$. Soient π_1 et π_2 les injections canoniques de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}^{**}$ et de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{Y}^{**}$ respectivement.

THÉORÈME 2. *Pour tout $x \in \mathbf{X}$ on a*

$$U^{**}(\pi_1(x)) = \pi_2(U(x)). \tag{5}$$

DÉMONSTRATION. Si $g \in \mathbf{Y}^*$, alors

$$[U^{**}(\pi_1(x))](g) = [\pi_1(x)](U^*(g)) =$$
$$= \overline{[U^*(g)](x)} = \overline{g(U(x))} = [\pi_2(U(x))](g),$$

d'où résulte (5).

COROLLAIRE. *Si l'espace $\mathbf{X}$ est réflexif, alors $U^{**} = U$.*

(Cette égalité doit être comprise dans le sens que les éléments correspondants des espaces $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^{**}$ et des espaces $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Y}^{**}$ sont supposés identifiés.)

3.4. La propriété de compacité est préservée par le passage à l'opérateur adjoint.

THÉORÈME 3. *Soit U un opérateur linéaire continu d'un espace normé* X *dans un B-espace* Y. *Si l'un des opérateurs U et U^* est compact, l'autre l'est également.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que l'opérateur U est compact et prenons une suite bornée $\{g_n\}$ de fonctionnelles dans Y ($\| g_n \| \leqslant M$; $n = 1, 2, \ldots$). Montrons que de la suite des fonctionnelles $\{U^* g_n\}$ on peut extraire une suite partielle convergente. Ceci prouvera la compacité de l'opérateur U^*.

Désignons par Y_0 l'adhérence de l'ensemble U (X). D'après le théorème IX.2.1, Y_0 est un espace séparable. Nous considérons les fonctionnelles g_n uniquement sur Y_0. La suite de fonctionnelles $\{g_n\}$ étant bornée, d'après le théorème V.7.6 on peut en extraire une suite partielle (*)-faiblement convergente. Supposons que ceci a déjà été fait, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y) \quad (y \in Y_0).$$

Cela étant, g est une fonctionnelle linéaire dans Y_0. Comme on peut la prolonger à Y tout entier avec conservation de sa norme, on peut admettre que $g \in Y^*$. Remarquons que

$$\| g \| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \| g_n \| \leqslant M.$$

En posant $f = U^*(g)$ et $f_n = U^*(g_n)$, pour tout $x \in X$ on aura

$$f_n(x) = g_n(U(x)) \to g(U(x)) = f(x),$$

puisque $U(x) \in Y_0$. Donc, $f_n \to f$ ($\sigma(X^*, X)$). Montrons que la convergence en norme a lieu. Supposons le contraire. Quitte à passer aux suites partielles on peut admettre que

$$\| f_n - f \| \geqslant m > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ trouvons un élément x_n tel que

$$\| x_n \| = 1, \quad | f_n(x_n) - f(x_n) | > \frac{1}{2} \| f_n - f \| \geqslant \frac{1}{2} m \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire si $y_n = U(x_n)$

$$| g_n(y_n) - g(y_n) | \geqslant \frac{1}{2} m \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

L'opérateur U étant compact et $\| x_n \| = 1$ ($n = 1, 2, \ldots$), on peut extraire de la suite $\{y_n\}$ une suite partielle convergente $\{y_{n_k}\}$. Supposons que $y_{n_k} \to y_0$. Alors, compte tenu de ce que $y_0 \in Y_0$, on aura

$$\begin{aligned} &| g_{n_k}(y_{n_k}) - g(y_{n_k}) | \leqslant \\ &\leqslant | g_{n_k}(y_{n_k}) - g_{n_k}(y_0) | + | g_{n_k}(y_0) - g(y_0) | + | g(y_0) - g(y_{n_k}) | \leqslant \\ &\leqslant 2M \| y_{n_k} - y_0 \| + | g_{n_k}(y_0) - g(y_0) | \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit (6).

Prouvons maintenant que si U^* est compact, U le sera aussi.

Considérons l'opérateur U^{**}. L'opérateur U est compact car il est le prolongement, en vertu du théorème 2, de l'opérateur U^{**} dont on a démontré la compacité. En effet, si $E \subset \mathrm{X}$ est un ensemble borné, $U(E)$ est relativement compact dans Y^{**}. Comme $\mathrm{Y}\ (=\pi_2(\mathrm{Y}))$ est fermé dans Y^{**}, $U(E)$ est relativement compact dans Y aussi.

3.5. La notion d'opérateur adjoint permet de formuler un critère commode de compacité.

THÉORÈME 4. *Pour que U, opérateur linéaire continu d'un espace normé* X *dans un B-espace séparable* Y, *soit compact il est nécessaire et suffisant que l'opérateur adjoint U^* associe à toute suite $\{g_n\}$ de fonctionnelles qui converge $(*)$-faiblement vers zéro dans* Y *une suite $\{f_n\}$ de fonctionnelles convergeant en norme vers zéro dans* X.

DÉMONSTRATION. La *condition* est *nécessaire*. Supposons que $\{f_n\}$ n'est pas convergente en norme vers zéro. On peut admettre que

$$\| f_n \| \geqslant m > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

D'après le théorème précédent, U^* est compact et, puisque la suite $\{g_n\}$ est bornée, on peut extraire de $\{f_n\}$ une suite partielle convergente $\{f_{n_k}\}$. Supposons que

$$f_{n_k} \to f. \tag{8}$$

Pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(U(x)) = 0,$$

puisque $g_{n_k} \to 0\ (\sigma(\mathrm{Y}^*, \mathrm{Y}))$. Donc $f = 0$ et (8) contredit (7).

La *condition* est *suffisante*. D'après le théorème 3, il suffit de vérifier que U^* est compact. Soient B la boule unité de Y^*, $\{g_n\} \subset B$. Y étant séparable, d'après le théorème V.7.6 on a $g_{n_k} \to g\ (\sigma(\mathrm{Y}^*, \mathrm{Y}))$. Alors, par hypothèse, $U^*(g_{n_k}) \to U^*(g)$ en norme, ce qui prouve la compacité relative de l'ensemble $U^*(B)$, donc celle de l'opérateur U^*.

3.6. Au V.3.3, nous avons défini la notion d'opérateur adjoint d'un opérateur U dans un espace hilbertien H. Prouvons que la nouvelle définition nous conduit pratiquement à la même chose.

Soit g une fonctionnelle linéaire dans H. D'après V.3.2, il existe un élément $z \in \mathrm{H}$ tel que

$$g(y) = (y, z) \quad (y \in \mathrm{H}). \tag{9}$$

Posons $f = U^*g$ et supposons que la fonctionnelle f est définie par l'élément z^* :

$$f(x) = (x, z^*) \quad (x \in \mathrm{H}). \tag{10}$$

En tenant compte de (9) et (10) écrivons la relation $f(x) = g(Ux)$ sous la forme

$$(x, z^*) = (Ux, z) \quad (x \in \mathbf{H}). \tag{11}$$

L'opérateur U^* est défini dans $\mathbf{H}^*$. Comme $\mathbf{H}^*$ est linéairement isométrique à $\mathbf{H}$, l'opérateur U^* peut être traité comme un opérateur (visiblement linéaire) dans $\mathbf{H}$ que nous désignerons par le même symbole U^*. La fonctionnelle g étant associée à z et f à z^*, on a $z^* = U^*z$ et (11) peut s'écrire:

$$(Ux, z) = (x, U^*z) \quad (x \in \mathbf{H}),$$

c'est-à-dire on retrouve la définition précédente de l'opérateur adjoint.

La définition de l'opérateur adjoint d'opérateurs concrets dans $\mathbf{L}^2$ a été donnée par Hilbert (voir Hilbert). Pour les autres cas particuliers, voir Riesz [3], pour la définition générale, Schauder [2], Hildebrandt [1], Banach.

§ 4. Opérateurs auto-adjoints compacts dans un espace hilbertien

4.1. Dans ce paragraphe, nous étudions en détail la structure d'un opérateur auto-adjoint compact dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$. Il se trouve que cette structure rappelle celle d'une matrice symétrique. Comme pour les matrices, les valeurs propres et les notions qui leur sont rattachées sont primordiales dans l'étude des propriétés d'un opérateur auto-adjoint compact.

Les résultats de ce paragraphe ont été établis pour les opérateurs intégraux dans $\mathbf{L}^2$ par Hilbert et Schmidt, pour le cas général, par Neumann [1] (pour $\mathbf{H}$ séparable) et par Rellich [1] (pour $\mathbf{H}$ quelconque).

On appelle *valeur propre* d'un opérateur U un nombre tel qu'il existe un élément $x_0 \neq 0$ pour lequel

$$Ux_0 = \lambda x_0.$$

L'élément x pour lequel $Ux = \lambda x$ s'appelle *élément propre* associé à la valeur propre λ. Les éléments propres associés à une valeur propre λ forment un *sous-espace propre* $\mathbf{H}_\lambda$ relatif à λ. Il est immédiat de vérifier que $\mathbf{H}_\lambda$ est bien un sous-espace de $\mathbf{H}$ *).

4.2. Voici quelques résultats élémentaires sur les valeurs et les éléments propres d'un opérateur auto-adjoint U dans un espace hilbertien $\mathbf{H}$.

I. *L'expression* (Ux, x) *est réelle pour tout* $x \in \mathbf{H}$ (comparer avec V.6.2).

*) On peut étendre toutes les définitions précédentes au cas où $\mathbf{X}$ est un espace normé quelconque et U un opérateur dans $\mathbf{X}$. Il convient alors de noter $\mathbf{X}_\lambda$ le sous-espace propre.

Ceci résulte de

$$(Ux, x) = (x, Ux) = (\overline{Ux, x}).$$

II. *On a la relation*

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|.$$

Appelons $Q = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)|$. Comme pour $\|x\| = 1$

$$|(Ux, x)| \leqslant \|Ux\| \, \|x\| \leqslant \|Ux\| \leqslant \|U\|,$$

alors

$$Q \leqslant \|U\|.$$

L'identité

$$(Ux, y) = \frac{1}{4}\{[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), x-y)] + \\ + i[(U(x+iy), x+iy) - (U(x-iy), x-iy)]\}, \quad (1)$$

de vérification aisée (cf. V.4.2), et I entraînent

$$\operatorname{Re}(Ux, y) = \frac{1}{4}[(U(x+y), x+y) - (U(x-y), (x-y)] \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4} Q[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2] = \frac{1}{2} Q[\|x\|^2 + \|y\|^2]$$

(pour cette relation voir IV.5.1). En prenant x, avec $\|x\| = 1$, et $y = \frac{Ux}{\|Ux\|}$, on obtient

$$\|Ux\| = \operatorname{Re}(Ux, y) \leqslant Q,$$

d'où

$$\|U\| \leqslant Q.$$

III. *Les valeurs propres de l'opérateur U sont réelles.*

En effet, si λ est une valeur propre, et x l'élément propre associé non nul, alors

$$\lambda = \frac{(Ux, x)}{(x, x)},$$

U étant auto-adjoint, le numérateur est réel, donc λ.

IV. *Les sous-espaces propres H_{λ_1} et H_{λ_2} relatifs à des valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes de l'opérateur U sont orthogonaux.*

En effet, soient x et y des éléments de H_{λ_1} et H_{λ_2} respectivement. Comme $Ux = \lambda_1 x$, $Uy = \lambda_2 y$, en supposant pour fixer les idées que $\lambda_1 \neq 0$, on aura

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda_1}(Ux, y) = \frac{1}{\lambda_1}(x, Uy) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x, y),$$

ce qui n'est possible que si $(x, y) = 0$.

4.3. Supposons maintenant que U est un opérateur auto-adjoint compact. On a le

THÉORÈME 1. *L'opérateur U possède au moins une valeur propre.*

DÉMONSTRATION. Ceci étant évident pour $U = 0$, on admettra que $U \neq 0$.

Considérons les *bornes* de l'opérateur

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x), \qquad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

D'après II, on a $\| U \| = \max [| m |, M]$. Prouvons que

$$\lambda_1 = \begin{cases} m & \text{si } \|U\| = |m|, \\ M & \text{si } \|U\| = M \end{cases}$$

est valeur propre de l'opérateur U.

En effet, voyons par exemple le cas où $\| U \| = M$. Par définition du nombre M, il existe une suite d'éléments normés $\{x_n\}$, telle que

$$(Ux_n, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M = \lambda_1. \tag{2}$$

Comme $\{x_n\}$ est une suite bornée, en vertu de la compacité de l'opérateur U on peut extraire de la suite $\{Ux_n\}$ une suite partielle convergente. Supposons que cela a déjà été fait, c'est-à-dire $\{Ux_n\}$ est convergente. Supposons par exemple que $Ux_n \to y_0$. Compte tenu de la relation

$$\| Ux_n - \lambda_1 x_n \|^2 = \| Ux_n \|^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n) + \lambda_1^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| U \|^2 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 (Ux_n, x_n),$$

de l'égalité $\lambda_1^2 = \| U \|^2$ et de (2), il vient

$$Ux_n - \lambda_1 x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc

$$x_n = \frac{1}{\lambda_1} [Ux_n - (Ux_n - \lambda_1 x_n)]$$

admet aussi une limite. Plus exactement $x_n \to x_0 = \frac{1}{\lambda_1} y_0$. Comme $Ux_n \to Ux_0 = y_0$, il vient $y_0 = Ux_0 = \lambda_1 x_0$. Puisque $x_0 \neq 0$ ($\| x_0 \| = 1$), λ_1 est valeur propre, c.q.f.d.

COROLLAIRE. *Si l'opérateur U ne possède que des valeurs propres nulles, alors $U = 0$.*

REMARQUE. La valeur propre indiquée dans le théorème est la plus grande en module.

En effet, si λ est une valeur propre et x l'élément associé que l'on peut supposer être normé, alors

$$| \lambda | = | \lambda | (x, x) = | (Ux, x) | \leqslant \| U \| = | \lambda_1 |.$$

4.4. Désignons par P_λ le projecteur (cf. V.3.4) sur le sous-espace propre $\mathbf{H}_\lambda$. Le théorème suivant précise le théorème 1.

THÉORÈME 2. *L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint compact U est au plus dénombrable. De plus*

$$U = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k}, \tag{3}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont les valeurs propres de U (la convergence de la série est une convergence en norme dans l'espace des opérateurs).

DÉMONSTRATION. Soit λ une valeur propre de l'opérateur U. On a

$$\lambda P_\lambda = UP_\lambda = P_\lambda U. \tag{4}$$

En effet, $UP_\lambda x = \lambda P_\lambda x$, puisque $P_\lambda x \in \mathbf{H}_\lambda$, $\forall x \in \mathbf{H}$. La permutabilité des opérateurs P_λ et U résulte de ce que leur produit est un opérateur auto-adjoint (cf. V.6.1).

Soit l'opérateur

$$U_2 = U_1 - \lambda_1 P_{\lambda_1} \quad (U_1 = U). \tag{5}$$

En vertu de (4) on peut écrire

$$U_2 = \widetilde{P}_1 U_1 = U_1 \widetilde{P}_1, \tag{6}$$

où $\widetilde{P}_1 = I - P_{\lambda_1}$. Il s'ensuit que U_2 est un opérateur auto-adjoint et compact (la compacité découle du théorème IX.2.2). La relation (6) montre aussi que

$$\| U_2 \| \leqslant \| \widetilde{P}_1 \| \, \| U_1 \| \leqslant \| U_1 \|.$$

En appliquant le théorème précédent à l'opérateur U_2 on trouve sa valeur propre λ_2 et de plus

$$| \lambda_1 | \geqslant | \lambda_2 |$$

puisque $| \lambda_1 | = \| U_1 \|$, $| \lambda_2 | = \| U_2 \|$.

Prouvons que λ_1 n'est pas valeur propre de l'opérateur U_2. En effet, si λ_1 était valeur propre de U_2, il existerait un élément $x \neq 0$ tel que

$$U_2 x = \lambda_1 x$$

ou, en vertu de (5),

$$U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = \lambda_1 x. \tag{7}$$

En appliquant l'opérateur P_{λ_1} aux deux membres de cette égalité, on obtient, compte tenu de (4),

$$\lambda_1 P_{\lambda_1} x = UP_{\lambda_1} x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = 0.$$

Donc, de (7) il suit

$$U_1 x = \lambda_1 x,$$

c'est-à-dire $x \in \mathbf{H}_{\lambda_1}$, donc $x = P_{\lambda_1} x = 0$, ce qui nous conduit à une contradiction.

Prouvons maintenant que toute valeur propre non nulle de l'opérateur U_2 est valeur propre de U_1 et que les sous-espaces propres relatifs sont confondus.

En effet, soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de U_2 et $x \neq 0$ un élément tel que $U_2 x = \lambda x$. D'après (6) on a

$$U_1 \widetilde{P}_1 x = \lambda x, \tag{8}$$

d'où

$$\widetilde{P}_1 U_1 \widetilde{P}_1 x = \lambda \widetilde{P}_1 x.$$

D'autre part

$$\widetilde{P}_1 U_1 \widetilde{P}_1 x = U_1 \widetilde{P}_1^2 x = U_1 \widetilde{P}_1 x = \lambda x,$$

donc $\widetilde{P}_1 x = x$. De (8) il vient alors

$$U_1 x = \lambda x,$$

c'est-à-dire λ est valeur propre de U_1. Si maintenant par x on sous-entend l'élément propre de U_1 associé à la valeur propre λ, alors, puisque $\lambda \neq \lambda_1$, les sous-espaces $\mathbf{H}_\lambda$ et $\mathbf{H}_{\lambda_1}$ sont orthogonaux (cf. III de 4.3), donc $P_{\lambda_1} x = 0$ et d'après (5)

$$U_2 x = U_1 x - \lambda_1 P_{\lambda_1} x = U_1 x = \lambda x.$$

Donc, x est élément propre de U_2.

Si l'opérateur U_2 est différent de zéro, on peut construire l'opérateur $U_3 = U_2 - \lambda_2 P_{\lambda_2}$, etc. Construisons par cette procédure les opérateurs auto-adjoints compacts $U_1 = U$, U_2, ..., U_n et les valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n de ces opérateurs. On obtient en définitive

$$U_{k+1} = U_k - \lambda_k P_{\lambda_k} = U - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{\lambda_j} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|, \ \|U_k\| = |\lambda_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela étant, d'après ce qui a été démontré, les λ_k seront des valeurs propres deux à deux distinctes de l'opérateur $U_1 = U$.

Supposons que $U_n = 0$. On a alors

$$U = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j P_{\lambda_j}. \tag{9}$$

Si $U_n \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, le processus nous amène à une suite d'opérateurs $U_1, U_2, \ldots$ et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Montrons que dans ce cas $\lambda_n \to 0$. En effet, dans le cas contraire pour tous les $n = 1, 2, \ldots$

$$|\lambda_n| \geqslant \lambda_0 > 0.$$

Prenons un élément normé x_n dans le sous-espace $\mathbf{H}_{\lambda_n}$. Les éléments x_n distincts étant deux à deux orthogonaux, on a

$$\| Ux_m - Ux_n \|^2 = \| \lambda_m x_m - \lambda_n x_n \|^2 = |\lambda_m|^2 + |\lambda_n|^2 \geqslant 2\lambda_0^2$$
$$(m \neq n)$$

et par conséquent, ni la suite $\{Ux_n\}$ ni aucune de ses suites partielles ne sont convergentes, ce qui contredit la compacité de l'opérateur U. Comme $\| U_n \| = |\lambda_n|$, de ce qu'on a démontré il résulte que $U_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et par suite

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k}.$$

On obtient ainsi la forme (3) annoncée.

Prouvons que hormis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ l'opérateur U ne possède pas d'autres valeurs propres non nulles. En effet, si λ était une telle valeur propre, pour un $x \neq 0$ on aurait $Ux = \lambda x$, c'est-à-dire

$$\lambda x = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k} x.$$

Les éléments $P_{\lambda_k} x$ sont deux à deux orthogonaux, car appartenant à $\mathbf{H}_{\lambda_k}$. Donc

$$\lambda P_{\lambda_m} x = \lambda_m P_{\lambda_m} x \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Comme $\lambda \neq \lambda_m$ on a $P_{\lambda_m} x = 0$ et $x = 0$.

C.q.f.d.

Remarque 1. Il est immédiat de vérifier que le sous-espace propre $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ relatif à une valeur propre non nulle est de dimension finie.

En effet, tout ensemble borné E de $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ est l'image d'un ensemble borné $\widetilde{E}$ (composé de tous les éléments z de la forme $z = (1/\lambda_k)\, x$, où $x \in E$). L'opérateur U étant compact, l'ensemble E est relativement compact, ce qui n'est possible que dans le cas où $\mathbf{H}_{\lambda_k}$ est de dimension finie (voir théorème IV.1.3).

Remarque 2. De la relation (6) il résulte que l'on peut définir une valeur propre λ_k comme

$$\lambda_k = \pm \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathbf{H}_{\lambda_j}}} |(Ux, x)| \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

4.5. Désignons par H_0 le sous-espace propre relatif à la valeur propre zéro, et par $\tilde{H}$ son orthocomplément. Vu que $\forall x \in H$, $\forall y \in H_0$ on a

$$(Ux, y) = (x, Uy) = 0,$$

alors $Ux \perp H_0$, c'est-à-dire $U(H) \subset \tilde{H}$. Inversement, si $y \perp U(H)$, alors

$$0 = (Ux, y) = (x, Uy),$$

pour tout $x \in H$, d'où il résulte que $Uy = 0$, c'est-à-dire $y \in H_0$. Donc $\tilde{H} = \overline{U(H)}$.

Choisissons un système orthogonal complet dans chaque sous-espace H_{λ_k}. Ce système sera fini pour tout $k = 1, 2, \ldots$ d'après la remarque ci-dessus. En groupant ces systèmes dans un seul, on obtient un système orthonormal $x_1, x_2, \ldots$ composé des éléments propres de l'opérateur U. On désignera comme toujours par λ_k la valeur propre à laquelle est associé l'élément x_k. Donc, parmi les valeurs propres il y en aura qui seront égales *). Le théorème 2 nous dit que le système orthonormal construit est complet dans $\tilde{H}$, donc chaque élément $z \in H$ peut être mis sous la forme

$$z = x_0 + \tilde{x}, \tag{10}$$

où

$$x_0 \in H_0, \quad \tilde{x} = \sum_k c_k x_k \in \tilde{H} \quad (c_k = (\tilde{x}, x_k) = (z, x_k), \quad k \in \mathbb{N}).$$

En particulier, si $z = Ux$, ainsi qu'on l'a remarqué plus haut $z \in \tilde{H}$ et, par suite,

$$z = \sum_k c_k x_k \quad (c_k = (z, x_k) = (Ux, x_k) = (x, Ux_k) = \lambda_k (x, x_k)).$$

Soit l'équation

$$x - \mu Ux = y, \tag{11}$$

où y est un élément fixé de H, μ un paramètre numérique.

En mettant y et l'élément cherché x sous la forme (10), on obtient l'équation

$$x_0 + \sum_k c_k x_k - \mu \sum_k c_k \lambda_k x_k = y_0 + \sum_k d_k x_k$$

$$(c_k = (x, x_k), \quad d_k = (y, y_k)),$$

d'où

$$x_0 = y_0, \quad c_k (1 - \mu\lambda_k) = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

*) La commodité de cette notation est que non seulement un élément propre définit une valeur propre, mais inversement une valeur propre définit de façon unique (à un facteur multiplicatif près) un élément propre.

et par suite

$$x_0 = y_c, \quad c_k = \frac{d_k}{1 - \mu\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

si seulement

$$1 - \mu\lambda_k \neq 0$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots$ De plus

$$\sum |c_k|^2 \leqslant \frac{1}{\min\limits_k |1 - \mu\lambda_k|^2} \sum_k |d_k|^2 < \infty,$$

et il existe une solution unique. En désignant cette dernière par x^*, on aura

$$x^* = y_0 + \sum_k \frac{d_k}{1 - \mu\lambda_k} x_k.$$

Si $\mu\lambda_k = 1$, la solution n'existe que si les coefficients $d_k = 0$, c'est-à-dire si le second membre de l'équation (11), savoir l'élément y, est orthogonal à tous les éléments propres associés à $1/\mu$. De plus, la solution n'est pas unique, car les coefficients correspondants c_k peuvent être arbitrairement choisis : si x^* est une solution quelconque, alors $x^* + \bar{x}$, où $\bar{x}$ est un élément quelconque de $\mathbf{H}_{1/\mu}$, sera également solution.

Les valeurs

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

sont appelées *valeurs caractéristiques* de l'équation (11), et les éléments qui leur sont associés *éléments caractéristiques*.

Si U représente un opérateur intégral dans $\mathbf{L}^2$ à noyau symétrique continu

$$y = Ux, \; y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

tous les résultats mentionnés plus haut se transforment en les résultats classiques de la théorie des équations intégrales, sur la formulation desquels nous ne nous attarderons pas.

En traitant une matrice symétrique comme un opérateur dans un espace hilbertien de dimension finie, on peut déduire à partir de l'exposé précédent les théorèmes classiques de la théorie des matrices.

4.6. Soit $\mathbf{H}$ un espace séparable. Pour représenter matriciellement un opérateur auto-adjoint compact (cf. V.3.1), nous choisissons un système orthonormal complet de la manière suivante : au système construit dans $\widetilde{\mathbf{H}}$ nous ajoutons un système orthonormal dans $\mathbf{H}_0$. En désignant le système obtenu par $\{x_k\}$ et les valeurs propres corres-

pondantes par $\{\lambda_k\}$ (donc λ_k peut être égale à 0), on obtient la matrice suivante de l'opérateur U:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Les éléments diagonaux de cette matrice sont les valeurs propres, les autres, des zéros.

On démontre que si U admet une représentation matricielle de la forme (13), où λ_k sont réelles et $\lambda_k \to 0$, U est un opérateur auto-adjoint compact.

§ 5. Représentation intégrale d'un opérateur auto-adjoint

Dans ce paragraphe nous représentons un opérateur auto-adjoint par une intégrale abstraite du type de Stieltjes, qui se ramène à la forme (3) du paragraphe précédent si l'opérateur envisagé est compact.

La représentation intégrale des opérateurs dans des espaces concrets a été donnée par Hilbert (voir Hilbert), dans le cas général par Neumann [1]. L'idée des raisonnements ci-après appartient à Riesz. Pour l'exposé de ce paragraphe voir également Ahiezer et Glazman.

Le principal outil d'étude est la notion de fonction d'opérateur. Nous avons déjà eu affaire à cette notion: ainsi, par exemple, pour les opérateurs dans un espace normé, nous avons défini les puissances entières, et pour les opérateurs strictement positifs dans un espace hilbertien, la racine carrée. Plus bas, la correspondance entre fonctions de variable réelle et opérateurs s'étend systématiquement à toutes les fonctions continues.

5.1. Soit U un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien H. Comme précédemment on définit les bornes de U

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ux, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x).$$

Soit par ailleurs $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$. Posons par définition

$$\varphi(U) = c_0 I + c_1 U + \dots + c_n U^n.$$

L'opérateur $\varphi(U)$ est dit *polynôme opératoriel*.

Notons quelques propriétés des polynômes opératoriels.

I. $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi}(U)$. Notamment, si $\varphi(t)$ est un polynôme réel, $\varphi(U)$ est un opérateur auto-adjoint.

II. Si $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, alors $\varphi(U) = \alpha\varphi_1(U) + \beta\varphi_2(U)$.

III. Si $\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$, alors $\varphi(U) = \varphi_1(U)\,\varphi_2(U)$.

IV. Le polynôme opératoriel $\varphi(U)$ commute avec tout opérateur commutant avec U, c'est-à-dire $UV = VU$ entraîne $\varphi(U)V = V\varphi(U)$.

V. Si $\varphi(t) \geqslant 0$ pour $t \in [m, M]$, l'opérateur $\varphi(U)$ est positif.

Les quatre premières propriétés sont évidentes. Penchons-nous sur la démonstration de la cinquième.

Le polynôme $\varphi(t)$ étant positif dans l'intervalle $[m, M]$, il ne peut y présenter de racines de multiplicité impaire. D'autre part, puisque son signe change au passage par une racine de multiplicité impaire et que pour t assez grand ce signe est celui du coefficient c_n, le nombre de racines de multiplicité impaire supérieures ou égales à M sera pair si $c_n > 0$ et impair si $c_n < 0$. En tenant compte de ceci, on s'assure que $\varphi(t)$ se représente par

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\ldots\,\varphi_s(t),$$

où les facteurs $\varphi_k(t)$ sont de l'une des formes suivantes:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} a & (a > 0), \\ (t+\alpha_k)^2 + \beta_k & (\alpha_k \text{ est réel, } \beta_k > 0), \\ t - t_k & (t_k \leqslant m), \\ t_k - t & (t_k \geqslant M). \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que dans tous les cas $\varphi_k(U) \geqslant 0$.

En effet, si par exemple $\varphi_k(t) = t - t_k$ $(t_k \leqslant m)$, alors $\varphi_k(U) = U - t_k I$ et

$$(\varphi_k(U)x, x) = (Ux, x) - t_k(x, x) \geqslant (m - t_k)(x, x) \geqslant 0.$$

D'après III

$$\varphi(U) = \varphi_1(U)\,\varphi_2(U)\,\ldots\,\varphi_s(U).$$

Or, les opérateurs $\varphi_k(U)$ commutent entre eux (propriété IV), donc on peut leur appliquer le corollaire du théorème V.6.2, qui dit que le produit $\varphi(U)$ est aussi un opérateur positif.

Signalons encore deux propriétés des polynômes opératoriels, qui découlent des précédentes.

VI. Si $\varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$ dans $[m, M]$, alors $\varphi_1(U) \leqslant \varphi_2(U)$.

VII. $\|\varphi(U)\| \leqslant \max\limits_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$.

En effet,

$$\|\varphi(U)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) = \sup(\overline{\varphi}(U)\varphi(U)x, x) =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x),$$

où $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$. Si $l = \max\limits_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$, alors

$$0 \leqslant \psi(t) \leqslant l^2 \quad (t \in [m, M]),$$

donc

$$0 \leqslant \psi(U) \leqslant l^2 I$$

et par suite

$$\sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x) \leqslant l^2.$$

5.2. Soit $\varphi(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $[m, M]$. Il existe une suite $\{\varphi_n(t)\}$ de polynômes uniformément convergente vers $\varphi(t)$ dans $[m, M]$. On voit immédiatement que la suite d'opérateurs $\{\varphi_n(U)\}$ sera convergente vers un opérateur. En effet,

$$\|\varphi_{n+p}(U) - \varphi_n(U)\| \leqslant \max_{t \in [m, M]} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Si une autre suite de polynômes converge uniformément vers $\varphi(t)$ (dans $[m, M]$), la suite des polynômes opératoriels correspondants convergera aussi vers le même opérateur que la suite initiale. On peut s'en assurer en regroupant les deux suites dans une seule. Ceci nous permet de désigner

$$\varphi(U) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(U).$$

On appellera l'opérateur $\varphi(U)$ *fonction d'opérateur*.

Les propriétés des fonctions d'opérateur sont rassemblées dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1. a) $[\varphi(U)]^* = \overline{\varphi}(U)$. *En particulier, si* $\varphi(t)$ *est réelle pour* $t \in [m, M]$, *alors* $\varphi(U)$ *est un opérateur auto-adjoint.*

b) *Si* $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, *alors* $\varphi(U) = \alpha\varphi_1(U) + \beta\varphi_2(U)$.

c) *Si* $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$, *alors* $\varphi(U) = \varphi_1(U)\varphi_2(U)$.

d) *L'opérateur* $\varphi(U)$ *commute avec tout opérateur commutant avec* U.

e) *Si* $\varphi(t) \geqslant \psi(t)$ $(t \in [m, M])$, *alors* $\varphi(U) \geqslant \psi(U)$.

f) $\|\varphi(U)\| \leqslant \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|$ *).

g) *Si une suite* $\{\varphi_n(t)\}$ *de fonctions continues est uniformément convergente dans l'intervalle* $[m, M]$ *vers une fonction* $\varphi(t)$, *alors* $\|\varphi_n(U) - \varphi(U)\| \to 0$.

h) *Si* P *est un projecteur commutant avec* U, *alors*

$$P\varphi(U) = P\varphi(PU).$$

DÉMONSTRATION. On établit sans peine les propositions a) à g) grâce aux propriétés des polynômes opératoriels.

La preuve de h) n'est pas compliquée non plus. Si $\varphi(t)$ est un polynôme, $P^2 = P$ entraîne $P^k = P$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Si $\varphi(t)$ est une fonction continue quelconque, il faut passer à la limite.

*) Plus bas (dans 5.3) nous donnerons l'expression exacte de $\|\varphi(U)\|$.

5.3. Pour définir de façon unique l'opérateur $\varphi(U)$ il n'est pas indispensable de connaître toutes les valeurs de $\varphi(t)$ sur $[m, M]$ tout entier. Il suffit de se donner $\varphi(t)$ sur un ensemble fermé $S_U \subset \subset [m, M]$ appelé spectre de l'opérateur U.

On dit qu'un nombre λ est un point du spectre d'un opérateur auto-adjoint U si existe une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\|x_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad Ux_n - \lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

Il est équivalent de dire que λ est point du spectre si

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| = 0. \tag{2}$$

L'ensemble de tous les points du spectre est appelé *spectre* de l'opérateur U *) et noté S_U.

Il est clair que toute valeur propre est un point du spectre, mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, si l'opérateur U est compact et H de dimension infinie, $\lambda = 0$ est un point du spectre, alors qu'il n'est pas toujours valeur propre.

Soit λ un point du spectre. De (1) il suit

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} (Ux_n, x_n).$$

D'où il résulte que le spectre de l'opérateur U est compris dans l'intervalle $[m, M]$ de la droite réelle. Montrons que *les bornes de l'opérateur U sont des points du spectre.*

Admettons que $0 \leqslant m \leqslant M$ **) et considérons le point $\lambda = M$. Comme $\|U\| = \lambda$, on aura pour $\|x\| = 1$

$$\|Ux - \lambda x\|^2 = \|Ux\|^2 - 2\lambda (Ux, x) + \lambda^2 \leqslant 2\lambda [\lambda - (Ux, x)],$$

d'où

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\|^2 \leqslant 2\lambda [\lambda - \sup_{\|x\|=1} (Ux, x)] = 0,$$

ce qui d'après (2) exprime que $\lambda \in S_U$.

S_U est un ensemble fermé.

En effet, si $\lambda_0 \notin S_U$, de (2) il vient

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| = d > 0.$$

---

*) Formellement, cette définition a un sens dans le cas où U est un opérateur linéaire dans un espace normé quelconque. Cependant, dans le cas général on donnera une autre définition du spectre qui n'est équivalente à celle-ci que si U est un opérateur auto-adjoint dans un espace hilbertien.

**) On peut toujours réaliser cette condition en ajoutant à l'opérateur U un opérateur de la forme μI ; cela étant, le spectre et les bornes de l'opérateur se déplaceront d'une distance μ vers la droite sur l'axe réel.

Si $|\lambda - \lambda_0| < d/2$, alors

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geqslant \inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda_0 x\| - \sup_{\|x\|=1} \|\lambda_0 x - \lambda x\| >$$

$$> d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0,$$

donc le complémentaire de S_U est ouvert.

Avant de formuler un résultat fondamental, nous allons prouver deux propositions auxiliaires.

LEMME 1. *Soit* $\varphi(t)$ *un polynôme réel. Alors* $S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U)$, *c'est-à-dire le spectre de l'opérateur* $\varphi(U)$ *est constitué de tous les* μ *représentables sous la forme* $\mu = \varphi(\lambda)$ $(\lambda \in S_U)$.

DÉMONSTRATION. Soient μ un nombre réel quelconque, $t_1, t_2, \ldots, t_s$ les racines de l'équation

$$\varphi(t) = \mu.$$

Il est évident que l'opérateur $\varphi(U) - \mu I$ s'écrit sous la forme du produit

$$\varphi(U) - \mu I = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \ldots (U - t_s I). \tag{3}$$

Soit $\lambda \in S_U$. Il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments normés, telle que $Ux_n - \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons $\mu = \varphi(\lambda)$, $t_s = \lambda$ dans le développement (3). Il vient

$$\varphi(U)x_n - \mu x_n = c(U - t_1 I)(U - t_2 I) \ldots (Ux_n - \lambda x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

Inversement, si aucun t_k n'appartient au spectre de U, alors

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - t_s x\| = \rho_s > 0,$$

$$\inf_{\|x\|=1} \|(U - t_{s-1} I)(Ux - t_s x)\| \geqslant \inf_{\|y\| \geqslant \rho_s} \|Uy - t_{s-1} y\| = \rho_{s-1} > 0.$$

En poursuivant de la sorte on trouve

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = \rho_1 > 0.$$

Donc $\mu = \varphi(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ n'appartient pas à $S_{\varphi(U)}$.

LEMME 2. *Si* $\varphi(t)$ *est un polynôme, alors*

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|.$$

En effet,

$$\|\varphi(U)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (\varphi(U)x, \varphi(U)x) =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (\overline{\varphi}(U)\varphi(U)x, x) = \sup_{\|x\|=1} (\psi(U)x, x), \qquad (4)$$

où $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$.

Donc, $\|\varphi(U)\|^2$ est un majorant de l'opérateur $\psi(U)$. Or, le majorant d'un opérateur strictement positif $\psi(U)$ est confondu avec la borne supérieure du spectre de cet opérateur:

$$M_{\psi(U)} = \sup S_{\psi(U)}. \qquad (5)$$

D'après le résultat du lemme 1

$$\sup S_{\psi(U)} = \sup \psi(S_U) = \sup_{t \in S_U} \psi(t) = [\sup_{t \in S_U} |\varphi(t)|]^2.$$

Cela étant, puisque l'ensemble S_U est fermé, on peut remplacer suprémum par maximum. En comparant la dernière égalité avec les relations (4) et (5), on obtient le résultat désiré.

Le théorème fondamental se démontre maintenant sans peine.

THÉORÈME 2. *Si $\varphi(t)$ est une fonction continue dans $[m, M]$, alors*

$$\|\varphi(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi(t)|. \qquad (6)$$

En effet, soit $\{\varphi_n(t)\}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $\varphi(t)$. D'après le lemme 2

$$\|\varphi_n(U)\| = \max_{t \in S_U} |\varphi_n(t)| = \|\varphi_n\|_C.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on trouve (6).

COROLLAIRE. *Si φ_1 et φ_2 sont des fonctions continues dans $[m, M]$ et confondues sur le spectre S_U de l'opérateur, alors $\varphi_1(U) = \varphi_2(U)$.*

Soit donnée une fonction $\varphi(t)$ continue sur le spectre de l'opérateur U. En la prolongeant, avec conservation de la continuité, à l'intervalle $[m, M]$ tout entier, on obtient une fonction $\widetilde{\varphi}(t)$ continue dans $[m, M]$. On convient que

$$\varphi(U) = \widetilde{\varphi}(U).$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, l'opérateur $\varphi(U)$ ne dépend pas du procédé de prolongement de la fonction $\varphi(t)$ et est défini seulement par les valeurs de la fonction φ sur S_U. Il est clair que les propriétés des fonctions d'opérateur énoncées dans le théorème 1 s'étendent aux fonctions que nous venons de définir (dans l'énoncé du théorème 1 il faut remplacer partout l'intervalle $[m, M]$ par l'ensemble S_U).

La généralisation de la notion de fonction d'opérateur permet de prouver un théorème important caractérisant le spectre d'un opérateur auto-adjoint.

On dit qu'un nombre complexe λ est *valeur régulière* d'un opérateur U s'il n'appartient pas au spectre de cet opérateur.

THÉORÈME 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur régulière d'un opérateur U est l'existence dans* **H** *de l'opérateur linéaire inverse*

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1} \text{ *)}.$$

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Soit λ une valeur régulière. Définissons sur S_U la fonction ρ_λ:

$$\rho_\lambda(t) = \frac{1}{t-\lambda}$$

et posons $R_\lambda = \rho_\lambda(U)$. Comme

$$(t - \lambda)\,\rho_\lambda(t) = 1 \quad (t \in S_U),$$

d'après le théorème 1 on a

$$(U - \lambda I)\,R_\lambda = R_\lambda\,(U - \lambda I) = I,$$

d'où

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1}.$$

Condition suffisante. Si existe un opérateur linéaire inverse (au moins à gauche)

$$R_\lambda = [U - \lambda I]^{-1},$$

alors pour $\|x\| = 1$ on obtient

$$\|R_\lambda\,(U - \lambda I)\,x\| = \|x\| = 1.$$

Donc

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ux - \lambda x\| \geqslant \frac{1}{\|R_\lambda\|} > 0.$$

Le théorème prouvé permet de généraliser le résultat du lemme 1 à des fonctions continues réelles arbitraires.

THÉORÈME 4. *Si $\varphi(t)$ est une fonction réelle continue sur S_U, alors*

$$S_{\varphi(U)} = \varphi(S_U).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mu \notin \varphi(S_U)$. La fonction ψ,

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t) - \mu} \quad (t \in S_U),$$

*) Ce théorème sert précisément de base à la définition d'un spectre dans le cas général d'un opérateur linéaire dans un espace normé arbitraire (cf. chapitre XIII, tome 2).

étant continue sur S_U, l'opérateur $\psi(U)$ a un sens. Il est évident que

$$\psi(U) = [\varphi(U) - \mu I]^{-1}.$$

Donc $\mu \notin S_{\varphi(U)}$ d'après le théorème 3.

Supposons maintenant que $\mu = \varphi(\lambda)$, où $\lambda \in S_U$. Soit $\{\varphi_n(t)\}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers $\varphi(t)$ sur S_U. On a

$$\|\varphi(U)x - \mu x\| \leqslant \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| + \\ + \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\| \, \|x\| + |\mu - \varphi_n(\lambda))| \, \|x\|.$$

Le lemme 1 nous dit que

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi_n(U)x - \varphi_n(\lambda)x\| = 0,$$

donc

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| \leqslant \|\varphi(U) - \varphi_n(U)\| + |\mu - \varphi_n(\lambda)|.$$

En faisant tendre $n \to \infty$ on trouve

$$\inf_{\|x\|=1} \|\varphi(U)x - \mu x\| = 0,$$

c'est-à-dire $\mu \in S_{\varphi(U)}$.

5.4. A tout opérateur auto-adjoint U on peut associer une famille de projecteurs qui permet de représenter sous une forme intégrale du type intégrale de Stieltjes aussi bien l'opérateur U que des fonctions de U.

Soit U un opérateur auto-adjoint. Considérons la fonction

$$\varphi_\lambda^+(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant \lambda), \\ t - \lambda & (t > \lambda), \end{cases}$$

et posons

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U).$$

Supposons que $\mathbf{H}_\lambda^+$ représente l'ensemble de tous les éléments x pour lesquels $U_\lambda^+ x = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{H}_\lambda^+$ est le sous-espace propre de l'opérateur U_λ^+ relatif à la valeur propre nulle. Désignons enfin par I_λ le projecteur sur le sous-espace $\mathbf{H}_\lambda^+$.

Les propriétés des projecteurs I_λ, comme le montre le théorème ci-après, sont intimement liées avec le spectre de l'opérateur U, en conséquence de quoi la famille de projecteurs I_λ est appelée *fonction spectrale de l'opérateur* U.

THÉORÈME 5. a) *Si* $\lambda < m$, $I_\lambda = 0$; *si* $\lambda > M$, $I_\lambda = I$.

b) *Si* $\lambda \leqslant \mu$, $I_\lambda \leqslant I_\mu$.

c) *La fonction spectrale comme fonction de* λ *est continue à droite en ce sens que*

$$I_\lambda = I_{\lambda+0} = \lim_{\mu \to \lambda+0} I_\mu \quad \textit{sur } \mathbf{H}.$$

d) *Le projecteur* I_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *commute avec tout opérateur commutant avec* U.

e) *Chaque valeur régulière réelle* λ *de l'opérateur* U *est un point en lequel la fonction spectrale prend une valeur constante, c'est-à-dire existe* $\delta > 0$ *tel que* $I_{\lambda-\delta} = I_{\lambda+\delta}$. *Inversement, les points en lesquels la fonction spectrale est constante sont des valeurs régulières de l'opérateur* U.

f) *Pour qu'un nombre réel* λ *soit valeur propre d'un opérateur* U *il faut et il suffit que* $I_\lambda = I_{\lambda+0} \neq I_{\lambda-0}$, *où* $I_{\lambda-0} = \lim\limits_{\mu\to\lambda-0} I_\mu$ *sur* $\mathbf{H}$. *Ceci étant, l'opérateur* $P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}$ *est projecteur sur le sous-espace propre relatif à la valeur propre* λ.

g) *Si* $\varphi(t) \geqslant 0$ *dans l'intervalle* $[\lambda, \mu]$, *alors* $[I_\mu - I_\lambda]\,\varphi(U) \geqslant 0$ *).

DÉMONSTRATION. a) Si $\lambda < m$, $U_\lambda^+ = U - \lambda I$. Donc, pour $x \neq 0$

$$(U_\lambda^+ x, x) = (Ux, x) - \lambda(x, x) \geqslant (m - \lambda)(x, x) > 0,$$

de sorte que $\mathbf{H}_\lambda^+ = \{0\}$.

Si $\lambda > M$, alors $U_\lambda^+ = 0$ et $\mathbf{H}_\lambda^+ = \mathbf{H}$.

b) Si $\lambda \leqslant \mu$, $\varphi_\lambda^+(t) \geqslant \varphi_\mu^+(t)$ et d'après le théoréme 1 on a $U_\lambda^+ \geqslant U_\mu^+$. De plus $U_\mu^+ \geqslant 0$. Donc

$$0 \leqslant (U_\mu^+ x, x) \leqslant (U_\lambda^+ x, x) \quad (x \in \mathbf{H}).$$

Si $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$, on a $U_\lambda^+ x = 0$ et par suite

$$(U_\mu^+ x, x) = 0.$$

D'où il résulte que $U_\mu^+ x = 0$ **), c'est-à-dire $x \in \mathbf{H}_\mu^+$. Donc $\mathbf{H}_\lambda^+ \subset \mathbf{H}_\mu^+$, ce qui exprime que $I_\lambda \leqslant I_\mu$ (V.6.7, lemme).

c) Comme I_λ décroît avec λ, le théorème V.6.7 nous dit que $I_{\lambda+0} = \lim\limits_{\mu\to\lambda+0} I_\mu$ existe sur $\mathbf{H}$ et est un projecteur. Désignons par $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+$ le sous-espace qui lui correspond. Comme $I_\lambda \leqslant I_{\lambda+0}$ on a $\mathbf{H}_\lambda^+ \subset \mathbf{H}_{\lambda+0}^+$. Soit $x \in \mathbf{H}_{\lambda+0}^+$. Comme de toute évidence $x \in \mathbf{H}_\mu^+$ $(\mu > \lambda)$, on a $I_\mu x = x$. Donc $U_\mu^+ x = 0$, mais

$$\| U_\mu^+ - U_\lambda^+ \| = \max_{t \in S_U} |\varphi_\mu^+(t) - \varphi_\lambda^+(t)| \leqslant \mu - \lambda,$$

de sorte que

$$U_\lambda^+ x = \lim_{\mu\to\lambda+0} U_\mu^+ x = 0,$$

d'où $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$. Par suite $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+ \subset \mathbf{H}_\lambda^+$, c'est-à-dire $\mathbf{H}_{\lambda+0}^+ = \mathbf{H}_\lambda^+$ ou encore $I_{\lambda+0} = I_\lambda$.

---

*) De toute évidence, il suffit d'exiger que $\varphi(t) \geqslant 0$ uniquement aux points du spectre compris dans l'intervalle $[\lambda, \mu]$.

**) Si pour un opérateur strictement positif V et un $x \in \mathbf{H}$ on a $(Vx, x) = 0$, alors $Vx = 0$. En effet, $0 = (Vx, x) = ([\sqrt{V}]^2 x, x) = (\sqrt{V}x, \sqrt{V}x)$, c'est-à-dire $\sqrt{V}\,x = 0$, donc $Vx = \sqrt{V}(\sqrt{V}\,x) = 0$.

d) Soit V un opérateur commutant avec U. D'après le théorème 1 l'opérateur V commute aussi avec U_λ^+. Ceci nous donne pour $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$

$$U_\lambda^+ Vx = VU_\lambda^+ x = 0,$$

c'est-à-dire $Vx \in \mathbf{H}_\lambda^+$. Si x est un élément quelconque de $\mathbf{H}$, d'après ce qu'on a démontré $VI_\lambda x \in \mathbf{H}_\lambda^+$, donc

$$VI_\lambda = I_\lambda V I_\lambda. \tag{7}$$

L'opérateur V^* commute aussi avec U, donc dans (7) on peut remplacer V par V^* :

$$V^* I_\lambda = I_\lambda V^* I_\lambda.$$

En passant aux opérateurs adjoints dans les deux membres de la dernière égalité, on obtient

$$I_\lambda V = I_\lambda V I_\lambda.$$

En comparant avec (7) on trouve

$$I_\lambda V = V I_\lambda.$$

e) Considérons l'opérateur

$$U_\lambda^- = \varphi_\lambda^-(U),$$

où

$$\varphi_\lambda^-(t) = \begin{cases} t-\lambda & (t \leqslant \lambda), \\ 0 & (t > \lambda), \end{cases}$$

et prouvons que

$$U_\lambda^- = I_\lambda (U - \lambda I). \tag{8}$$

En effet, comme

$$U - \lambda I = U_\lambda^+ + U_\lambda^-, \tag{9}$$

pour $x \in \mathbf{H}_\lambda^+$ on a

$$Ux - \lambda x = U_\lambda x.$$

Si x est un élément quelconque de $\mathbf{H}$, on peut écrire

$$I_\lambda (Ux - \lambda x) = (U - \lambda I) I_\lambda x = U_\lambda^- I_\lambda x = I_\lambda U_\lambda^- x. \tag{10}$$

Or $U_\lambda^+ U_\lambda^- = 0$, c'est-à-dire $U_\lambda^+ (U_\lambda^- x) = 0$, donc $U_\lambda^- x \in \mathbf{H}_\lambda^+$ et par suite $I_\lambda U_\lambda^- x = U_\lambda^- x$, ce qui nous amène à la formule (8).

Supposons maintenant que λ_0 est un point en lequel la fonction spectrale prend une valeur constante, c'est-à-dire il existe un intervalle $]\lambda, \mu[$ contenant λ_0, tel que $I_\lambda = I_\mu$. Considérons l'opérateur

$$P = \frac{U_\lambda^- - U_\mu^-}{\mu - \lambda}.$$

La formule (8) donne

$$P = \frac{I_\lambda (U - \lambda I) - I_\mu (U - \mu I)}{\mu - \lambda} = I_\lambda,$$

c'est-à-dire P est un projecteur. De plus

$$P = \sigma (U),$$

où $\sigma (t)$ est une fonction linéaire dans l'intervalle $[\lambda, \mu]$, égale à 1 pour $t \leqslant \lambda$ et nulle pour $t \geqslant \mu$.

Supposons que l'intervalle $]\lambda, \mu[$ contienne des points du spectre de l'opérateur U ; soit $\tilde{\lambda}$ l'un de ces points. Alors

$$Q = P - P^2 = 0.$$

Or, d'après le théorème 2

$$\| Q \| = \max_{t \in S_U} | \sigma (t) - \sigma^2 (t) | \geqslant \sigma (\tilde{\lambda}) - \sigma^2 (\tilde{\lambda}) > 0.$$

Donc, en tant que point de l'intervalle $]\lambda, \mu[$, λ_0 est une valeur régulière.

Supposons maintenant que λ est un point de croissance de la fonction spectrale. Cela signifie que pour tout $\delta > 0$

$$I_{\lambda+\delta} - I_{\lambda-\delta} \neq 0.$$

Soit $x \in \mathbf{H}^+_{\lambda+\delta} \ominus \mathbf{H}^-_{\lambda-\delta}$. Comme $x \in \mathbf{H}^+_{\lambda+\delta}$ on a $U^+_{\lambda+\delta} x = 0$. Or, puisque

$$\| U^+_{\lambda+\delta} - U^+_\lambda \| \leqslant \delta,$$

il vient

$$\| U^+_\lambda x \| \leqslant \delta \| x \|.$$

D'autre part, $x \perp \mathbf{H}^+_{\lambda-\delta}$, c'est-à-dire $I_{\lambda-\delta} x = 0$. Donc

$$I_{\lambda-\delta} U^-_{\lambda-\delta} x = U^-_{\lambda-\delta} I_{\lambda-\delta} x = 0,$$

d'où il résulte que $U^-_{\lambda-\delta} x \perp \mathbf{H}^+_{\lambda-\delta}$. Or, on a mentionné plus haut que toujours $U^-_{\lambda-\delta} x \in \mathbf{H}^+_{\lambda-\delta}$. Donc, dans le cas envisagé $U^-_{\lambda-\delta} x = 0$. De façon analogue, on obtient

$$\| U^-_{\lambda-\delta} - U^-_\lambda \| \leqslant \delta,$$

d'où

$$\| U^-_\lambda x \| \leqslant \delta \| x \|.$$

D'après (9), on a

$$\| Ux - \lambda x \| \leqslant \| U^+_\lambda x \| + \| U^-_\lambda x \| \leqslant 2\delta \| x \|. \tag{11}$$

En prenant une suite $\delta_n \to 0$ et la suite correspondante d'éléments normés $x_n \in \mathbf{H}^+_{\lambda+\delta_n} \ominus \mathbf{H}^-_{\lambda-\delta_n}$, on trouve

$$\| Ux_n - \lambda x_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui exprime le fait que λ appartient au spectre de U.

f) Notons tout d'abord que, la fonction spectrale étant monotone, il existe

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu\to\lambda-0} I_\mu \quad \text{sur } \mathbf{H},$$

et de plus $I_{\lambda-0}$ est projecteur. Il est manifeste aussi que $I_{\lambda-0} \leqslant I_\lambda$.

Supposons à présent qu'au point λ

$$I_{\lambda-0} \neq I_{\lambda+0} = I_\lambda.$$

Désignons par $\mathbf{H}^+_{\lambda-0}$ le sous-espace correspondant au projecteur $I_{\lambda-0}$ et prenons $x \in \mathbf{H}^+_\lambda \ominus \mathbf{H}^+_{\lambda-0}$. De toute évidence $x \in \mathbf{H}^+_{\lambda+\delta} \ominus \mathbf{H}^+_{\lambda-\delta}$, $\forall \delta > 0$. Comme l'inégalité (11) est réalisée pour tout $\delta > 0$, et que son premier membre ne dépend pas de δ, on a

$$\| Ux - \lambda x \| = 0,$$

c'est-à-dire λ est valeur propre de l'opérateur U et x est l'élément propre correspondant. Si l'on désigne comme toujours par $\mathbf{H}_\lambda$ le sous-espace propre et par P_λ un projecteur sur $\mathbf{H}_\lambda$, de ce qu'on a démontré il résulte que

$$\mathbf{H}_\lambda \supset \mathbf{H}^+_\lambda \ominus \mathbf{H}^+_{\lambda-0} \quad (P_\lambda \geqslant I_\lambda - I_{\lambda-0}).$$

Considérons le projecteur

$$I'_\mu = P_\lambda - I_\mu P_\lambda \quad (-\infty < \mu < \infty)$$

et prouvons que $I'_\mu x = 0$ équivaut à $P_\lambda U^+_\mu x = 0$. En effet, si $I'_\mu x = 0$, alors $P_\lambda x = I_\mu P_\lambda x$, d'où $P_\lambda U^+_\mu x = U^+_\mu P_\lambda x = 0$. Si au contraire $P_\lambda U^+_\mu x = 0$, alors $P_\lambda x \in \mathbf{H}^+_\mu$ et $I_\mu P_\lambda x = P_\lambda x$, c'est-à-dire $I'_\mu x = 0$.

D'après h) du théorème 1, on a

$$P_\lambda U^+_\mu = P_\lambda \varphi^+_\lambda (P_\lambda U).$$

Or

$$P_\lambda U = \lambda P_\lambda,$$

donc de la définition de la fonction d'opérateur il vient aussitôt

$$P_\lambda U^+_\mu = \begin{cases} (\lambda - \mu) P_\lambda, & \mu < \lambda, \\ 0, & \mu \geqslant \lambda. \end{cases}$$

D'où il résulte que pour $\mu < \lambda$, $I'_\mu x = 0$ équivaut à $P_\lambda x = 0$, c'est-à-dire pour $\mu < \lambda$ on a $I'_\mu = P_\lambda$. Si $\mu \geqslant \lambda$, alors $I'_\mu = 0$. Par suite

$$I_\mu P_\lambda = \begin{cases} 0, & \mu < \lambda, \\ P_\lambda, & \mu \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Or

$$I_\mu = I_\mu P_\lambda + I_\mu (I - P_\lambda).$$

Donc

$$I_{\lambda-0} = \lim_{\mu \to \lambda-0} I_\mu = I_{\lambda-0}(I - P_\lambda).$$

En ôtant ceci de l'égalité

$$I_\lambda = I_\lambda P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda) = P_\lambda + I_\lambda (I - P_\lambda),$$

on obtient

$$I_\lambda - I_{\lambda-0} = P_\lambda + (I_\lambda - I_{\lambda-0})(I - P_\lambda) \geqslant P_\lambda.$$

Comme $P_\lambda \neq 0$, à plus forte raison $I_\lambda - I_{\lambda-0} \neq 0$, c'est-à-dire la fonction spectrale présente un saut au point λ. De plus, d'après une relation établie plus haut, on trouve

$$P_\lambda = I_\lambda - I_{\lambda-0}.$$

g) Supposons tout d'abord que $\varphi(t) = 0$ dans l'intervalle $[\lambda, \mu]$ et montrons que $[I_\mu - I_\lambda]\, \varphi(U) = 0$. A cet effet considérons une fonction $\tilde{\varphi}(t)$ confondue avec la fonction $\varphi(t)$ aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ $(\lambda_k \leqslant \lambda,\ \lambda_r = \lambda)$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ $(\mu_k \geqslant \mu,\ \mu_1 = \mu)$ et linéaire dans les intervalles de ces points. Il est clair que

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi^-_{\lambda_k}(t) + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \varphi^+_{\mu_k}(t).$$

Donc

$$\tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k U^-_{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k U^+_{\mu_k}.$$

Vérifions que

$$[I_\mu - I_\lambda]\, \tilde{\varphi}(U) = 0. \tag{12}$$

Etudions séparément chaque terme de la somme

$$[I_\mu - I_\lambda]\, \tilde{\varphi}(U) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k [I_\mu - I_\lambda]\, U^-_{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{s} \beta_k [I_\mu - I_\lambda]\, U^+_{\mu_k}.$$

La formule (8) donne

$$[I_\mu - I_\lambda]\, U^-_{\lambda_k} = [I_\mu - I_\lambda]\, I_{\lambda_k}(U - \lambda_k I) = [I_\mu I_{\lambda_k} - I_\lambda I_{\lambda_k}]\,(U - \lambda_k I).$$

Or $I_{\lambda_k} \leqslant I_\lambda \leqslant I_\mu$, donc $I_\mu I_{\lambda_k} = I_\lambda I_{\lambda_k} = I_{\lambda_k}$, d'où il résulte que $[I_\mu - I_\lambda]\, U^-_{\lambda_k} = 0$. Ensuite $[I_\mu - I_\lambda]\, U^+_{\mu_k} = I_\mu [I - I_\lambda]\, U^+_{\mu_k} = [I - I_\lambda] \times \times U^+_{\mu_k} I_\mu = 0$. Ce qui prouve (12).

La fonction $\varphi(t)$ peut être représentée comme la limite d'une suite de fonctions linéaires par morceaux de la forme envisagée, uniformément convergente dans l'intervalle $[m, M]$. Comme une relation de la forme (12) est réalisée pour chaque fonction de la suite, le passage à la limite, qui est licite d'après g) du théorème 1, nous conduit à la relation voulue $[I_\mu - I_\lambda]\,\varphi(U) = 0$.

On admettra maintenant que $\varphi(t)$ vérifie les conditions du théorème, c'est-à-dire $\varphi(t) \geqslant 0$ pour $t \in [\lambda, \mu]$. Considérons la fonction

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(\lambda), & t < \lambda, \\ \varphi(t), & \lambda \leqslant t \leqslant \mu, \\ \varphi(\mu), & t > \mu. \end{cases}$$

Comme $\psi(t) \geqslant 0$ pour tous les t, alors $\psi(U) \geqslant 0$ et *a fortiori* $[I_\mu - I_\lambda]\,\psi(U) \geqslant 0$. Or, les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont confondues sur l'intervalle $[\lambda, \mu]$, donc d'après ce qu'on a démontré plus haut

$$[I_\mu - I_\lambda]\,[\varphi(U) - \psi(U)] = 0,$$

d'où il vient

$$[I_\mu - I_\lambda]\,\varphi(U) = [I_\mu - I_\lambda]\,\psi(U) \geqslant 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

5.5. Passons maintenant à la représentation intégrale des fonctions d'opérateur. Soit $\varphi(t)$ une fonction bornée continue réelle, définie sur $]-\infty, +\infty[$ *). Considérons la partition de la droite numérique par les points $-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} = \infty$ $(\lambda_1 < m,\ \lambda_n > M)$ et formons les sommes

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} l_k\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}]; \quad S = \sum_{k=1}^{n-1} L_k\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}], \tag{13}$$

où

$$l_k = \inf_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t), \quad L_k = \sup_{t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \varphi(t).$$

La fonction $\varphi(t)$ vérifiant la condition $l_k \leqslant \varphi(t) \leqslant L_k$ sur l'intervalle $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, d'après g) du théorème 5 on a

$$l_k\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leqslant [I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}]\,\varphi(U) \leqslant L_k\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}].$$

En additionnant toutes ces relations, on obtient

$$s \leqslant \varphi(U) \leqslant S. \tag{14}$$

*) On peut admettre que $\varphi(t)$ est définie d'abord sur le spectre de l'opérateur U et ensuite prolongée à la droite numérique tout entière avec conservation des propriétés indiquées.

Mais, par ailleurs

$$S - s = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k - l_k)\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \leqslant \delta I,$$

où $\delta = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$. Donc si $\delta \to 0$, c'est que $\| S - s \| \to 0$, et puisque $0 \leqslant S - \varphi(U) \leqslant S - s$, l'on aura $S \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \varphi(U)$ et de façon analogue $s \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \varphi(U)$.

Formons maintenant la somme « intégrale »

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k)\,[I_{\lambda_{k+1}} - I_{\lambda_k}] \quad (\lambda_k \leqslant \xi_k \leqslant \lambda_{k+1}). \tag{15}$$

Il est immédiat de vérifier que

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

et par suite

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma = \lim_{\delta\to 0} S = \varphi(U).$$

Or, $\lim\limits_{\delta\to 0} \sigma$ peut être considérée comme l'intégrale

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dI_t. \tag{16}$$

Nous avons donc obtenu la formule

$$\varphi(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dI_t. \tag{17}$$

En particulier, si $\varphi(t) = t$, la formule (17) donne la *représentation intégrale* de l'opérateur U

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dI_t. \tag{18}$$

Les propriétés des fonctions d'opérateur, énoncées dans le théorème 1 et dans 5.3, peuvent être formulées en termes de l'intégrale opératorielle (16). Indiquons encore une formule reliant une fonction d'opérateur à l'intégrale de Stieltjes

$$(\varphi(U)\,x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, d(I_t x, y)$$

et la relation qui en découle

$$\| \varphi(U) \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2\, d(I_t x, x).$$

La déduction peu compliquée est laissée au soin du lecteur.

L'intégrale (16) peut être considérée sur l'intervalle $[\lambda, \mu]$. Il est immédiat de vérifier que

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t)\, dI_t = [I_\mu - I_\lambda]\, \varphi(U).$$

En particulier, si $\lambda < m$, $\mu \geqslant M$, alors

$$\int_{\lambda}^{\mu} \varphi(t)\, dI_t = \varphi(U).$$

5.6. Pour construire une intégrale de la forme (16) il n'est pas indispensable d'admettre que la famille de projecteurs I_λ soit une fonction spectrale d'un opérateur auto-adjoint. Il suffit qu'elle vérifie les conditions formulées dans a) et b) du théorème 5.

Soit $\{E_\lambda\}$ une famille de projecteurs dépendant d'un paramètre réel et satisfaisant aux conditions:

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ si $\lambda \leqslant \mu$;

2) il existe des nombres m et M tels que $E_\lambda = 0$ pour $\lambda < m$ et $E_\lambda = I$ pour $\lambda > M$.

La famille $\{E_\lambda\}$ sera appelée dans ce cas *partition de l'unité*.

Sous les conditions posées la fonction complexe $(E_t x, y)$ de l'argument réel sera une fonction à variation bornée quels que soient $x, y \in \mathrm{H}$. Ceci découle immédiatement de la formule

$$(E_t x, y) = \frac{1}{4}\{[(E_t x + y), x + y) - (E_t (x - y), x - y)] + \\ + i\,[(E_t (x + yi), x + yi) - (E_t (x - yi), x - yi)]\}.$$

Donc, si $\varphi(t)$ est une fonction bornée continue, l'intégrale

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, d(E_t x, y) \quad (x, y \in \mathrm{H})$$

a un sens. Il est aisé de voir que la fonctionnelle $J(\varphi; x, y)$ est additive et homogène en x et en y *). De plus, comme

$$|J(\varphi; x, y)| \leqslant \sup|\varphi(t)| \bigvee_{-\infty}^{+\infty} [(E_t x, y)] \leqslant \\ \leqslant \sup|\varphi(t)| \cdot \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x + yi\|^2 + \|x - yi\|^2] = \\ = \sup|\varphi(t)|\,[\|x\|^2 + \|y\|^2], \quad (19)$$

la fonctionnelle $J(\varphi; x, y)$ est continue en x et y.

*) L'homogénéité en y est du « deuxième genre »: $J(\varphi; x, \alpha y) = \bar{\alpha} J(\varphi; x, y)$.

Fixons x et considérons la fonctionnelle linéaire de y

$$f_x(y) = \overline{J(\varphi; x, y)}.$$

La forme générale des fonctionnelles linéaires dans un espace hilbertien nous donne

$$f_x(y) = (y, \tilde{x}),$$

où l'élément $\tilde{x} \in H$ est défini uniquement par la fonctionnelle f_x, c'est-à-dire en fin de compte par l'élément x. En posant $\tilde{x} = J(\varphi)\, x$, on peut écrire

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi)\, x, y).$$

Il est clair que l'opérateur $J(\varphi)$ est additif et homogène. Grâce à (19) on obtient

$$\|J(\varphi)\, x\| \left(J(\varphi)\, x, \frac{J(\varphi)\, x}{\|J(\varphi)\, x\|}\right) \leqslant \sup_{\|y\|=1} (J(\varphi)\, x, y) \leqslant$$
$$\leqslant \sup|\varphi(t)|\,[\|x\|^2 + 1],$$

d'où il résulte que l'opérateur $J(\varphi)$ est borné.

On définit de façon analogue une intégrale sur un intervalle quelconque $[\lambda, \mu]$.

Prouvons maintenant que l'opérateur $J(\varphi)$ est la limite de sommes intégrales de la forme (15):

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k)\,[E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}] \quad (\lambda_1 < m,\ \lambda_n > M).$$

On a

$$(J(\varphi)\, x, y) - (\sigma x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(t)\, d(E_t x, y) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \varphi(\xi_k)\, d(E_t x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)]\, d(E_t x, y),$$

d'où

$$\|J(\varphi) - \sigma\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(J(\varphi)\, x, y) - (\sigma x, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [\varphi(t) - \varphi(\xi_k)]\, d(E_t x, y) \right|.$$

En désignant par ω la plus grande oscillation de la fonction $\varphi(t)$ dans les intervalles $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, . . ., $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ on peut poursuivre la majoration

$$\| J(\varphi) - \sigma \| \leqslant \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \sum_{k=1}^{n-1} \bigvee_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} [(E_t x, y)] \leqslant \omega \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \bigvee_{-\infty}^{+\infty} [(E_t x, y)] \leqslant 2\omega.$$

Si $\delta = \max\limits_{k=1, 2, \ldots, n-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \to 0$, alors $\omega \to 0$ et par suite $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma = J(\varphi)$. Ceci nous permet d'écrire :

$$J(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dE_t.$$

Utilisons ce qui vient d'être démontré pour énoncer quelques propriétés de l'opérateur $J(\varphi)$.

I. $[J(\varphi)]^* = J(\overline{\varphi})$.

II. Si $\varphi(t) = \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$, alors $J(\varphi) = \alpha J(\varphi_1) + \beta J(\varphi_2)$.

III. Si $\varphi(t) = \varphi_1(t)\, \varphi_2(t)$, alors

$$J(\varphi) = J(\varphi_1)\, J(\varphi_2) = J(\varphi_2)\, J(\varphi_1). \tag{20}$$

Prouvons la dernière propriété. Pour une partition formons les sommes intégrales

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\xi_k)\, [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}],$$

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_k)\, [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}], \quad \sigma'' = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_2(\xi_k)\, [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}].$$

Comme pour $j < k$ on aura $\lambda_j < \lambda_{j+1} \leqslant \lambda_k < \lambda_{k+1}$, alors

$$\begin{aligned} [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}]\, [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}] &= \\ &= E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_{k+1}} E_{\lambda_j} - E_{\lambda_k} E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_k} E_{\lambda_j} = \\ &= E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j+1}} + E_{\lambda_j} = 0. \end{aligned}$$

Donc, dans le produit

$$\sigma'\sigma'' = \sum_{j, k=1}^{n-1} \varphi_1(\xi_j)\, \varphi_2(\xi_k)\, [E_{\lambda_{j+1}} - E_{\lambda_j}]\, [E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}]$$

seuls les termes pour lesquels $j = k$ sont différents de zéro. Donc

$$\sigma'\sigma'' = \sigma.$$

En passant à la limite on obtient (20).

IV. On a la majoration

$$\| J(\varphi) \| \leqslant \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|. \tag{21}$$

En effet,

$$\| J(\varphi) x \|^2 = (J(\varphi) x, J(\varphi) x) = (J(|\varphi|^2) x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x).$$

Comme

$$(E_t x, x) = \begin{cases} 0, & t < m, \\ \| x \|^2, & t > M, \end{cases}$$

on a

$$\| J(\varphi) x \|^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M+\varepsilon} |\varphi(t)|^2 d(E_t, x, x) \leqslant \max_{t \in [m-\varepsilon, M+\varepsilon]} |\varphi(t)|^2 \| x \|^2.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient à la limite (compte tenu de la continuité de la fonction $\varphi(t)$)

$$\| J(\varphi) x \|^2 \leqslant \max_{t \in [m, M]} |\varphi(t)|^2 \| x \|^2,$$

ce qui équivaut à (21).

V. Si une suite de fonctions continues $\{\varphi_n\}$ est uniformément convergente vers une fonction φ sur l'intervalle $[m, M]$, alors $J(\varphi_n) \to J(\varphi)$.

Les propriétés des intégrales d'opérateur $J(\varphi)$ sont les mêmes que celles des fonctions d'opérateur. Cette circonstance est clarifiée par le théorème ci-après.

THÉORÈME 6. *Soit $\{E_\lambda\}$ une partition de l'unité, continue à droite comme fonction d'un paramètre λ. Alors $\{E_\lambda\}$ est la fonction spectrale de l'opérateur*

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, dE_t,$$

et de plus

$$J(\varphi) = \varphi(U). \tag{22}$$

DÉMONSTRATION. On vérifie immédiatement que (22) est vraie à l'aide des propriétés II, III et V.

En particulier

$$U_\lambda^+ = \varphi_\lambda^+(U) = J(\varphi_\lambda^+),$$

d'où

$$(U_\lambda^+ x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda^+(t) \, d(E_t x, x) = \int_{\lambda}^{\infty} (t - \lambda) \, d(E_t x, x). \tag{23}$$

Si $I_\lambda x = x$, c'est-à-dire si $U_\lambda^+ x = 0$, alors

$$\int_\lambda^\infty (t-\lambda)\, d\,(E_t x,\, x) = 0,$$

ce qui n'a lieu que lorsque

$$(E_t x,\, x) = \text{const} \quad \text{pour} \quad t > \lambda.$$

D'où

$$(E_t x,\, x) = (E_\infty x,\, x) = (x,\, x) \quad (t > \lambda)$$

et par suite

$$E_t x = x \quad (t > \lambda).$$

En faisant tendre $t \to \lambda + 0$ on trouve

$$E_\lambda x = E_{\lambda+0} x = x,$$

c'est-à-dire

$$I_\lambda \leqslant E_\lambda.$$

Inversement, si $E_\lambda x = x$, on a *a fortiori* $E_t x = x$ pour $t > \lambda$. L'égalité (23) nous donne alors

$$(U_\lambda^+ x,\, x) = 0.$$

Donc

$$U_\lambda^+ x = 0 \text{ *)},$$

ce qui signifie que $I_\lambda x = x$. Donc, $I_\lambda \geqslant E_\lambda$ et en définitive $I_\lambda = E_\lambda$.

Remarque. Si la partition de l'unité n'est pas continue à droite, on démontre que

$$I_\lambda = E_{\lambda+0}.$$

En effet, l'inégalité $I_\lambda \leqslant E_{\lambda+0}$ a été établie dans la démonstration du théorème. En passant à la limite dans l'inégalité $I_t \geqslant E_t$ pour $t \to \lambda + 0$, on obtient l'inégalité inverse

$$I_\lambda = I_{\lambda+0} \geqslant E_{\lambda+0}.$$

Soient U un opérateur compact auto-adjoint et $\{\lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. En désignant comme précédemment par H_{λ_k} les sous-espaces propres et par P_{λ_k} les projecteurs sur eux, considérons les opérateurs

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} P_{\lambda_k} \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{24}$$

Il est immédiat de vérifier que la famille $\{E_\lambda\}$ est une partition de l'unité, continue à droite. Donc, $\{E_\lambda\}$ est la fonction spectrale

*) Voir remarque de la page 353.

de l'opérateur

$$\widetilde{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t.$$

On vérifie aussitôt que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t = \sum_k \lambda_k P_{\lambda_k},$$

c'est-à-dire, compte tenu de la formule (3) du paragraphe précédent,

$$\widetilde{U} = U.$$

Donc, les projecteurs (24) forment une fonction spectrale de l'opérateur U, et la représentation intégrale de l'opérateur U par la formule (18) est confondue avec la formule (3) du paragraphe précédent.

5.7. La représentation intégrale (17) nous fournit une voie pour la généralisation de la notion de fonction d'opérateur. Soit une fonction $\varphi(t)$ telle que pour tout couple (x, y) existe (et est finie) l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$J(\varphi; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, d(I_t x, y),$$

où $\{I_\lambda\}$ est la fonction spectrale de l'opérateur U. Comme plus haut, on peut montrer que la fonctionnelle $J(\varphi; x, y)$ admet la représentation

$$J(\varphi; x, y) = (J(\varphi) x, y) \quad (x, y \in \mathrm{H}),$$

où $J(\varphi)$ est un opérateur linéaire. Eu égard à la formule (22) il apparaît naturel de poser

$$\varphi(U) = J(\varphi).$$

On peut aborder la généralisation de la notion de fonction d'opérateur sous un autre angle. A partir d'une fonction spectrale on peut définir une mesure opératorielle de même qu'en partant d'une fonction monotone réelle on définit une fonction additive d'ensemble. Si $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble e mesurable relativement à une mesure opératorielle, alors $\varphi(U)$ est la valeur de la mesure opératorielle sur e. La signification de $\varphi(U)$ est claire dans le cas aussi où $\varphi(t)$ est une fonction mesurable à valeurs finies. Une fonction mesurable relativement à la mesure opératorielle est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions mesurables à valeurs finies, ce qui permet de définir $\varphi(U)$ pour une fonction mesurable arbitraire $\varphi(t)$.

CHAPITRE X

ESPACES NORMÉS ORDONNÉS

Les notions de positivité, d'inégalité, d'opérateur positif jouent un rôle de premier plan dans des problèmes concrets importants pour l'analyse des espaces vectoriels de fonctions et de suites. Cependant ces notions et les faits qui leur sont rattachés n'ont trouvé aucun reflet dans la théorie des espaces normés de Banach jusqu'ici étudiés. Du coup, des questions fondamentales de l'analyse classique et appliquée n'ont pu être abordées par les méthodes de l'analyse fonctionnelle. Ceci a conduit L. Kantorovitch (cf. [2] à [4a]) à échafauder en 1935-1937 la théorie des espaces vectoriels semi-ordonnés ou lattis vectoriels, c'est-à-dire des espaces munis d'une structure d'espace vectoriel et d'une structure d'ordre compatibles d'une certaine manière. Ces travaux contenaient l'axiomatique des lattis vectoriels, la théorie des opérateurs linéaires sur ces espaces, diverses applications de cette théorie à des problèmes de la théorie des fonctions et des équations fonctionnelles.

Dans la suite, la théorie des lattis vectoriels a connu un développement fécond dans les travaux de l'école de Léningrad animée par B. Voulikh, A. Pinsker, A. Youdine, G. Akilov et leurs disciples A. Vexler, D. Vladimirov, G. Rotkovitch. G. Lozanovski a apporté une grande contribution à la théorie des lattis normés qui occupe une place importante dans ce domaine de l'analyse fonctionnelle.

A la théorie des lattis vectoriels se rattachent étroitement les recherches de M. Krein sur les espaces normés munis d'un cône d'éléments positifs, commencées pendant la deuxième moitié des années trente et poursuivies par l'école de Voronej (M. Krasnosselski et ses élèves). Ces recherches sont reliées en premier lieu à la théorie spectrale et à la résolution d'équations opératorielles (analyse non linéaire). Nous n'insisterons pas sur cette théorie, renvoyant le lecteur à l'article de Krein et Rutman [1] et à la monographie de Krasnosselski [II]. Pour les liens entre la théorie des lattis vectoriels et la théorie de Krein, voir la monographie de Voulikh [IV]. La théorie des lattis vectoriels est également rattachée à celle des semi-corps topologiques (cf. Antonovski, Boltianski et Sarymsakov).

Le rapport de F. Riesz [4] au congrès mathématique de Bologne en 1929 sur les treillis fonctionnels a fortement contribué au développement de la théorie des lattis vectoriels. Au cours des années quarante le mathématicien japonais Nakano, développant des études antérieures, a bâti une théorie systématique des espaces semi-ordonnés renfermant de nouvelles voies de recherche (cf. Nakano). D'autres mathématiciens japonais (T. Ogasawara, I. Amémia, T. Ando, K. Yosida, S. Kakutani, T. Shimogaki), américains (G. Birkhoff, S. Bochner, M. Stone et d'autres), hollandais (H. Freudenthal, W. Luxemburg, A. Zaanen), français (J. Dieudonné) ont joué un rôle important dans le développement de la théorie des lattis vectoriels.

Dans ce chapitre nous étudions les lattis normés, c'est-à-dire des lattis vectoriels qui sont des espaces normés dans lesquels la norme et la structure d'ordre sont reliées de façon naturelle.

Signalons que les espaces idéaux constituent une importante classe de lattis vectoriels et que l'approche abstraite permet d'obtenir des résultats nouveaux et intéressants (cf. § 5) même si l'on n'a en vue que les applications à ces espaces.

Pour exposer les faits essentiels de la théorie des lattis normés, nous aurons besoin d'un grand nombre de résultats purement algébriques de la théorie générale des lattis vectoriels. Nous formulons soigneusement ces résultats sans les démontrer, renvoyant le lecteur à la monographie de Voulikh [I]. Notre exposé complète singulièrement l'ouvrage précité. Les plus importantes monographies consacrées à la théorie des lattis vectoriels sont celles de Kantorovitch, Voulikh et Pinsker; Voulikh [I]; Nakano; Luxemburg et Zaanen; Fremlin; Schaefer [II]. La théorie des lattis normés occupe une place importante dans la série d'articles à caractère récapitulatif de Luxemburg [1] et de Luxemburg et Zaanen [1]. La plupart des résultats exposés dans les paragraphes 1 à 4 sont bien connus et figurent dans les références précitées.

§ 1. Lattis vectoriels

1.1. Un espace vectoriel réel $\mathbf{X}$ est un *lattis vectoriel* (en abrégé, un l.v.) ou un *espace de Riesz* ou encore *K-linéal* s'il est un ensemble réticulé (c'est-à-dire un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x, y admettent une borne supérieure $\sup(x, y)$ et une borne inférieure $\inf(x, y)$) sur lequel la structure d'espace vectoriel et la structure d'ordre sont compatibles, c'est-à-dire satisfont aux deux axiomes suivants:

1) $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$ quel que soit $z \in \mathbf{X}$;

2) $x \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \geqslant 0$ pour tout scalaire $\lambda \geqslant 0$.

L'ensemble $\mathbf{X}_+ = \{x \in \mathbf{X} : x \geqslant 0\}$ est appelé *cône* des éléments positifs de $\mathbf{X}$. Il est évident que tout ensemble fini d'éléments d'un l.v. admet une borne supérieure et une borne inférieure.

On appelle *partie positive* de $x \in X$ l'élément $x_+ = \sup(x, 0)$, *partie négative* l'élément $x_- = \sup(-x, 0) = (-x)_+$, *module* l'élément $|x| = x_+ + x_-$. Pour tout $x \in X$, on a $x = x_+ - x_-$.

On appelle *intervalle* dans X tout ensemble de la forme $[x_1, x_2] = \{x \in X : x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$, où $x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$.

Deux éléments x, y de X sont *étrangers* (on écrira x e y) si $\inf(|x|, |y|) = 0$. Deux ensembles $E_1, E_2 \subset X$ sont *étrangers* (E_1 e E_2) si tout élément $x \in E_1$ est étranger à tout élément $y \in E_2$. Enfin, un élément $x \in X$ est *étranger* à un ensemble $E \subset X$ (x e E) si x e y pour tout $y \in E$. Si E est un ensemble quelconque de X, son *complément étranger* est l'ensemble E^e de tous les $x \in X$ étrangers à E. On convient que $E^{ee} = (E^e)^e$. Il est aisé de voir que $(E^e)^{ee} = E^e$ pour tout E.

On dira qu'un ensemble E_1 est *plus large* qu'un ensemble E_2 ($E_1, E_2 \subset X$) si $E_1^{ee} \supset E_2^{ee}$; E_1 est *de même largeur* que E_2 si $E_1^{ee} = E_2^{ee}$. L'élément $x \in X_+$ tel que $\{x\}^{ee} = X$ s'appelle *unité* (*faible*).

Un sous-ensemble E d'un l.v. X est *solide* si $x \in X$, $y \in E$, $|x| \leqslant |y|$ entraînent $x \in E$. Si E est un sous-ensemble quelconque de X, le plus petit ensemble solide contenant E est appelé *enveloppe solide* de E et noté sol (E). Il est aisé de voir que sol (E) est l'ensemble de tous les $x \in X$ tels qu'existe $y \in E$ pour lequel $|x| \leqslant |y|$.

1.2. Un sous-espace vectoriel Y d'un l.v. X est un *sous-lattis vectoriel* de X si quels que soient $y_1, y_2 \in Y$ on a $\sup(y_1, y_2)$, $\inf(y_1, y_2) \in Y$. On appelle *idéal* un sous-ensemble linéaire solide d'un lattis vectoriel. On appelle *fondement* un idéal Y d'un l.v. X de même largeur que X, c'est-à-dire $Y^e = \{0\}$.

Si $u \in X_+$, le plus petit idéal de X contenant u s'appelle *idéal principal* ou *u-idéal* de X et se note $X(u)$. Il est aisé de voir que $X(u)$ est constitué de tous les $x \in X$ tels que $|x| \leqslant \lambda u$ pour un $\lambda \in [0, +\infty[$.

Si un l.v. X est confondu avec l'idéal principal $X(u)$ pour un $u \in X_+$, on dit que X est un *lattis vectoriel d'éléments bornés*, et u l'*unité forte* (de X).

Dans un l.v. X, on dit qu'un ensemble $Y \subset X$ est une *bande* s'il est le complément étranger d'un ensemble $E \subset X$. Autrement dit, un ensemble $Y \subset X$ est une *bande* dans X si $Y = Y^{ee}$.

On dit qu'un l.v. X est *archimédien* si $nx \leqslant y \in X$, $\forall x \in X_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entraîne $x = 0$. Tous les lattis vectoriels présentant un intérêt pour l'analyse fonctionnelle sont archimédiens.

X étant un l.v. archimédien, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble $Y \subset X$ soit une bande dans X est que Y soit un idéal dans X et que soit réalisée la condition suivante (dite *condition de validité*) : si $E \subset Y$ et dans X existe $\sup E$ (resp. $\inf E$), alors $\sup E \in Y$ (resp. $\inf E \in Y$).

1.3. On dit qu'un l.v. X est un *K_σ-espace* ou un *espace dénombrablement complètement réticulé* (ou encore un l.v. σ-complet) si

toute partie majorée dénombrable admet une borne supérieure dans X. On dit qu'un l.v. X est un *K-espace* ou un *espace complètement réticulé* (ou un l.v. complet) si toute partie majorée non vide de X admet une borne supérieure dans X. Il est aisé de voir (cf. démonstration du corollaire 1 du théorème I.6.17) que dans un K_σ-espace tout ensemble dénombrable minoré admet une borne inférieure, de même que dans un K-espace un ensemble minoré arbitraire. Un K_σ-espace est un l.v. archimédien.

Dans un K_σ-espace (resp. un K-espace) un idéal est un K_σ-espace (resp. un K-espace).

Une importante propriété des bandes dans un K-espace X est la possibilité de projeter X canoniquement sur elles. Soit Y une bande dans un K-espace X, $x \in X_+$. Posons

$$[Y]\, x = \sup \{y \in Y_+ : y \leqslant x\}.$$

Cette borne supérieure existe dans X par définition du K-espace, et, en vertu de la condition de validité, $[Y]\, x \in Y$. Pour tout $x \in X$, posons

$$[Y]\, x = [Y]\, x_+ - [Y]\, x_-.$$

Il est évident que $[Y]$ est un opérateur linéaire de X dans Y laissant invariants les éléments de Y. On voit aisément que

$$|\, [Y]\, x \,| \leqslant |\, x \,| \quad \text{et} \quad |\, [Y]\, x \,| = [Y]\, (|\, x \,|) \quad (x \in X).$$

L'opérateur $[Y]$ est dit *projecteur sur la bande* Y. Tout élément $x \in X$ admet la représentation unique $x = y + z$, où $y \in Y$, $z \in Y^e$, de plus $y = [Y]\, x$, $z = [Y^e]\, x$ (cf. Voulikh [I], théorème IV.3.2).

E étant un ensemble quelconque de X, on désignera par $[E]$ le projecteur $[E^{ee}]$ sur la bande $[E^{ee}]$ engendrée par E. Si $u \in X$, on appelle *bande principale* et on note X_u la plus petite bande $\{u\}^{ee}$ de X contenant u. Dans les notations précédentes, $[u]$ désigne un projecteur sur X_u.

Un l.v. X est de *type dénombrable* si toute famille bornée d'éléments non nuls deux à deux étrangers de X est au plus dénombrable. La classe des l.v. de type dénombrable est commode, car toute borne est réalisée sur un ensemble dénombrable. Plus exactement, un l.v. archimédien X est un l.v. de type dénombrable si et seulement si est satisfaite la condition :

(*) pour tout ensemble $E \subset X$ admettant une borne supérieure, il existe un sous-ensemble au plus dénombrable $E_0 \subset E$, tel que $\sup E_0 = \sup E$;

ou bien la condition analogue déduite de (*) en remplaçant sup par inf.

Introduisons les notations suivantes. Soit $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) une suite généralisée dans un l.v. X. L'écriture $x_\alpha \uparrow$ signifie que pour tous

α, $\alpha' \in A$, tels que $\alpha \geqslant \alpha'$, on a $x_\alpha \geqslant x_{\alpha'}$. L'écriture $x_\alpha \uparrow x$ exprime que $x_\alpha \uparrow$ et $\sup x_\alpha = x$. On définit par analogie $x_\alpha \downarrow$ et $x_\alpha \downarrow x$.

On arrive souvent à ramener l'étude des l.v. archimédiens à celle des K-espaces à l'aide de la K-complétion. Tout l.v. archimédien X admet un K-espace kX et un seul, appelé *K-complétion* de X, possédant les propriétés suivantes:

1) X est un sous-lattis vectoriel de kX;

2) si $E \subset$ X admet une borne supérieure $x = \sup E$ dans X, alors $x = \sup E$ dans kX;

3) pour tout $\hat{x} \in k$X existent des suites généralisées $\{y_\alpha\}$ et $\{y'_\beta\}$ dans X, telles que $y_\alpha \uparrow \hat{x}$, $y'_\beta \downarrow \hat{x}$.

On obtient la K-complétion de X par la méthode ordinaire des coupures, de même que l'on construit les nombres réels par la méthode de Dedekind (cf. Voulikh [1], théorème IV.11.1).

1.4. Considérons deux types de convergence dans un l.v. X.

Une suite $\{x_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) est *(o)-convergente* vers une limite $x \in$ X (on note $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ ou $x = (o)\text{-}\lim x_\alpha$) si existe une suite $\{y_\beta\}$ ($\beta \in B$) telle que

1) $y_\beta \downarrow 0$;

2) pour tout $\beta \in B$ existe $\alpha_0 \in A$, tel que $|x_\alpha - x| \leqslant y_\beta$ pour tous les $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Dans le cas d'une suite ordinaire $\{x_n\}$ nous nous servirons d'une autre définition de la convergence pour la structure d'ordre. On dira qu'une suite est *($o\sigma$)-convergente* vers une limite $x \in$ X (et l'on notera $x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$ ou $x = (o\sigma)\text{-}\lim x_n$) si existe une suite $\{y_n\}$ telle que

1) $y_n \downarrow 0$;

2) $|x_n - x| \leqslant y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Si X est un K_σ-espace ou un l.v. archimédien de type dénombrable, les deux définitions de la convergence pour la structure d'ordre sont confondues. Ceci n'est pas vrai dans le cas général.

Soient X un l.v., $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ X. On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est (o)-convergente vers x et l'on note $x = (o)\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ si la suite de ses sommes partielles est (o)-convergente vers x. On définit de façon analogue la ($o\sigma$)-convergence d'une série.

Si X est un l.v. archimédien de type dénombrable et la suite généralisée $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ ($\alpha \in A$), il existe une suite strictement croissante d'indices $\alpha_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) telle que $x_{\alpha_n} \xrightarrow{(o\sigma)} x$.

A noter que dans un l.v. les opérations linéaires et réticulantes sont continues pour la convergence au sens de la structure d'ordre.

Soit X un l.v. archimédien. Une suite $\{x_n\}$ est *(r)-convergente* vers une limite $x \in$ X ($x_n \xrightarrow{(r)} x$) si existe un élément $z \in X_+$ appelé

régulateur de convergence, tel que $|x - x_n| \leqslant \varepsilon_n z$ $(n \in \mathbb{N})$, où $\varepsilon_n \in [0, +\infty[$ et $\varepsilon_n \to 0$. Une suite $\{x_n\}$ est *(r)-fondamentale* si existent $z \in X_+$ et une suite de nombres $\varepsilon_n \downarrow 0$, tels que $|x_n - x_m| \leqslant \leqslant \varepsilon_n z$ pour $m \geqslant n$. La (r)-convergence entraîne la $(o\sigma)$-convergence. Un l.v. archimédien X est *(r)-complet* si toute suite (r)-fondamentale de ses éléments est (r)-convergente. Tout K_σ-espace est (r)-complet (Voulikh [I], lemme V.3.1).

1.5. Les théorèmes de réalisation des l.v. sous forme d'espaces de fonctions continues sont un important outil d'étude.

Soient X et Y des l.v. Une application linéaire U de X dans Y est un *homomorphisme réticulant* si pour tous $x_1, x_2 \in X$

$$U(\sup(x_1, x_2)) = \sup(U(x_1), U(x_2)).$$

Il est évident que cette relation équivaut à

$$U(\inf(x_1, x_2)) = \inf(U(x_1), U(x_2)),$$
$$|U(x)| = U(|x|).$$

En particulier, si $x \geqslant 0$, on a $U(x) \geqslant 0$.

On dit que U *conserve les bornes* si l'existence de sup E dans X entraîne celle de sup $U(E)$ dans Y, et de plus

$$\sup U(E) = U(\sup E).$$

Cette formule est également valable pour inf.

On appelle *isomorphisme réticulant* de X sur Y un homomorphisme réticulant bijectif U de X sur Y. Si U est un isomorphisme réticulant, les applications U et U^{-1} conservent les bornes. On dira que deux l.v. X et Y sont *(o)-isomorphes* si existe un isomorphisme réticulant de X sur Y. Il est évident que $U: X \to Y$ est un isomorphisme réticulant si et seulement si U est un isomorphisme de la structure d'espace vectoriel de X sur celle de Y et si $U(X_+) = Y_+$.

On dit qu'un compact Q est *extrêmement discontinu* si l'adhérence de tout ensemble ouvert de Q est ouverte-fermée. On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le l.v. de fonctions continues $C(Q)$ soit un K-espace est que le compact Q soit extrêmement discontinu (cf. Voulikh [I]).

Soit Q un compact extrêmement discontinu. Désignons par $C_\infty(Q)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues prolongées sur Q, c'est-à-dire les fonctions susceptibles de prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ sur des ensembles nulle part denses. L'espace $C_\infty(Q)$ se transforme naturellement en espace vectoriel. En effet, on peut prouver que si, x_1 et x_2 appartenant à $C_\infty(Q)$, on pose $y(t) = = x_1(t) + x_2(t)$ pour tous les $t \in Q$ tels que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ soient finis, la fonction y admet un prolongement unique à un élément de $C_\infty(Q)$, somme de x_1 et de x_2. La définition de la multiplication par un nombre n'apporte pas de complications. Ordonnons $C_\infty(Q)$

en convenant que $x_1 \geqslant x_2$ si $x_1(t) \geqslant x_2(t)$ pour tous les $t \in Q$. On fait alors de $\mathbf{C}_\infty(Q)$ un K-espace (cf. Voulikh [I], théorème V.2.2). Le théorème suivant est primordial (cf. Voulikh [I], théorème V.4.2).

THÉORÈME 1. *Tout K-espace* X *est* (o)*-isomorphe à un fondement du K-espace* $\mathbf{C}_\infty(Q)$, *construit sur un compact extrêmement discontinu convenable* Q *). *Si E est un ensemble fixe d'éléments positifs, deux à deux étrangers de* X, *on peut choisir cet isomorphisme de telle sorte que les images des éléments de E soient les fonctions caractéristiques d'ensembles ouverts-fermés de Q.*

Un l.v. archimédien pouvant être plongé dans la K-complétion et cette complétion pouvant être réalisée d'après le théorème 1 sous forme d'un K-espace de fonctions sur lequel les opérations linéaires et réticulantes, appliquées à un nombre fini d'éléments, portent sur les valeurs des fonctions en un point, on est conduit au *principe de conservation des relations* de A. Youdine. Soient données deux expressions $u(x_1, \ldots, x_n)$ et $v(x_1, \ldots, x_n)$ obtenues par un nombre fini d'opérations linéaires et réticulantes, où toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$ prennent leurs valeurs dans un l.v. L'inégalité $u \geqslant v$ a lieu dans un l.v. archimédien X pour toutes les valeurs des variables si et seulement si l'inégalité $u \geqslant v$ est satisfaite lorsqu'on remplace $x_1, \ldots, x_n$ par des réels quelconques. (L'analogue infini de ce principe est faux!) Notons qu'il est possible de prouver par un autre procédé la validité de ce principe pour un l.v. quelconque. Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer de la commodité du principe formulé en démontrant que pour tous $x, y, z \in \mathrm{X}$

$$|\sup(x, z) - \sup(y, z)| \leqslant |x - y|,$$
$$|\inf(x, z) - \inf(y, z)| \leqslant |x - y|,$$

une fois en se servant de ce principe, l'autre fois à partir de la définition d'un l.v.

Caractérisons maintenant les K-espaces X dont la réalisation d'après le théorème 1 donne l'espace $\mathbf{C}_\infty(Q)$ tout entier. Un K-espace W est *achevé* si tout ensemble d'éléments deux à deux étrangers de W admet une borne supérieure. Le K-espace $\mathbf{C}_\infty(Q)$ est achevé, et, inversement, tout K-espace achevé est isomorphe (par l'isomorphisme du théorème 1) à l'espace $\mathbf{C}_\infty(Q)$. Si un K-espace X est (o)-isomorphe au fondement d'un K-espace achevé W, on dit que W est l'*extension maximale* de X et on l'écrit $\mathfrak{M}(\mathrm{X})$. Cet espace est unique à un isomorphisme réticulant près. L'existence de l'extension maximale est assurée par le théorème 1.

Une approche moderne de la réalisation des l.v. est accessible dans l'article de Vexler [1].

---

*) Ce compact est unique à un homéomorphisme près.

1.6. Illustrons les notions introduites sur l'exemple des espaces idéaux dont nous connaissons un peu la théorie.

Tout d'abord, nous étendons la notion d'espace idéal en gardant la définition précédente, mais en remplaçant la condition de σ-finitude de la mesure par la propriété plus faible de somme directe (I.6.10). Le théorème I.6.17 nous dit que l'espace réel $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ est un K-espace, de plus il y a coïncidence entre les éléments désignés par $\inf(x, y)$, $\sup(x, y)$, $|x|$, x_+, x_- dans IV.3.1 et 1.1. Un espace idéal sera idéal dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, un espace fondamental, fondement dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, d'où leur dénomination. Un ensemble E_1 est plus large que E_2 si $\operatorname{supp} E_1 \supset \operatorname{supp} E_2$ (mod. μ). L'unité dans un e.i. $\mathbf{X}$ est une fonction $x \in \mathbf{X}$ telle que $x(t) > 0$ presque partout. Un exemple de sous-lattis vectoriel dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ qui ne soit pas idéal est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs finies. L'espace $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma, \mu)$ est manifestement u-idéal dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, où $u(t) \equiv 1$. L'ensemble des bandes dans un e.f. $\mathbf{X}$ est en correspondance biunivoque avec les éléments de Σ (les ensembles égaux mod. μ sont identifiés) : à $A \in \Sigma$ est associée la bande $\mathbf{X}_A = \{x \in \mathbf{X} : \operatorname{supp} x \subset A \text{ (mod. } \mu)\}$. Le projecteur $[\mathbf{X}_A]$ sur la bande $\mathbf{X}_A$ est l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble A : $[\mathbf{X}_A]\, x = x\chi_A$.

Il est immédiat de vérifier qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le K-espace $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ soit de type dénombrable est que la mesure μ soit σ-finie. C'est la raison pour laquelle nous avons réussi à nous contenter jusqu'à maintenant des suites pour étudier les espaces idéaux.

Si $\mathbf{X}$ est un e.i., $x_n \xrightarrow{(o)} x$ dans $\mathbf{X}$ si et seulement si $x_n(t) \to x(t)$ presque partout et $|x_n| \leqslant y \in \mathbf{X}$ $(n \in \mathbb{N})$. Nous avons déjà eu affaire à ce type de convergence (cf. VI.1.1). Dans le cas de $\mathbf{S}(0, 1)$ le compact extrêmement discontinu Q du théorème 1 est plus exotique par ses propriétés topologiques que le compact $[0, 1]$, cependant même ici la réalisation dont il s'agit dans le théorème 1 est souvent la clef de nouveaux résultats *). Notons enfin que $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ est un K-espace achevé, extension maximale de tout espace fondamental sur (T, Σ, μ).

1.7. Les faits prouvés pour les espaces idéaux se généralisent souvent aux lattis vectoriels abstraits. Du reste, il convient d'observer que la théorie des espaces idéaux a été élaborée postérieurement à la théorie générale des lattis vectoriels. Nous aurons besoin de la généralisation suivante du lemme IV.3.1.

LEMME 1. *Si* $\mathbf{X}$ *est un l.v. archimédien,* $\mathbf{Y}$ *un fondement dans* $\mathbf{X}$, *alors pour tout* $x \in \mathbf{X}_+$ *il existe une suite généralisée* $y_\alpha \uparrow x$, $0 \leqslant y_\alpha \in \mathbf{Y}$.

*) On remarquera que dans ce cas le compact Q est un compact guelfandien de l'algèbre de Banach $\mathbf{L}^\infty(0, 1)$ (cf. Naïmark).

DÉMONSTRATION. On remarquera qu'il suffit de montrer que pour tout $x \in X_+$

$$x = \sup \{y \in Y : 0 \leqslant y \leqslant x\}. \tag{1}$$

Y contenant la borne supérieure de deux quelconques de ses éléments, l'ensemble $A = \{y \in Y : 0 \leqslant y \leqslant x\}$ muni de l'ordre induit à partir de X est filtrant supérieurement. Donc, si l'on identifie l'indice de tout élément $y \in A$ à cet élément, A sera une suite généralisée strictement croissante, et de plus $y \uparrow x$ $(y \in A)$.

Supposons que la formule (1) n'est pas vérifiée pour un $x \in X_+$. Il existe alors $y_0 \in X$ tel que $y \leqslant y_0$, $\forall y \in A$, mais il est faux que $x \leqslant y_0$. Pour $y_1 = \inf (x, y_0)$ on obtient $y \leqslant y_1$ pour tous les $y \in A$ et $y_1 < x$. Y étant un fondement dans X, il existe pour $x - y_1 > 0$ un $z_0 \in Y$ tel que $\inf ((x - y_1), z_0) > 0$. Pour $z_1 = \inf ((x - y_1), z_0) \in Y$ on a $0 < z_1 \leqslant x - y_1$. Donc, pour tout $y \in A$ on obtient $y + z_1 \leqslant x - y_1 + y \leqslant x$. Comme $y + z_1 \in Y$, on déduit par récurrence que $y + nz_1 \leqslant x$ $(n \in \mathbb{N})$, ce qui contredit le principe d'Archimède.

§ 2. Fonctionnelles et opérateurs linéaires

2.1. Soient X un l.v., Y un K-espace. Dans ce chapitre nous n'étudierons que les opérateurs et fonctionnelles linéaires, aussi dans toutes les définitions qui suivront omettrons-nous le mot « linéaire ».

Un opérateur $U : X \to Y$ est *positif* si $U(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Un opérateur U est *régulier* si $U = U_1 - U_2$, où U_i $(i = 1, 2)$ sont des opérateurs linéaires positifs. L'ensemble des opérateurs réguliers de X dans Y sera désigné par $L^{\sim}(X, Y)$.

THÉORÈME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire $U : X \to Y$ soit régulier est que l'image $U(E)$ de tout ensemble borné $E \subset X$ soit bornée dans* Y.

Les opérateurs vérifiant le critère du théorème 1 sont dits *(o)-bornés*. Le théorème affirme que si Y est un K-espace, il y a coïncidence entre la classe des opérateurs réguliers et la classe des opérateurs (o)-bornés. Ceci est mis en défaut dans le cas général.

Ordonnons l'ensemble $L^{\sim}(X, Y)$ de la manière suivante : $U \geqslant 0$ si U est un opérateur positif ; $U_1 \geqslant U_2$ si $U_1 - U_2 \geqslant 0$. Il est très important que l'ensemble $L^{\sim}(X, Y)$ muni de cette relation d'ordre soit un K-espace (Voulikh [1], théorème VIII.2.1). Si de plus $\{U_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ est un ensemble d'opérateurs majoré, l'opérateur $U = \sup U_\xi$ se calcule pour tout $x \in X_+$ par la formule

$$U(x) = \sup \{U_{\xi_1}(x_1) + \ldots + U_{\xi_n}(x_n) : x = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ x_i \geqslant 0,\ \xi_i \in \Xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n)\}. \tag{1}$$

La borne inférieure se calcule de façon analogue. De (1) on déduit sans peine que si $U \in L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, alors pour $x \in \mathbf{X}_+$ on a

$$U_+(x) = \sup\{U(x'): 0 \leqslant x' \leqslant x\},$$
$$U_-(x) = -\inf\{U(x'): 0 \leqslant x' \leqslant x\},$$
$$|U|(x) = \sup\{|U(x')|: |x'| \leqslant x\}.$$

D'où il suit que pour tout $x \in \mathbf{X}$

$$|U(x)| \leqslant |U|(|x|). \tag{2}$$

La formule (1) nous dit que si U_α, $U \in L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ et $U_\alpha \xrightarrow{(o)} U$, on a $U_\alpha(x) \xrightarrow{(o)} U(x)$, $\forall x \in \mathbf{X}$ (la réciproque est fausse).

Introduisons encore quelques classes d'opérateurs.

Un opérateur $U \in L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est *(o)-continu* ou *normal* si $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$ entraîne que $U(x_\alpha) \xrightarrow{(o)} U(x)$. L'ensemble $L_n^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de tous les opérateurs (o)-continus est une bande dans l'espace $L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Un opérateur $U \in L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est *(oσ)-continu* si $x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$ entraîne que $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$. L'ensemble $L_{n\sigma}^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de tous les opérateurs (oσ)-continus est aussi une bande dans $L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. On a manifestement $L_n^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset L_{n\sigma}^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Pour la démonstration de ce qui précède on peut voir Voulikh [I], chapitre VIII, §§ 3, 4.

2.2. Arrêtons-nous maintenant plus longuement sur les fonctionnelles, c'est-à-dire sur le cas où $\mathbf{Y} = \mathbf{R}^1$. Posons

$$\mathbf{X}^{\sim} = L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{R}^1), \quad \mathbf{X}_n^{\sim} = L_n^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{R}^1), \quad \mathbf{X}_{n\sigma}^{\sim} = L_{n\sigma}^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{R}^1).$$

On remarquera que si f est une fonctionnelle sur un l.v. archimédien $\mathbf{X}$, alors $f \in \mathbf{X}_{n\sigma}^{\sim}$ si $x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$ entraîne $f(x_n) \to f(x)$, ce qui facilite la vérification de la (o)-continuité. Le K-espace $\mathbf{X}_n^{\sim}$ est dit *(o)-dual* de $\mathbf{X}$. Si $\mathbf{X}$ est un K-espace de type dénombrable, $\mathbf{X}_n^{\sim} = \mathbf{X}_{n\sigma}^{\sim}$ d'après 1.4.

Une fonctionnelle $f \in \mathbf{X}^{\sim}$ est *singulière* si existe un fondement $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{X}$ sur lequel f est nulle. Il est aisé de voir que l'ensemble $\mathbf{X}_s^{\sim}$ de toutes les fonctionnelles singulières est un idéal dans $\mathbf{X}^{\sim}$.

Lemme 1. *Si* $\mathbf{X}$ *est un l.v. archimédien, alors* $\mathbf{X}_s^{\sim} \subset (\mathbf{X}_n^{\sim})^e$.

Démonstration. Supposons par absurde qu'il existe une fonctionnelle $f \in \mathbf{X}_s^{\sim}$ telle que pour un $g \in \mathbf{X}_n^{\sim}$ on ait $\inf(|f|, |g|) > 0$. $\mathbf{X}_s^{\sim}$ et $\mathbf{X}_n^{\sim}$ étant des idéaux, $f_1 = \inf(|f|, |g|) \in \mathbf{X}_s^{\sim} \cap \mathbf{X}_n^{\sim}$. Par définition de la fonctionnelle singulière, il existe un fondement $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{X}$ sur lequel f_1 est nulle. Le lemme 1.1 nous dit que pour tout $x \in \mathbf{X}_+$ il existe une suite généralisée $x_\alpha \uparrow x$, $0 \leqslant x_\alpha \in \mathbf{Y}$. Comme $f_1 \in \mathbf{X}_n^{\sim}$, on a $f_1(x) = \lim f_1(x_\alpha) = 0$. Donc, $f_1 = 0$, ce qui contredit le fait que $f_1 > 0$.

Plus bas, nous montrons que souvent $X_s^\sim = (X_n^\sim)^e$.

2.3. Nous indiquons maintenant quelques faits relatifs à l'injection canonique d'un l.v. X dans un espace *(o)-dual*.

Soient X un l.v., Y un idéal dans $X^\sim$, total sur X. Désignons par π l'injection canonique de X dans $Y^\sim$. Observons tout d'abord que $\pi(X) \subset Y_n^\sim$. En effet, si $x \in X$ et $f_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ dans le K-espace Y, alors $f_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ dans $X^\sim$, d'où

$$\pi(x)(f_\alpha) = f_\alpha(x) \to 0,$$

ce qui prouve que $\pi(x) \in Y_n^\sim$.

THÉORÈME 2. 1) *L'application π est un homomorphisme réticulant de X sur un sous-lattis vectoriel du K-espace $Y_n^\sim$.*

2) *L'application π conserve les bornes si et seulement si $Y \subset X_n^\sim$.*

3) *Le sous-lattis vectoriel π (X) est un idéal dans $Y^\sim$ si et seulement si $Y \subset X_n^\sim$ et X est un K-espace.*

DÉMONSTRATION. La preuve de 1) est contenue dans la démonstration du théorème IX.5.1 de Voulikh [I] (cf. aussi Schaefer [I], V.1.6). Que π conserve les bornes et que π (X) soit un idéal si $Y \subset X_n^\sim$, est prouvé dans le lemme IX.5.1, Voulikh [I]. La réciproque de 2) est évidente, quant à 3) elle se démontre comme le théorème IX.7.2, Voulikh [I].

Signalons également que l'ensemble π (X) est toujours de même largeur que $Y_n^\sim$ en vertu de la démonstration du lemme IX.5.1, Voulikh [I].

COROLLAIRE 1. *Si $x \in X$ est tel que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $f \in Y_+$, alors $x \geqslant 0$.*

COROLLAIRE 2. *Si $x_\alpha \downarrow$ dans X et $x_\alpha \to x$ (σ (X, Y)), alors $x_\alpha \downarrow x$.*

DÉMONSTRATION. Si $\alpha' \geqslant \alpha$, alors $f(x_{\alpha'} - x_\alpha) \geqslant 0$ pour tout $f \in Y_+$, d'où en passant à la limite sur α' : $f(x_\alpha - x) \geqslant 0$. Et, en vertu du corollaire 1, $x_\alpha \geqslant x$ pour tous les α. Par ailleurs, si $y \leqslant x_\alpha$ pour tous les α, alors $f(y) \leqslant f(x_\alpha) \to f(x)$ pour $f \in Y_+$, d'où, toujours en vertu du corollaire 1, $x \geqslant y$. Donc, $x_\alpha \downarrow x$.

Soient X un K-espace avec $X_n^\sim$ *total*, $\varkappa : X \to (X_n^\sim)_n^\sim$ une injection canonique. Alors X est appelé *(o)-réflexif* si $\varkappa(X) = (X_n^\sim)_n^\sim$.

THÉORÈME 3. *Soit X un K-espace avec $X_n^\sim$ total. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1) *X est (o)-réflexif;*

2) *$\varkappa$ (X) est une bande dans $(X_n^\sim)_n^\sim$;*

3) *si la suite généralisée $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ dans X est telle que pour tout $f \in X_n^\sim$, $f \geqslant 0$, on a $\sup f(x_\alpha) < +\infty$, il existe alors $x \in X$ tel que $x_\alpha \uparrow x$.*

Que 1) $\Leftrightarrow$ 3) est prouvé dans le théorème IX.6.1, Voulikh [I]; 1) $\Rightarrow$ 2) est évident. 2) $\Rightarrow$ 1) puisqu'on a indiqué après le théorème 2 que $\varkappa$ (X) est un fondement dans $(X_n^\sim)_n^\sim$.

COROLLAIRE. *Si* X *est un l.v.*, Y *une bande dans* $X^\sim$, *alors* Y *est* (o)-*réflexif.*

DÉMONSTRATION. Il est évident que l'ensemble $\{\pi(x): x \in X\}$ est un ensemble total de fonctionnelles (o)-continues sur Y. Supposons que $0 \leqslant f_\alpha \uparrow$ dans Y et $\sup F(f_\alpha) < +\infty$ pour tout $F \in Y_n^\sim$, $F \geqslant 0$. En particulier

$$\sup_\alpha \pi(x)(f_\alpha) = \sup_\alpha f_\alpha(x) < +\infty$$

pour tout $x \in X_+$. Par définition du suprémum dans l'espace $X^\sim$ il existe une fonctionnelle $f \in X^\sim$ telle que $f_\alpha \uparrow f$. Comme Y est une bande, on a $f \in Y$, d'où la proposition 3) du théorème 3.

En particulier, les espaces $X^\sim$ et $X_n^\sim$ sont (o)-réflexifs.

2.4. Considérons encore un espace idéal X et supposons comme dans 1.6 que la mesure possède la propriété de somme directe. L'espace S (T, Σ, μ) et tous ses idéaux étant des K-espaces de type dénombrable dans le cas d'une mesure σ-finie, il y a, comme indiqué dans 2.2, coïncidence entre les classes de fonctionnelles (o)-continues et $(o\sigma)$-continues. Donc, au chapitre VI nous avons bien eu affaire à des fonctionnelles (o)-continues.

Le théorème VI.1.1 de représentation de $X_n^\sim$ à l'aide de l'espace dual X′ s'étend sans changements au cas où la mesure μ possède la propriété de somme directe. De plus, l'application $x' \in X' \to f_{x'} \in X_n^\sim$ est un (o)-isomorphisme de X′ sur $X_n^\sim$. Donc, si

$$f(x) = \int_T x(t)\, x'(t)\, d\mu \quad (x \in X),$$

alors

$$|f|(x) = \int_T x(t)\, |x'(t)|\, d\mu,$$

$$f_+(x) = \int_T x(t)\, x'_+(t)\, d\mu, \quad f_-(x) = \int_T x(t)\, x'_-(t)\, d\mu.$$

Si X est un e.i., grâce au théorème VI.1.1 on déduit immédiatement qu'il est (o)-réflexif si et seulement si $X = X''$.

2.5. La classe des espaces idéaux (de même que C (K)) est une très importante classe de lattis vectoriels, donc il est indispensable d'en établir la caractéristique abstraite dans la classe de tous les l.v. Il s'avère qu'un K-espace X est (o)-isomorphe à un espace idéal si et seulement si existe dans X un fondement Y avec $Y_n^\sim$ total. Nous achèverons ce paragraphe par la démonstration de ce résultat. Nous aurons préalablement besoin du lemme suivant.

LEMME 2. *Si* X *est un K-espace, alors pour toute* $f \in X_n^{\sim}$, $f \geqslant 0$, *il existe une bande* C_f *appelée bande de positivité stricte de la fonctionnelle* f, *possédant les propriétés suivantes*:

1) $f(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$ *de* C_f;
2) $f(x) = 0$ *pour tous les* $x \in (C_f)^c$.

DÉMONSTRATION. Posons

$$N_f = \{x \in X: f(|x|) = 0\}.$$

N_f est une bande car $f \in X_n^{\sim}$. La bande $C_f = (N_f)^c$ est bien la bande cherchée.

LEMME 3. *Si* X *est un K-espace*, $f, g \geqslant 0$ *des fonctionnelles* (o)-*continues sur* X, *alors* f e g *si et seulement si* C_f e C_g.

DÉMONSTRATION. C_f et C_g étant des bandes, la relation C_f e C_g est équivalente à $C_f \cap C_g = \{0\}$. Si f e g et $0 \leqslant x \in C_f \cap C_g$, alors

$$\inf \{f(x_1) + g(x_2): x = x_1 + x_2;\ x_1, x_2 \geqslant 0\} = 0,$$

puisque $\inf(f, g) = 0$.

Donc, on peut construire deux suites $x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{N})$ telles que $x = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$ et

$$f(x_1^{(n)}) + g(x_2^{(n)}) < 1/2^n.$$

Posons

$$y_i^{(n)} = \sup_{m \geqslant n} x_i^{(m)} \quad (i = 1, 2).$$

Alors

$$y_i^{(n)} \downarrow y_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2)$$

et

$$f(y_1^{(n)}) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} f(x_1^{(m)}) \leqslant 1/2^{n-1}, \quad g(y_2^{(n)}) = 1/2^{n-1}.$$

Donc, $f(y_1) = g(y_2) = 0$. Comme $0 \leqslant y_i \leqslant x \in C_f \cap C_g$, de la définition d'une bande de positivité stricte il résulte que $y_i = 0$ $(i = 1, 2)$. Par suite $x = x_1^{(n)} + x_2^{(n)} \xrightarrow{(o)} 0$, d'où $x = 0$.

Supposons inversement que C_f e C_g. Si $Y = (C_f \cup C_g)^c$, en vertu de 1.3 pour tout $x \in X_+$, on a

$$x = [C_f]\, x + [C_g]\, x + [Y]\, x.$$

Alors

$$g([C_f]\, x) = f([C_g])\, x) = f([Y]\, x) = g([Y]\, x) = 0.$$

Donc

$$0 \leqslant (\inf(f, g))(x) \leqslant f([C_g]\, x + [Y]\, x) + g([C_f]\, x) = 0,$$

d'où f e g.

Une fonctionnelle $f \in X_n^{\sim}$, $f \geqslant 0$ est *strtctement positive* si $C_f = X$.

LEMME 4. *Si* X *est un K-espace avec* $X_n^{\sim}$ *total, il existe un système* $\{f_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ *de fonctionnelles deux à deux étrangères de* $X_n^{\sim}$, *tel que* $f_\alpha > 0$ $(\alpha \in A)$, $(\bigcup_{\alpha \in A} C_{f_\alpha})^{ee} = X$ *et chaque bande* C_{f_α} *est principale.*

DÉMONSTRATION. Appelons $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les systèmes $\mathfrak{m} = \{f_\beta\}$ $(\beta \in B)$ de fonctionnelles deux à deux étrangères de $X_n^{\sim}$, $f_\beta > 0$ $(\beta \in B)$, tels que chaque bande C_{f_β} soit principale. Ordonnons $\mathfrak{M}$ en posant $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \{f_\beta\}$ $(\beta \in B)$, $\mathfrak{n} = \{g_\gamma\}$ $(\gamma \in \Gamma)$, si pour tout $\gamma \in \Gamma$ existe $\beta \in B$ tel que $f_\beta = g_\gamma$. Le lemme de Zorn affirme l'existence d'un système maximal $\mathfrak{m}_0 = \{f_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ dans $\mathfrak{M}$. Montrons que $\{f_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ est bien le système cherché. Supposons que $Y = (\bigcup_{\alpha \in A} C_{f_\alpha})^{ee} \neq X$. Posons $Z = Y^c$. Comme $Z \neq \{0\}$, il existe $x_0 \in Z$ tel que $x_0 > 0$. $X_n^{\sim}$ étant total sur X, il existe une fonctionnelle $g \in X_n^{\sim}$ telle que $g(x_0) \neq 0$. Comme $|g(x_0)| \leqslant |g|(x_0)$, on peut admettre que $g > 0$. Pour tout $x \in X$, posons

$$f(x) = g(|x_0|\, x).$$

Il est évident que $f \in X_n^{\sim}$, et puisque $f(x_0) = g(x_0) > 0$, il vient $f > 0$. De plus $C_f \subset X_{x_0} \subset Z$, d'où C_f e C_{f_α} pour tous les $\alpha \in A$. Le lemme 3 nous dit que f e f_α quel que soit $\alpha \in A$. Ceci contredit la maximalité de $\mathfrak{m}_0$ et le lemme est prouvé.

Produisons maintenant un lemme sur l'espace des fonctions continues. Il est immédiat de vérifier déjà dans le l.v. C [0, 1] que les bornes des ensembles infinis ne se calculent pas sur les valeurs des fonctions en un point.

LEMME 5. *Soient K un compact, E l'ensemble des fonctions positives dans le l.v.* C (K), $z(t) = \inf\{x(t) : x \in E\}$ $(t \in K)$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\inf E = 0$ *est que l'ensemble* $P = \{t \in K : z(t) > 0\}$ *soit de première catégorie dans K.*

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Pour tout $\varepsilon > 0$ posons $P(\varepsilon) = \{t \in K : z(t) \geqslant \varepsilon\}$. Alors $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(1/n)$. Donc, il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $P(\varepsilon)$ n'est nulle part dense. Comme

$$P(\varepsilon) = \bigcap_{x \in E} \{t \in K : x(t) \geqslant \varepsilon\},$$

$P(\varepsilon)$ est fermé. Si $P(\varepsilon)$ n'est nulle part dense, il existe un point $t_0 \in K$ et un voisinage ouvert $V \subset P(\varepsilon)$. Le compact K étant complè-

tement régulier (cf. Dunford et Schwartz [I], chap. I, § 5), il existe une fonction $x_0 \in \mathbf{C}(K)$ telle que

1) $0 \leqslant x_0(t) \leqslant \varepsilon$, $t \in K$;
2) $x_0(t_0) = \varepsilon$;
3) $x_0(t) = 0$, $t \in K \setminus V$.

Donc, $0 < x_0 \leqslant x$, $\forall x \in E$, ce qui contredit $\inf E = 0$.

Condition suffisante. Supposons que P est un ensemble de première catégorie et que 0 n'est pas $\inf E$. Il existe alors une fonction $x_0 \in \mathbf{C}(K)$ telle que $0 < x_0 \leqslant x$ pour tout $x \in E$; il existe donc un point $t_0 \in K$ pour lequel $x_0(t_0) > 0$. Par suite $V = \{t \in K : x_0(t) > 0\}$ est un ensemble ouvert non vide. De plus $z(t) \geqslant x_0(t) > 0$, $\forall t \in V$, d'où $V \subset P$. Donc, V est un ensemble de première catégorie. Or, du cours de topologie, on sait qu'un ensemble ouvert non vide dans un compact ne peut être de première catégorie (pour s'en assurer il suffit de modifier légèrement la démonstration du théorème I.4.2).

Etudions maintenant les mesures sur des compacts extrêmement discontinus. Soient Q un compact extrêmement discontinu, $\mathscr{E}_Q$ l'ensemble de toutes les parties ouvertes-fermées de Q, $\mathscr{N}_Q$ l'ensemble de toutes les parties de première catégorie de Q. Désignons par $\mathfrak{B}_Q$ l'ensemble de toutes les différences symétriques $G \triangle N$, où $G \in \mathscr{E}_Q$, $N \in \mathscr{N}_Q$.

LEMME 6. *$\mathfrak{B}_Q$ est une tribu contenant la tribu des boréliens du compact Q.*

DÉMONSTRATION. Il est immédiat de voir que l'ensemble $A \in \mathfrak{B}_Q$ si et seulement si existe $G \in \mathscr{E}_Q$ tel que

$$N_1 = A \setminus G \quad \text{et} \quad N_2 = G \setminus A \tag{3}$$

sont des ensembles de première catégorie. En effet, si $A = G \triangle N$, $G \in \mathscr{E}_Q$, $N \in \mathscr{N}_Q$, alors $N_1 = N \setminus G$ et $N_2 = N \cap G$ sont des ensembles de première catégorie. Inversement, si A vérifie (3), on posera $N = N_1 \cup N_2 \in \mathscr{N}_Q$. Il est évident que $A = G \triangle N$. Il suffit donc de démontrer que les ensembles vérifiant (3) forment une tribu. Si $\{A_n\}$ est une suite de tels ensembles et $G_n \in \mathscr{E}_Q$ les ensembles qui leur correspondent, on posera $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. L'ensemble $\bar{G} \setminus G$ n'est nulle part dense, puisque G est ouvert. D'autre part pour $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on a

$$A \setminus \bar{G} \subset A \setminus G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus G_n) \in \mathscr{N}_Q,$$

$$G \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n) \in \mathscr{N}_Q.$$

Comme

$$\bar{G}\setminus A = [(\bar{G}\setminus G)\setminus A] \cup (G\setminus A) \in \mathscr{N}_Q,$$

il vient

$$A \in \mathfrak{B}_Q.$$

Si $A = G \triangle N \in \mathfrak{B}_Q$, alors $Q\setminus A = (Q\setminus G) \triangle N$. Comme $Q\setminus G \in \mathscr{E}_Q$, on a $Q\setminus A \in \mathfrak{B}_Q$. Nous avons donc prouvé que $\mathfrak{B}_Q$ est une tribu.

Les ensembles $\bar{U} \in \mathscr{E}_Q$ et $\bar{U}\setminus U$ n'étant nulle part denses pour tout ouvert U, il vient $U \in \mathfrak{B}_Q$, donc la tribu des boréliens est contenue dans $\mathfrak{B}_Q$.

Une mesure μ définie sur la tribu $\mathfrak{B}_Q$ est dite *normale* si

1) $N \in \mathscr{N}_Q \Rightarrow \mu(N) = 0$;

2) pour tout $G \in \mathscr{E}_Q$, $\mu(G) = +\infty$, il existe $G_1 \in \mathscr{E}_Q$ tel que $G_1 \subset G$ et $0 < \mu(G_1) < +\infty$.

Une mesure normale μ est dite *strictement positive* si

3) $G \in \mathscr{E}_Q$, $G \neq \varnothing \Rightarrow \mu(G) > 0$.

On appelle *hyperstonien* un compact extrêmement discontinu muni d'une mesure normale strictement positive. Soit Q un compact hyperstonien muni d'une mesure μ. Indiquons les corollaires élémentaires des définitions données.

a) $\mu(G \triangle N) = \mu(G)$ si $G \in \mathscr{E}_Q$, $N \in \mathscr{N}_Q$,

En effet, $\mu(G \triangle N) = \mu(G \setminus N) + \mu(N \setminus G) = \mu(G \setminus N) = \mu(G\setminus N) + \mu(N \cap G) = \mu(G)$.

b) La mesure μ est complète.

Si $A \subset G \triangle N$, $G \in \mathscr{E}_Q$, $N \in \mathscr{N}_Q$ et $\mu(G \triangle N) = 0$, alors a) et 3) entraînent que $G = \varnothing$, d'où $A \subset N$ et par suite $A \in \mathscr{N}_Q$.

c) La mesure μ est localement finie.

Si $\mu(G \triangle N) = +\infty$, $G \in \mathscr{E}_Q$, $N \in \mathscr{N}_Q$, alors 1) nous dit que $\mu(G) = +\infty$, donc d'après 2) il existe $G_1 \in \mathscr{E}_Q$ tel que $G_1 \subset G$ et $0 < \mu(G_1) < +\infty$. Par suite, $G_1 \triangle N \subset G \triangle N$ et $\mu(G_1 \triangle N) = \mu(G_1) < +\infty$, ce qui prouve c).

d) Dans le compact Q il existe un système $\{Q_\alpha\} \subset \mathscr{E}_Q$ d'ensembles deux à deux étrangers, tel que $0 < \mu(Q_\alpha) < +\infty$, $\forall\alpha$, et l'ensemble $Q\setminus(\bigcup Q_\alpha)$ n'est nulle part dense.

Observons tout d'abord que pour tout ouvert $V \subset Q$, l'ensemble $\bar{V}\setminus V \in \mathscr{N}_Q$. On établit sans peine d) en se servant du lemme de Zorn et de 2).

e) Soit $\{Q_\alpha\}$ le système défini dans d). Si $A \cap Q_\alpha \in \mathfrak{B}_Q$ pour tout α, alors $A \in \mathfrak{B}_Q$.

Supposons que

$$A \cap Q_\alpha = G_\alpha \triangle N_\alpha,$$

où

$$G_\alpha \in \mathscr{E}_Q, \quad N_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_\alpha^{(n)}$$

et que les ensembles $N_\alpha^{(n)}$ ne sont nulle part denses. Nous supposerons de plus que G_α, $N_\alpha \subset Q_\alpha$. Posons $N^{(n)} = \bigcup_\alpha N_\alpha^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Montrons que l'ensemble $N^{(n)}$ n'est nulle part dense. Supposons le contraire.

Soit V un ouvert non vide contenu dans $\overline{N^{(n)}}$. L'ensemble $Q \setminus \bigcup_\alpha Q_\alpha$ étant fermé et nulle part dense, l'ensemble $U = V \cap (\bigcup_\alpha Q_\alpha)$ est un ouvert non vide. Les ensembles Q_α étant deux à deux disjoints et ouverts-fermés, pour tout α on a $\overline{N^{(n)}} \cap Q_\alpha = \overline{N_\alpha^{(n)}}$. Donc, $U \cap Q_\alpha \subset \overline{N_\alpha^{(n)}}$, d'où l'ensemble $U \cap Q_\alpha$ est d'une part ouvert, de l'autre, nulle part dense. Donc, $U \cap Q_\alpha = \varnothing$, $\forall \alpha$, ce qui exprime que $U = \varnothing$.

Ainsi $N^{(n)}$ n'est nulle part dense, $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N^{(n)} \in \mathcal{N}_Q$, $G = \bigcup G_\alpha$ est un ensemble ouvert et $G \in \mathfrak{B}_Q$ d'après le lemme 6.

Désormais, il est évident que

$$A = (G \triangle N) \cup (A \cap (Q \setminus \bigcup Q_\alpha)) \in \mathfrak{B}_Q.$$

De b), c) et e) l'on déduit que $(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ satisfait à tous les axiomes d'un espace mesuré (cf. I.6.2).

f) L'espace $(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ possède la propriété de somme directe.

Montrons que la condition de somme directe est réalisée pour le système $\{Q_\alpha\}$ de d). Il est évident qu'il suffit de traiter le cas $G \in \mathcal{E}_Q$, $0 < \mu(G) < \infty$.

Mettons G sous la forme

$$G = \bigcup_\alpha (G \cap Q_\alpha) \cup [G \cap (Q \setminus \bigcup_\alpha Q_\alpha)].$$

Pour prouver f) il suffit manifestement de vérifier que $G \cap G_\alpha \neq \varnothing$ seulement pour un ensemble au plus dénombrable d'indices α. Si nous supposons le contraire, il existe un $\varepsilon > 0$ et un ensemble dénombrable d'indices α_n, tels que $\mu(G \cap Q_{\alpha_n}) \geqslant \varepsilon$. Ceci contredit l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(G \cap Q_{\alpha_n}) \leqslant \mu(G) < +\infty.$$

THÉORÈME 4. *Soit μ une mesure normale strictement positive sur $\mathfrak{B}_Q$.*

1) *Si $x \in \mathbf{C}_\infty(Q)$, x est une fonction finie mesurable p.p.*

2) *Si $x \neq y$ dans $\mathbf{C}_\infty(Q)$, les fonctions x et y ne sont pas équivalentes.*

3) *Si y est une fonction finie mesurable p.p. sur Q, il existe $x \in \mathbf{C}_\infty(Q)$ pour lequel $x(t) = y(t)$ p.p.*

DÉMONSTRATION. 1) est évident.

2) Si $x \neq y$, l'ensemble $P = \{t \in Q : x(t) \neq y(t)\}$ est ouvert et non vide, d'où $\mu(P) = \mu(\overline{P}) > 0$.

3) Montrons que l'application identique $x \in \mathbf{C}_\infty(Q) \to x \in \mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ est un isomorphisme réticulant des K-espaces achevés $\mathbf{C}_\infty(Q)$ et $\mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. Prouvons tout d'abord que cette application est un isomorphisme entre $\mathbf{C}(Q)$ et $\mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. A cet effet, il suffit de vérifier que pour tout $y \in \mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ il existe $x \in \mathbf{C}(Q)$ tel que $x(t) = y(t)$ p.p. Si $G \triangle N \in \mathfrak{B}_Q$, alors

$$\chi_{G \triangle N}(t) = \chi_G(t) \text{ p.p.}, \tag{4}$$

et $\chi_G \in \mathbf{C}(Q)$, puisque G est ouvert-fermé. Nous pouvons admettre que la fonction y est bornée. Le théorème I.6.3 nous dit alors qu'il existe une suite de fonctions mesurables à valeurs finies $y_n \to y$ uniformément sur Q. En vertu de (4), pour y_n il existe $x_n \in \mathbf{C}(Q)$, $x_n(t) = y_n(t)$ p.p. Par suite, $x_n(t) \to y(t)$ uniformément sur A, complément d'un ensemble de première catégorie. Donc, la restriction de la fonction y à A est continue et $\overline{A} = Q$. D'autre part $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}(Q)$, puisque de toute évidence

$$\| x_n - x_m \|_{\mathbf{C}(Q)} = \| y_n - y_m \|_{\mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)}.$$

$\mathbf{C}(Q)$ étant complet, $x_n \to x$ en norme dans $\mathbf{C}(Q)$ et $x(t) = y(t)$ p.p. Nous avons donc établi l'isomorphisme entre $\mathbf{C}(Q)$ et $\mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$.

Soit $y \in \mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. On peut admettre que la fonction $y(t)$ est partout finie. Pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$, posons

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } n \leqslant |y(t)| < n+1, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Alors $y_n \in \mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$. D'après ce qui a été prouvé il existe $x_n \in \mathbf{C}(Q)$, $x_n(t) = y_n(t)$ p.p. Comme $\inf(|y_n|, |y_m|) = 0$ $(n \neq m)$ dans $\mathbf{L}^\infty(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$, il vient $\inf(|x_n|, |x_m|) = 0$ $(n \neq m)$ dans $\mathbf{C}(Q)$, donc dans $\mathbf{C}_\infty(Q)$. Comme $\mathbf{C}_\infty(Q)$ est un K-espace achevé, il existe $x = \sup x_n \in \mathbf{C}_\infty(Q)$. Il est évident que $\sup x_n(t) = y(t)$ p.p. Le lemme 5 nous dit que $x(t) = \sup x_n(t)$ partout, sauf sur un ensemble de première catégorie, c'est-à-dire aussi presque partout, ce qui prouve que $y(t) = x(t)$ p.p.

Nous avons établi incidemment le

COROLLAIRE. *L'application* $x \in \mathbf{C}_\infty(Q) \to x \in \mathbf{S}(Q, \mathfrak{B}_Q, \mu)$ *est un* (o)-*isomorphisme*.

Abordons maintenant la démonstration du théorème fondamental.

THÉORÈME 5. *Un K-espace* X *est* (o)*-isomorphe à un espace idéal sur un espace mesuré* (T, Σ, μ) *possédant la propriété de somme directe, si et seulement si existe dans* X *un fondement* Y *avec* $\mathbf{Y}_n^{\sim}$ *total.*

DÉMONSTRATION. Si X est un e.i. sur (T, Σ, μ), $\mathbf{X} \cap \mathbf{L}^1(T, \Sigma, \mu)$ est un fondement dans X sur lequel l'ensemble des fonctionnelles (o)-continues est total, car total sur $\mathbf{L}^1(T, \Sigma, \mu)$.

Prouvons la réciproque. Si Y est isomorphe à un fondement dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$, X est isomorphe à un fondement dans $\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$ en vertu de l'unicité de l'extension maximale, donc $\mathbf{X}_n^{\sim}$ est total sur X. Soient $\{f_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ le système de fonctionnelles du lemme 4, x_α l'élément générateur de la bande $\mathbf{C}_{f_\alpha}$. Les éléments x_α sont deux à deux étrangers d'après le lemme 3. Le théorème 1.1 nous dit alors que l'on peut appliquer l'extension maximale $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$ sur $\mathbf{C}_\infty(Q)$, les images des éléments x_α étant les fonctions caractéristiques d'ensembles ouverts-fermés Q_α deux à deux étrangers. Comme $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}^{\mathrm{ce}} = \mathbf{X}$, on a $\overline{\bigcup Q_\alpha} = Q$. Définissons maintenant une mesure sur $\mathfrak{B}_Q$. Si $A = G \triangle N$, $G \in \mathscr{E}_Q$; $N \in \mathscr{N}_Q$, A étant contenu dans un Q_α, on posera

$$\mu(A) = f_\alpha(\chi_G).$$

(Nous identifions X avec son image isomorphe dans $\mathbf{C}_\infty(Q)$.) Posons

$$\mu(A) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap Q_{\alpha_i}) : \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathrm{A}\Big\}, \quad \forall A \in \mathfrak{B}_Q.$$

Il est immédiat que pour vérifier si μ est une mesure, il suffit d'établir la σ-additivité de sa restriction à chaque tribu $\mathfrak{B}_{Q_\alpha}$. Notons tout d'abord que si

$$G \triangle N \subset G_1 \triangle N_1; \quad G, G_1 \in \mathscr{E}_Q; \quad N, N_1 \in \mathscr{N}_Q,$$

alors $G \subset G_1$. En effet, dans le cas contraire il existerait un ensemble ouvert non vide U contenu dans G tel que $U \cap G_1 = \varnothing$. Et

$$U \setminus N \subset G \setminus N \subset G_1 \triangle N_1 = (G_1 \setminus N_1) \cup (N_1 \setminus G_1),$$

d'où $U \setminus N \subset N_1 \setminus G_1$, puisque $U \cap G_1 = \varnothing$. Donc, $U \subset N \cup N_1$. Or, nous avons souligné qu'un ensemble ouvert dans un compact ne pouvait être de première catégorie.

Prouvons maintenant que la restriction de μ à la tribu $\mathfrak{B}_{Q^\alpha}$ est σ-additive. Soit $A_n = G_n \triangle N_n \in \mathfrak{B}_{Q_\alpha}$, $A_n \downarrow \varnothing$. De ce qui précède il suit que $G_n \downarrow$. L'ensemble $\bigcap G_n$ est visiblement de première catégorie. Donc, d'après le lemme 5, $\chi_{G_\alpha} \downarrow 0$ dans l'espace X, d'où $\mu(A_n) = f_\alpha(\chi_{G_\alpha}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Vérifions que μ est une mesure normale. Les propriétés 1) et 2) sont évidentes par définition de μ. La propriété 3) résulte de ce que pour tout $G \in \mathscr{E}_Q$ il existe Q_α tel que $G \cap Q_\alpha \neq \varnothing$ et de ce que f_α est strictement positive sur $\mathbf{C}_{f_\alpha}$.

§ 3. Lattis normés

3.1. On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur un l.v. X est *monotone* si $|x| \leqslant |y|$ entraîne $\|x\| \leqslant \|y\|$. Un lattis vectoriel muni d'une norme monotone est dit *lattis normé* (en abrégé l.n.). Un lattis normé, complet pour la norme s'appelle *lattis de Banach*. Si un lattis normé (resp. un lattis de Banach) X est un K-espace, on dit que X est un *K-espace normé* (resp. un *K-espace de Banach*).

Il est évident qu'un e.i.n. est un K-espace normé, et un e.i. de Banach, un K-espace de Banach. Les propriétés 1) à 4) de convergence en norme (cf. IV.3.1) sont visiblement valables dans tout lattis normé X. La propriété 5) se transforme en la continuité du projecteur dans un K-espace normé X: si $x_n \to x$ en norme, alors $[E]\, x_n \to [E]\, x$ en norme (bien plus, la norme de l'opérateur $[E]$ est $\leqslant 1$). Signalons aussi que tout lattis normé est archimédien.

Etudions le lien existant entre la convergence en norme et la convergence avec régulateur. Si X est un lattis normé et $x_n \xrightarrow{(r)} x$, alors $x_n \to x$ en norme, puisque $\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon_n \|u\| \to 0$ (où u est le régulateur de convergence). La réciproque est généralement fausse. Cependant, comme la démonstration du lemme IV.3.2 vaut textuellement dans le cas d'un lattis de Banach, il vient que si $x_n \to x$ en norme, il existe alors une suite partielle $x_{n_k} \xrightarrow{(r)} x$. De même que dans le théorème IV.3.2 on obtient maintenant que deux normes monotones quelconques sur un l.v. X, faisant de X un lattis de Banach, sont équivalentes.

THÉORÈME 1. 1) *Si* X *est un lattis normé*, $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}^\sim$.
2) *Si* X *est un lattis de Banach*, $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^\sim$.

DÉMONSTRATION. 1) La norme étant monotone, les intervalles de X sont bornés en norme et comme la fonctionnelle $f \in \mathbf{X}^*$ est bornée sur tout ensemble borné en norme, le théorème 2.1 nous dit que $f \in \mathbf{X}^\sim$.

2) Supposons que $f \in \mathbf{X}^\sim$, mais $f \notin \mathbf{X}^*$. Il existe alors une suite $x_n \to 0$ en norme pour laquelle $f(x_n) \geqslant \varepsilon > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. D'autre part, il existe une suite partielle $x_{n_k} \xrightarrow{(r)} 0$, d'où

$$|f(x_{n_k})| \leqslant |f|(|x_{n_k}|) \leqslant \varepsilon_{n_k} |f|(u) \to 0.$$

Cette contradiction prouve que $f \in \mathbf{X}^*$.

Si X est un l.n., on voit immédiatement que le dual de Banach X^*, muni de la norme ordinaire et de l'ordre induit de $X^\sim$, est un K-espace de Banach (et un idéal dans $X^\sim$).

3.2. Il existe encore une classe de réalisations, outre celle envisagée dans 1.5, qui est utile pour l'étude des lattis vectoriels.

Soient X un l.v. archimédien, $u \in X_+$. Faisons de l'u-idéal $X(u)$ un l.n. en prenant pour norme la fonctionnelle de Minkowski de l'intervalle $[-u, u]$. Désignons cette norme par $\|\cdot\|_u$ et appelons-la *u-norme*. Il est évident que X est (r)-complet si et seulement si chaque l.n. $X(u)$ est complet $(u \in X_+)$. L'importance des lattis (r)-complets est soulignée par le fait que d'après le théorème de M. et S. Krein-S. Kakutani (cf. Voulikh [I], théorème VII.5.1) chaque u-idéal $X(u)$ complet pour la u-norme est (o)- et isométriquement isomorphe au lattis de Banach $C(K)$ sur un compact K. Le lien établi dans le numéro précédent entre la convergence en norme et la (r)-convergence nous dit que tout lattis de Banach est (r)-complet.

En théorie des opérateurs il est naturel de considérer les espaces vectoriels (et les lattis vectoriels) sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Dans un espace complexe, $L^p(0, 1)$ pour fixer les idées, muni naturellement de la relation d'ordre, le suprémum de deux fonctions n'étant pas défini (le maximum de deux nombres complexes n'existe pas), contrairement au module, c'est ce dernier que l'on pose à la base de la généralisation de la notion de lattis vectoriel au cas complexe.

Supposons qu'un espace vectoriel complexe X est le complexifié d'un espace vectoriel réel X_0 *), lattis vectoriel (r)-complet. Définissons maintenant le module $|z| \in X_0$ de l'élément $z = x + iy$ $(x, y \in X_0)$. A cet effet, considérons l'idéal principal $X_0(|x| + |y|)$ qui, en vertu de la (r)-complétude de X_0, est isomorphe à l'espace réel $C(K)$. Prolongeons cet isomorphisme de façon naturelle en un isomorphisme de $X_0(|x| + |y|) + iX_0(|x| + |y|)$ sur l'espace complexe $C_{\mathbb{C}}(K)$. Si $z = x + iy$, $x, y \in C(K)$, la fonction $|z(t)|$ $(t \in K)$ peut être calculée à l'aide de la formule

$$|z| = \sup_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |(\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y|,$$

où le suprémum est pris sur le lattis vectoriel $C(K)$. Donc, pour tout $z \in X$ existe

$$|z| = \sup_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |(\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y|. \tag{1}$$

ce qui achève la construction du module dans X.

L'espace vectoriel complexe X, vérifiant les conditions énumérées, est appelé *lattis vectoriel complexe* si le module d'un élément

*) I.e. X est l'ensemble des éléments de la forme $x + iy$ $(x, y \in X_0)$ muni naturellement des opérations linéaires (cf. § 2, chap. XIII, tome 2).

est défini par la formule (1). Presque toutes les notions de la théorie des lattis vectoriels et des lattis de Banach s'étendent au cas complexe (cf. Schaefer [II]).

3.3. Etudions maintenant les critères de complétude d'un lattis normé.

THÉORÈME 2 (Amémia). *Soit* X *un lattis normé. Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) X *est complet pour la norme*;

2) *si* $0 \leqslant x_n \uparrow$ *est une suite de Cauchy dans* X, $x_n \to x \in X$ *en norme*;

3) *si* $0 \leqslant x_n \uparrow$ *est une suite de Cauchy dans* X, *il existe* $x = \sup x_n \in X$.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) de toute évidence.

2) $\Rightarrow$ 1). Si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X, quitte à passer à une suite partielle on peut admettre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_{n+1} - x_n \| < +\infty. \tag{2}$$

Posons

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)_+, \qquad z_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)_-.$$

Alors $0 \leqslant y_n \uparrow$, $0 \leqslant z_n \uparrow$. Si $n < m$, il vient en vertu de (2)

$$\| y_m - y_n \| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} (x_{k+1} - x_k)_+ \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \| (x_{k+1} - x_k)_+ \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \| x_{k+1} - x_k \| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0.$$

Donc, $\{y_n\}$ est une suite strictement croissante de Cauchy et par suite $y_n \to y$ en norme. De façon analogue, $z_n \to z$ en norme. D'où, $y_n - z_n \to y - z$. Mais

$$y_n - z_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1,$$

donc $x_n \to y - z + x_1$ en norme.

3) $\Rightarrow$ 2). Soit $0 \leqslant x_n \uparrow$ une suite de Cauchy. Par hypothèse il existe $x = \sup x_n$. Sans restreindre la généralité on peut admettre que

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant 1/n^3 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Considérons

$$y_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n} k (x_{k+1} - x_k).$$

Alors $0 \leqslant y_n \uparrow$ et si $n < m$

$$\| y_m - y_n \| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} k(x_{k+1} - x_k) \Big\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} 1/k^2 \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0$$

en vertu de (3). Donc $y = \sup y_n$ existe par hypothèse. D'autre part

$$n(x - x_n) = \sup_{m>n} \sum_{k=n}^{m} n(x_{k+1} - x_k) \leqslant \sup_{m>n} \sum_{k=n}^{m} k(x_{k+1} - x_k) \leqslant y,$$

d'où

$$0 \leqslant x - x_n \leqslant y/n.$$

$x_n \to x$, car la norme est monotone. Ceci achève la démonstration du théorème.

3.4. Terminons ce paragraphe par l'étude des fonctionnelles sur un lattis vectoriel.

Soit X (u) un u-idéal muni d'une u-norme dans un K-espace X.

THÉORÈME 3 (Grothendieck [1]). *Si la convergence $f_n \to 0$ est $(*)$-faible dans $(X(u))^*$, la convergence $f_n \to 0$ est faible.*

La démonstration du théorème 3 et de ses généralisations (cf. Schaefer [II]) n'est pas triviale et assez laborieuse, aussi l'omettrons-nous.

En particulier, le théorème 3 fournit d'intéressants résultats lorsque $X(u) = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. A titre de corollaire nous allons montrer que si $X = l^\infty$, la boule fermée B de l'espace X^* n'est pas séquentiellement $\sigma(X^*, X)$-compacte (cf. page 238). En effet, dans le cas contraire elle serait séquentiellement faiblement compacte dans X^* en vertu du théorème 3, donc faiblement compacte d'après le théorème VIII.2.1. L'espace X^*, donc l^∞, seraient réflexifs, ce qui n'est pas le cas (cf. VI.2.1).

LEMME 1. *Soient X un lattis vectoriel (r)-complet, $\{f_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ une suite généralisée dans $X^\sim$, telle que*

1) $\sup_{\alpha \in A} |f_\alpha(x)| < \infty$, $\forall x \in X$;

2) *il existe pour tout $x \in X$ la limite finie* $\lim f_\alpha(x) = f(x)$.

Alors $f \in X^\sim$.

DÉMONSTRATION. X étant (r)-complet, tous les u-idéaux sont complets. Le théorème de Banach-Steinhaus (cf. remarque de la page 271) nous dit que la restriction de f à chaque u-idéal $X(u)$ est continue, ce qui revient à dire que f est bornée sur tout intervalle, c'est-à-dire $f \in X^\sim$.

COROLLAIRE. *Soit X un K-espace avec $X^\sim$ total. Alors*

1) *tout ensemble $\sigma(X^\sim, X)$-borné M est relativement compact pour cette topologie;*

2) *si* Y *est un idéal dans* $X^{\sim}$, *tout intervalle de* Y *est* σ (Y, X)-*compact.*

DÉMONSTRATION. 1) En vertu du lemme III.3.5 il suffit de prouver que la σ (X^+, X)-adhérence de l'ensemble M est contenue dans $X^{\sim}$. Or, ceci résulte du lemme 1.

2) découle de 1) et du corollaire 1 du théorème 2.2.

THÉORÈME 4. *Soient* X *un K-espace,* $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X_n^{\sim}$, f *une fonctionnelle linéaire sur* X. *Si pour tout* $x \in X$, *on a* $f_m(x) \to f(x)$, *alors* $f \in X_n^{\sim}$.

DÉMONSTRATION. Le lemme 1 nous dit que $f \in X^{\sim}$. Il suffit de toute évidence de prouver que pour tout $u \in X_+$, la restriction de f à un u-idéal X (u), notée g, est (o)-continue. Posons $g_m = f_m \mid X(u)$. Il vient $g_m \in X(u)_n^{\sim}$, $g \in X(u)^{\sim} = X(u)^*$. La convergence $g_m \to g$ étant ($*$)-faible dans $X(u)^*$, la convergence $g_m \to g$ est faible en vertu du théorème 3. Le corollaire 2 du théorème III.3.2 nous dit que les combinaisons convexes g'_m des éléments g_m convergent vers g en norme dans $X(u)^*$. Comme $g'_m \in X(u)_n^{\sim}$ et $X(u)_n^{\sim}$ est une bande dans $X(u)^*$, qui est fermée pour la norme, puisque $X(u)^*$ est un lattis normé, il vient $g \in X(u)_n^{\sim}$, c.q.f.d.

Le théorème 4 entraîne immédiatement le

COROLLAIRE 1. *Si* $X_n^{\sim}$ *est total sur un K-espace* X, *l'espace* ($X_n^{\sim}$, $\sigma(X_n^{\sim}, X)$) *est séquentiellement complet.*

COROLLAIRE 2. *Si* X *est un K-espace* (o)-*réflexif, l'espace* (X, σ (X, $X_n^{\sim}$)) *est séquentiellement complet.*

THÉORÈME 5. *Si* X *est un lattis normé avec* $X_n^{\sim}$ *total,* $X^* \cap X_n^{\sim}$ *sépare les points de* X.

Nous prouverons ce résultat uniquement pour les K-espaces. Observons tout d'abord que la démonstration du théorème VI.1.5 s'étend au cas d'une mesure non σ-finie. Donc, le théorème 5 pour le K-espace X résulte du théorème 2.5 de réalisation.

Etablissons maintenant un important théorème sur la structure de $X^{\sim}$.

THÉORÈME 6. *Si* X *est un lattis vectoriel avec* $X_n^{\sim}$ *total,* $X_s^{\sim} = (X_n^{\sim})^e$, *c'est-à-dire le K-espace* $X^{\sim}$ *se décompose en la somme de deux bandes étrangères* $X_n^{\sim}$ *et* $X_s^{\sim}$.

DÉMONSTRATION. Nous effectuons la démonstration pour le cas où X est un K-espace. Le lemme 2.1 nous apprend que $X_s^{\sim} \subset (X_n^{\sim})^e$. Inversement, prenons $\varphi \in (X_n^{\sim})^e$, $\varphi \geqslant 0$; $N_\varphi = \{x \in X : \varphi(|x|) = 0\}$. Il est clair que N_φ est un idéal dans X. Prouvons que N_φ est de même largeur que X, d'où il résultera que $\varphi \in X_s^{\sim}$. Supposons

le contraire. Si nous désignons $Y = (N_\varphi)^e$, alors $Y \neq \{0\}$. Pour tout $y \in Y$ posons $\| y \| = \varphi(| y |)$. Donc, Y est un lattis normé. $X_n^\sim$ étant total sur X, $Y_n^\sim$ l'est sur Y. Le théorème 5 nous dit que $Y^* \cap Y_n^\sim$ est total sur Y. Donc, il existe une fonctionnelle f telle que $f \in Y^* \cap Y_n^\sim$. $f > 0$ et $f(y) \leqslant \| y \| = \varphi(y)$ pour tout $y \in Y$.

Pour tout $x \in X$, posons

$$f_1(x) = f([Y]\, x).$$

Il vient $0 < f_1 \in X_n^\sim$, $0 \leqslant f_1 \leqslant \varphi \in (X_n^\sim)^e$. Donc, $f_1 = 0$, cette contradiction prouve le théorème.

Le théorème 6 entraîne, en particulier, que toute fonctionnelle continue sur un e.i.n. se décompose de façon unique en la somme d'une fonctionnelle admettant une représentation intégrale, et d'une fonctionnelle singulière. Ce résultat est important dans de nombreuses applications (et tout d'abord en commande optimale et en analyse convexe, cf. Doubovitski et Milioutine [2]). Un cas particulier du théorème 6 est le théorème classique suivant de Yosida-Huitt *) de représentation des fonctionnelles sur $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$.

THÉORÈME 7 (Yosida-Huitt). *Si une mesure* μ *est finie, toute fonctionnelle continue* f *sur* $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ *se décompose d'une seule façon en la somme* $f = f_1 + f_2$, *où*

$$f_1(x) = \int_T x(t)\, y(t)\, d\mu \quad (y \in L^1(T, \Sigma, \mu)),$$

et f_2 *est telle que pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $A \in \Sigma$, $\mu(T \setminus A) < \varepsilon$, *tel que* $f_2(x) = 0$ *si* $\operatorname{supp} x \subset A$ (mod. μ).

§ 4. *KB*-espaces

4.1. Dans ce paragraphe, nous étudions succinctement des lattis de Banach dans lesquels sont satisfaites des conditions (A), (B) et (C) analogues à celles de IV.3.2 **).

Soit X un lattis normé.

On dit qu'une norme dans X est *(o)-continue* ou que dans X est réalisée la condition (A) si

$$0 \leqslant x_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow \| x_\alpha \| \to 0.$$

---

*) Le théorème de Yosida-Huitt a fait l'objet de maintes généralisations. Dans sa forme définitive, le théorème 6 a été prouvé indépendamment par G. Lozanovski et dans le travail collectif de W. Luxemburg et A. Zaanen [1]. Voir également Lozanovski [3].

**) Les conditions (A) et (B) ont été introduites par L. Kantorovitch, la condition (C) par H. Nakano.

On dit qu'une norme dans X est *(o)-semi-continue* ou que dans X est remplie la condition (C) si

$$0 \leqslant x_\alpha \uparrow x \in X \Rightarrow \sup \| x_\alpha \| = \| x \|.$$

On dit qu'une norme dans X est *monotone complète* ou que dans X est satisfaite la condition (B) si

$0 \leqslant x_\alpha \uparrow$, $x_\alpha \in X$, $\sup \| x_\alpha \| < \infty$ entraînent l'existence d'un élément $x \in X$ tel que $x_\alpha \uparrow x$.

Si les analogues de ces conditions sont réalisés uniquement pour les suites, on parlera respectivement de *(oσ)-continuité* ou de la condition (A_σ), de *(oσ)-semi-continuité* ou de la condition (C_σ), de *σ-complétude monotone* ou de la condition (B_σ). Nous verrons plus bas que dans le cas d'e.i.n. sur un espace muni d'une mesure σ-finie, les conditions respectives pour les suites et les suites généralisées sont équivalentes, donc la terminologie introduite est compatible avec celle de IV.3.2.

4.2. Etudions la condition (A). Soit X un K-espace normé. Dans Voulikh [I] (page 207) il est démontré que la condition (A_σ) entraîne que l'espace X est de type dénombrable, donc (A) $\Leftrightarrow$ (A_σ) *). Il est évident, par ailleurs, que si dans X est réalisée la condition (A), alors $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x \Rightarrow x_\alpha \to x$ en norme.

Nous commençons par considérer la condition (A) dans la classe des fonctionnelles (o)-continues. Certains résultats ont été établis dans ce sens pour les e.i. de Banach au § 1 du chapitre VI ; nous allons les généraliser et compléter par de nouveaux théorèmes.

LEMME 1. *Si X est un lattis normé et $\{x_\alpha\}$ une suite généralisée dans X telle que $x_\alpha \downarrow$ et $x_\alpha \to x$ pour la topologie faible, alors $x_\alpha \to x$ en norme.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire. On peut admettre alors que pour tous les α

$$\| x_\alpha - x \| \geqslant \varepsilon > 0. \tag{1}$$

On a $x_\alpha - x \geqslant 0$ pour tout α, puisque $x_\alpha \downarrow x$ d'après le corollaire 2 du théorème 2.2. Comme $x_\alpha \to x(\sigma(X, X^*))$, il existe un élément $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}$, où $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tel que $\|y - x\| < \varepsilon/2$. Prenons $\alpha \geqslant \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On a alors

$$0 \leqslant x_\alpha - x \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} - x,$$

d'où $\| x_\alpha - x \| < \varepsilon/2$, ce qui contredit (1).

*) Bien plus, si X est un K_σ-espace normé avec la condition (A_σ), alors X est un K-espace avec la condition (A). En général (A_σ) n'entraîne pas (A).

THÉORÈME 1. *Si* X *est un lattis normé, alors* $X_n^{\sim} \supset X^*$ *si et seulement si la condition* (A) *est satisfaite dans* X.

DÉMONSTRATION. Si $X_n^{\sim} \supset X^*$ et $0 \leqslant x_\alpha \downarrow 0$, alors $x_\alpha \to 0$ pour la topologie faible, donc $x_\alpha \to x$ en norme d'après le lemme 1.

Si la condition (A) est satisfaite dans X, $f \in X^*$ et $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, alors $x_\alpha \to 0$ en norme, d'où $f(x_\alpha) \to 0$ et par suite $f \in X_n^{\sim}$.

THÉORÈME 2. *Soit* X *un K-espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *la condition* (A) *est remplie dans* X;

2) *les intervalles de* X *sont faiblement compacts*;

3) *si* $\pi : X \to X^{**}$ *est une injection canonique, alors* $\pi(X)$ *est un idéal dans* X^{**}.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 3). La condition (A) étant réalisée dans l'espace X, les théorèmes 1 et 3.1 nous disent que $X^* = X_n^{\sim}$. Donc, $\pi(X)$ est un idéal dans X^{**} d'après le théorème 2.2.

3) $\Rightarrow$ 2). Soit un intervalle quelconque I dans X. $\pi(X)$ étant un idéal dans X^{**}, $\pi(I)$ est un intervalle dans X^{**}. D'après le corollaire du lemme 3.1, l'intervalle $\pi(I)$ est $(*)$-faiblement compact, donc l'intervalle I est faiblement compact.

2) $\Rightarrow$ 1). D'après le théorème 1, il suffit de montrer que $X^* \subset \subset X_n^{\sim}$. Soit $f \in X^*$. Supposons que $f \notin X_n^{\sim}$. Il existe alors une suite généralisée $x_\alpha \downarrow 0$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$|f(x_\alpha)| \geqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Comme on peut admettre que $x_1 \geqslant x_\alpha$ pour tous les α, en vertu de la faible compacité des intervalles il existe une suite partielle $x_\beta \to x$ $(\sigma(X, X^*))$. D'après le corollaire 2 du théorème 2.2, $x = 0$, d'où $f(x_\beta) \to 0$, ce qui contredit (2).

Considérons maintenant une caractéristique intéressante des K-espaces de Banach avec la condition (A), formulée uniquement en termes de B-espaces sans faire appel à l'ordre. Nous commençons par un théorème auxiliaire.

Soit X un l.n. On dira qu'une suite $\{x_n\}$ dans X *décroît de biais vers zéro* et l'on notera $x_n \overline{\downarrow} 0$ si $x_n \downarrow 0$ et $x_n - x_{n+1}$ e x_{n+1} $(n \in \mathbb{N})$.

THÉORÈME 3. *Si* X *est un K-espace normé dans lequel* $x_n \overline{\downarrow} 0 \Rightarrow \Rightarrow \|x_n\| \to 0$, *alors la condition* (A) *est satisfaite dans* X.

DÉMONSTRATION. Supposons que $x_n \downarrow 0$. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et posons $q_n = (x_n - \varepsilon x_1)_+$. On a alors $q_n \downarrow 0$ et $[q_n] x_1 \overline{\downarrow} 0$. Donc, $\|[q_n] x_1\| \to 0$. Comme

$$x_n = [q_n] x_n + (x_n - [q_n] x_n) \leqslant [q_n] x_1 + \varepsilon x,$$

alors

$$\|x_n\| \leqslant \|[q_n] x_1\| + \varepsilon \|x_1\|,$$

d'où $\| x_n \| \to 0$, c'est-à-dire la condition (A_σ) est satisfaite dans X. Mais on a déjà signalé que la condition (A_σ) entraîne (A), c.q.f.d.

LEMME 2. *Si* X *est un K-espace de Banach sans la condition* (A), *on peut exhiber une suite* $\{z_n\} \subset X_+$, *telle que*

1) z_n e z_m $(n \neq m)$;
2) $\| z_n \| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$;
3) *il existe* $\sup z_n = u \in X$.

DÉMONSTRATION. La condition (A) n'étant pas vérifiée dans X, la condition du théorème 3 ne l'est pas non plus. Il existe alors une suite $x_n \overline{\downarrow} 0$, $\| x_n \| \geqslant \varepsilon > 0$. Cette suite n'est pas de Cauchy. Si elle l'était, $x_n \to x$ en norme, et comme $x_n \downarrow 0$, alors $x = 0$, ce qui contredit $\| x_n \| \geqslant \varepsilon > 0$. Donc, il existe $\delta > 0$ et $n_1 < n_2 < \ldots \ldots < n_k < \ldots$ tels que $\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \| \geqslant \delta$. Posons

$$z_k = \frac{x_{n_k} - x_{n_{k+1}}}{\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \|}.$$

1) et 2) sont évidents, quant à 3) il découle de la majoration $z_k \leqslant x_1/\delta$.

LEMME 3. *Si* X *est un K-espace de Banach avec la condition* (A), *possédant une unité faible, alors la boule unité fermée* B_{X^*} *de l'espace* X^* *est* (*)*-faiblement séquentiellement compacte.*

DÉMONSTRATION. Soient x_0 l'unité faible de X, $I = [-x_0, x_0]$. Comme $\inf(x, nx_0) \uparrow x$, $\forall x \in X_+$ (cf. Voulikh [I], lemme IV.2.1), la réalisation de la condition (A) dans X entraîne que l'enveloppe linéaire de l'intervalle I est dense pour la norme (donc faiblement) dans X. Par suite, la fonctionnelle

$$\rho(f) = \sup \{ | f(x) | : x \in I \}, \quad f \in X^*,$$

est une norme sur X^*. Désignons par X^*_ρ l'espace normé obtenu. La condition (A) étant satisfaite dans X, le théorème 2 nous dit que l'intervalle I est faiblement compact. Donc, d'après le théorème de Mackey-Arens (cf. théorème III.3.8) on peut identifier le dual de l'espace normé X^*_ρ avec l'enveloppe linéaire de l'intervalle I. Donc, la topologie $\sigma(X^*, X)$ est plus forte que la topologie faible de l'espace X^*_ρ, et par suite les topologies faibles $\sigma(X^*, X)$ et $\sigma(X^*_\rho, (X^*_\rho)^*)$ sont confondues sur la boule B_{X^*}. Donc, en appliquant le théorème VIII.2.1 à l'espace normé X^*_ρ, on constate que la boule B_{X^*} est séquentiellement compacte pour les deux topologies faibles *).

*) Le théorème VIII.2.1 a été énoncé pour les B-espaces, mais l'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est valable dans tout espace normé, ce qui est manifeste par un passage à la complétion.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le critère obtenu par G. Lozanovski [1].

THÉORÈME 4. *Pour que la condition* (A) *soit réalisée dans un K-espace de Banach* X *il est nécessaire et suffisant que* X *ne contienne pas de sous-espace fermé* Y *isomorphe, au sens de la théorie des B-espaces, à l'espace* $\mathbf{l}^\infty$.

DÉMONSTRATION. *Condition nécessaire.* Supposons par absurde qu'existe un isomorphisme $U: \mathbf{l}^\infty \to \mathbf{Y}$, où Y est un sous-espace fermé de X. Soient $\mathbf{Y}_0 = U(\mathbf{c}_0)$, Z la bande engendrée par $\mathbf{Y}_0$ dans X. L'espace $\mathbf{Y}_0$ étant séparable, Z admet une unité faible. En effet, si $\{x_n\}$ est un ensemble dénombrable dense dans $\mathbf{Y}_0$, on voit immédiatement que l'unité faible sera l'élément

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|x_n\|} |x_n|.$$

Soit $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de vecteurs unitaires dans $\mathbf{c}_0$. Tout élément de $\mathbf{c}_0$ se représente alors sous la forme $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, où $\xi_k \to 0$. Posons

$$f_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\Big) = \xi_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a $f_n \in (\mathbf{c}_0)^*$ et $\|f_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Soient sur $\mathbf{Y}_0$ les fonctionnelles g_n :

$$g_n(y) = f_n(U^{-1}(y)), \quad y \in \mathbf{Y}_0.$$

Il vient $\|g_n\| \leqslant \|f_n\| \, \|U^{-1}\| = \|U^{-1}\|$ $(n \in \mathbb{N})$, d'où il suit que l'ensemble $\{g_n\}$ est borné en norme dans $\mathbf{Y}_0^*$. Prolongeons chaque fonctionnelle g_n à Z en conservant sa norme. Désignons par $\tilde{g}_n$ les fonctionnelles ainsi obtenues. L'ensemble $\{\tilde{g}_n\}$ est borné en norme dans $\mathbf{Z}^*$. D'après le lemme 3, on peut choisir une suite partielle $\tilde{g}_{n_m} \to \tilde{g} \in \mathbf{Z}^*$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{Z}^*, \mathbf{Z})$. Posons

$$\tilde{\tilde{g}}_{n_m}(x) = \tilde{g}_{n_m}([\mathbf{Z}]\, x), \quad \tilde{\tilde{g}}(x) = \tilde{g}([\mathbf{Z}]\, x), \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Il vient $\tilde{\tilde{g}}_{n_m} \to \tilde{\tilde{g}}\,(\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}))$.

Si maintenant nous posons $\varphi_{n_m} = U^* \tilde{\tilde{g}}_{n_m}$ et $\varphi = U^* \tilde{\tilde{g}}$, alors $\varphi_{n_m} \to \varphi$ pour la topologie $(*)$-faible de l'espace $(\mathbf{l}^\infty)^*$. D'après le théorème 3.3, $\varphi_{n_m} \to \varphi$ pour la topologie faible de $(\mathbf{l}^\infty)^*$. L'espace $\mathbf{l}^1$ est une bande dans $(\mathbf{l}^\infty)^*$ par injection naturelle

(puisque l^1 est visiblement (o)-réflexif). Projetons les fonctionnelles sur cette bande. Il est aisé de voir que $[l^1]\varphi_{n_m} \to [l^1]\varphi$ pour la topologie faible de l'espace l^1. En effet, $[l^1]$ étant un opérateur dans $(l^\infty)^*$, $[l^1]^*$ l'est dans $(l^\infty)^{**}$, et si $\psi \in (l^1)^* = (l^\infty)^{**}$, alors $[l^1]^*(\psi) \in (l^\infty)^{**}$, d'où

$$([l^1]\varphi_{n_m})(\psi) = \varphi_{n_m}([l^1]^*\psi) \to \varphi([l^1]^*\psi) = ([l^1]\varphi)(\psi).$$

Le théorème VIII.3.4 nous dit alors que $[l^1]\varphi_{n_m} \to [l^1]\varphi$ en norme dans l^1. Comme $(c_0)^* = l^1$, on peut considérer $[l^1]\varphi_{n_m}$ et $[l^1]\varphi$ comme des fonctionnelles sur c_0, de plus on voit sans peine que ce sont tout simplement les restrictions à c_0 des fonctionnelles φ_{n_m} et φ définies sur l^∞. Montrons que $[l^1]\varphi_{n_m} = f_{n_m}$. En effet, pour un vecteur unitaire e_k on a

$$([l^1]\varphi_{n_m})(e_k) = \varphi_{n_m}(e_k) = (U^*\tilde{\tilde{g}}_{n_m})(e_k) =$$
$$= \tilde{\tilde{g}}_{n_m}(Ue_k) = g_{n_m}(Ue_k) = f_{n_m}(e_k),$$

d'où l'on déduit ce qu'on voulait. Ainsi, la suite $\{f_{n_m}\}$ est convergente en norme dans l^1. Or, ceci est impossible, puisque $\|f_n - f_m\| = 1$ pour $n \neq m$. Cette contradiction achève la démonstration de la condition nécessaire.

Condition suffisante. Si la condition (A) n'est pas satisfaite dans X, nous considérons la suite $\{z_n\}$ du lemme 2. Définissons $U: l^\infty \to X$ avec la formule:

$$U(\xi) = (o)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z_k$$

si $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\xi_n| z_n \leqslant |U(\xi)| \leqslant \|\xi\|_{l^\infty} u,$$

d'où

$$\|\xi\|_{l^\infty} \leqslant \|U(\xi)\|_X \leqslant \|\xi\|_{l^\infty} \|u\|.$$

Donc, le sous-espace $Y = U(l^\infty)$ est isomorphe à l^∞. Cette contradiction prouve le théorème.

COROLLAIRE. *Si un K-espace de Banach* X *est séparable, la condition* (A) *est satisfaite dans* X.

DÉMONSTRATION. Si la condition (A) n'est pas satisfaite dans X, d'après le théorème 4, X contient un sous-espace Y isomorphe à l^∞. Or, ce dernier n'est pas séparable, donc Y ne l'est pas non plus, ce qui contredit la séparabilité de X.

Ce corollaire entraîne la partie du théorème IV.3.3 qui n'a pas été démontrée au chapitre IV.

4.3. Considérons maintenant les conditions (B) et (C). Si X est un K-espace de type dénombrable, on a manifestement (C) $\Longleftrightarrow$ (C_σ). Donc, ces conditions sont confondues pour les e.i.n. sur un espace de mesure σ-finie. Ceci n'a pas lieu dans le cas général.

Les conditions (B) et (B_σ) sont différentes même dans la classe des K-espaces de type dénombrable, cependant, dans le cas des e.i.n. sur un espace de mesure μ σ-finie (B_σ) $\Longleftrightarrow$ (B). Donc, notre terminologie est compatible avec celle de IV.3.2. En effet, supposons que dans un tel e.i.n. X la condition (B_σ) est satisfaite et la suite généralisée $0 \leqslant x_\alpha \uparrow$ est bornée en norme. D'après le corollaire du théorème IV.3.1, X est borné dans l'e.v.t. S (T, Σ, μ). La démonstration du lemme III.1.1 nous apprend que $\sup\limits_\alpha x_\alpha(t) < +\infty$ p.p., donc d'après le corollaire 2 du théorème I.6.17 il existe $x_0 = \sup x_\alpha \in S(T, \Sigma, \mu)$ et une suite $x_{\alpha_n} \uparrow x_0$. Comme $\{x_{\alpha_n}\}$ est aussi bornée en norme, la condition (B_σ) entraîne que $x_0 \in X$, donc (B) est satisfaite dans X.

La condition 3) du théorème 3.2 implique le

THÉORÈME 5. *Si la condition* (B_σ) *est remplie dans un K-espace normé* X, *alors* X *est complet pour la norme.*

Le théorème suivant montre qu'il existe beaucoup d'espaces dans lesquels sont vérifiées les conditions (B) et (C).

THÉORÈME 6. *Si* X *est un lattis normé, les conditions* (B) *et* (C) *sont satisfaites dans* X^*.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite généralisée $\{f_\alpha\} \subset X^*$, $0 \leqslant f_\alpha \uparrow$, est bornée en norme. Posons

$$f(x) = \begin{cases} \sup f_\alpha(x) < +\infty & \text{pour } x \in X_+, \\ f(x_+) - f(x_-) & \text{pour } x \in X, \end{cases}$$

alors f est une fonctionnelle sur X. Prouvons que $f \in X^*$.

Soit un $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X_+$, $\|x\| \leqslant 1$, il existe α_x tel que

$$f(x) \leqslant f_{\alpha_x}(x) + \varepsilon \leqslant \|f_{\alpha_x}\| + \varepsilon \leqslant \sup \|f_\alpha\| + \varepsilon,$$

d'où

$$\|f\| \leqslant \sup \|f_\alpha\| < \infty.$$

Donc $f \in X^*$, $f_\alpha \uparrow f$ et $\|f\| = \sup \|f_\alpha\|$, c'est-à-dire les conditions (C) et (B) sont remplies dans X^*. Les conditions (B) et (C) sont satisfaites aussi dans $X^* \cap X_n^\sim$, puisque $X^* \cap X_n^\sim$ est une bande dans X^*.

Le théorème suivant exprime une très importante propriété des espaces avec la condition (C).

THÉORÈME 7 (Nakano-Amémia-Mori). *Si* X *est un K-espace normé avec* $X_n^\sim$ *total, les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *la condition* (C) *est réalisée dans* X;

2) $x = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \cap X_n^\sim,\ \|f\| \leqslant 1\},\ \forall x \in X$;

3) *l'injection canonique* $\pi : X \to (X_n^\sim \cap X^*)^*$ *conserve la norme.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Le théorème VI.1.6 se généralise aux e.i.n. sans l'hypothèse de σ-finitude de la mesure. On peut maintenant se servir du théorème 2.5.

2) $\Rightarrow$ 3) est évidente.

3) $\Rightarrow$ 1), puisque la condition (C) est vérifiée dans $(X_n^\sim \cap X^*)^*$ d'après le théorème 6.

Si X est complet, alors $X_n^\sim \subset X^*$ et nous pouvons considérer sur $X_n^\sim$ une norme induite de X^*. Nous définissons ainsi les K-espaces de Banach $(X_n^\sim)^*$ et $(X_n^\sim)_n^\sim$.

THÉORÈME 8. *Si* X *est un K-espace de Banach avec* $X_n^\sim$ *total, les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *les conditions* (B) *et* (C) *sont vérifiées dans* X;

2) *l'injection canonique* $\varkappa : X \to (X_n^\sim)_n^\sim$ *est une isométrie de* X *sur* $(X_n^\sim)_n^\sim$;

3) *si* $\pi : X \to X^{**}$ *est une injection naturelle, il existe un projecteur* P *de norme unité de* X^{**} *sur* $\pi(X)$;

4) *l'intersection de tout système centré de boules fermées de* X *n'est pas vide.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). D'après le théorème 7, $\varkappa$ conserve la norme. Prouvons que $\varkappa(X) = (X_n^\sim)_n^\sim$. Comme indiqué dans 2.3, $\varkappa(X)$ est un fondement dans $(X_n^\sim)_n^\sim$. Donc, pour tout $F \in (X_n^\sim)_n^\sim$, $F > 0$, il existe une suite $\{x_\alpha\} \subset X_+$ telle que $\varkappa(x_\alpha) \uparrow F$. Donc, $\|x_\alpha\| = \|\varkappa(x_\alpha)\| \leqslant \|F\|$, et en vertu de la condition (B) il existe $x = \sup x_\alpha$. L'application $\varkappa$ conservant les bornes, il vient $F = \varkappa(x) \in \varkappa(X)$.

2) $\Rightarrow$ 1) découle des théorèmes 6 et 2.2.

2) $\Rightarrow$ 3). Désignons par F_1 la restriction de $F \in X^{**}$ à $X_n^\sim$. Posons $F_2 = [(X_n^\sim)_n^\sim](F_1)$. Alors $F_2 \in (X_n^\sim)_n^\sim = \varkappa(X)$ et, par suite, il existe $x_F \in X$ pour lequel $F_2 = \varkappa(x_F)$. Posons $P(F) = \pi(x_F)$ et vérifions que P est le projecteur cherché. Montrons que pour tout $F = \pi(x)$ on a

$$P(F) = F.$$

L'ensemble $X_n^\sim$ étant total sur $\pi(X)$, il suffit de prouver que $x = x_F$. Comme

$$F_1(f) = f(x) \quad (f \in X_n^\sim),$$

il vient $F_2 = \varkappa(x)$, d'où $x = x_F$.

Il nous reste à vérifier que $\| P \| = 1$. Soit $F \in X^{**}$, $\| F \| \leqslant 1$, et de plus $P(F) = \pi(x_F)$. On a de toute évidence

$$\| P(F) \| = \| \pi(x_F) \| = \| x_F \| = \| \varkappa(x_F) \| = \| F_2 \| \leqslant \leqslant \| F_1 \| \leqslant \| F \|.$$

D'où $\| P \| \leqslant 1$. On a déjà montré que P laissait invariants les éléments de $\pi(X)$, donc $\| P \| = 1$.

3) $\Rightarrow$ 4). Soient $\{B_\xi\}$ un système centré de boules fermées dans X. $\overline{B}_\xi$ l'adhérence $(*)$-faible de $\pi(B_\xi)$ dans X^{**}. L'ensemble $\bigcap \overline{B}_\xi$ n'est pas vide dans X^{**}, car les boules sont $(*)$-faiblement compactes. Soit $F \in \bigcap \overline{B}_\xi$. Il vient alors $P(F) \in \bigcap B_\xi$.

4) $\Rightarrow$ 1) est un résultat intéressant récent de A. Sédaev [1] auquel nous renvoyons le lecteur. Soulignons que la propriété 4) est manifestement un invariant isométrique.

D'intéressantes propriétés d'espaces avec les conditions (B) et (C) sont indiquées aussi dans le travail de Lozanovski [2].

4.4. On appellera *KB-espace* un K-espace de Banach dans lequel sont réalisées les conditions (A_σ) et (B_σ). Comme indiqué dans 4.2, la condition (A) est remplie dans les KB-espaces. Le théorème VII.6.3 (Voulikh [I]) nous dit que la condition (B) est également vérifiée dans les KB-espaces, donc d'après le théorème 8 les KB-espaces sont (o)-réflexifs.

THÉORÈME 9. *Si* X *est un lattis de Banach, les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) X *est un KB-espace*;

2) *si* $\pi : X \to X^{**}$ *est l'injection canonique, alors* $\pi(X)$ *est une bande dans* X^{**};

3) X *est faiblement séquentiellement complet*;

4) X *ne contient pas de sous-espace fermé* Y *isomorphe à l'espace* c_0 *au sens de la théorie des B-espaces*;

5) *si* $0 \leqslant x_n \uparrow$, $x_n \in X$ *et* $\sup \| x_n \| < \infty$, *la suite* $\{x_n\}$ *converge en norme.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). La condition (A) étant réalisée dans X, on a $X^* = X_n^\sim$. L'espace X étant (o)-réflexif, le théorème 2.3 nous dit que $\pi(X)$ est une bande dans X^{**}.

2) $\Rightarrow$ 3). D'après le théorème 2.2, $X^* = X_n^\sim$, donc l'espace X est (o)-réflexif d'après le théorème 2.3. D'où il résulte que X est faiblement séquentiellement complet d'après le corollaire 2 du théorème 3.4.

3) $\Rightarrow$ 4). Supposons par absurde que X contient un sous-espace fermé Y isomorphe à c_0. X étant faiblement séquentiellement complet, les corollaires 1 et 3 du théorème III.3.2 nous disent que l'espace Y, donc c_0, est aussi faiblement séquentiellement complet. Or,

ceci est faux. En effet, si $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, où

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \leqslant n, \\ 0 & \text{pour } k > n, \end{cases}$$

alors on déduit sans peine de l'égalité $(\mathbf{c}_0)^* = \mathbf{l}^1$ que $\{x_n\}$ est une suite faible de Cauchy qui n'est pas convergente dans $\mathbf{c}_0$.

4) $\Rightarrow$ 5). Supposons par absurde qu'il existe une suite bornée en norme $\{x_n\}$, $0 \leqslant x_n \uparrow$, qui n'est pas convergente en norme. Posons

$$\rho_n = \lim_{m\to\infty} \| x_m - x_n \|, \quad \rho = \inf \rho_n$$

(la limite de ρ_n existe puisque $\{x_n\}$ est monotone). On a $\rho > 0$, puisque $\{x_n\}$ n'est pas suite de Cauchy. En raréfiant $\{x_n\}$ on peut faire en sorte que pour $m < n$

$$(^3/_4)\rho \leqslant \| x_n - x_m \| \leqslant (^5/_4)\rho.$$

Soit φ l'espace des suites tronquées (cf. page 146). Définissons l'opérateur $U: \varphi \to \mathbf{X}$ à l'aide de la formule

$$U(z) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_{i+1} - x_i),$$

où $z = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, 0, 0, \ldots) \in \varphi$. Il vient

$$U(z) \leqslant \| z \| (x_{m+1} - x_1),$$

d'où

$$\| U(z) \| \leqslant \| z \| \, \| x_{m+1} - x_1 \| \leqslant (^5/_4)\, \rho \, \| z \|. \tag{3}$$

Minorons $\| U(z) \|$. Soit

$$\lambda_i^+ = \max(\lambda_i, 0), \quad \lambda_i^- = \max(-\lambda_i, 0).$$

Posons

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^+ (x_{i+1} - x_i), \quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^- (x_{i+1} - x_i).$$

Il vient

$$U(z) = u - v, \quad U(|z|) = u + v.$$

Si

$$h^+ = \max\{\lambda_i^+ : 1 \leqslant i \leqslant m\}, \quad h^- = \max\{\lambda_i^- : 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

alors

$$\| z \| = \max(h^+, h^-).$$

Supposons pour fixer les idées que $\| z \| = h^+$. Comme

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^+ (x_{i+1} - x_i) \geqslant \lambda_j^+ (x_{j+1} - x_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

alors

$$\| u \| \geqslant \lambda_j^+ \| x_{j+1} - x_j \| \geqslant \lambda_j^+ (^3/_4)\, \rho, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

d'où

$$\| u \| \geqslant (^3/_4)\, \rho \, \| z \|.$$

Donc, en se servant de (3) on obtient

$$\| U(z) \| = \| u - v \| = \| 2u - (u + v) \| \geqslant 2 \| u \| - \\ - \| u + v \| \geqslant (^6/_4)\, \rho \, \| z \| - \| U(|z|) \| \geqslant (^1/_4)\, \rho \, \| z \|. \qquad (4)$$

La conjonction de (3) et (4) nous donne en définitive

$$(^1/_4)\, \rho \, \| z \| \leqslant \| U(z) \| \leqslant (^5/_4)\, \rho \, \| z \|, \quad z \in \varphi.$$

L'espace φ étant dense dans c_0, U se prolonge en un isomorphisme entre c_0 et un sous-espace de X, ce qui contredit 4).

5) $\Rightarrow$ 1). Montrons que la condition (A_σ) est réalisée dans X. Soit $x_n \downarrow 0$. La suite $\{x_1 - x_n\}$ est bornée en norme et $0 \leqslant x_1 - x_n \uparrow \tilde{x}$. Par hypothèse, $\{x_1 - x_n\}$ converge en norme vers un élément $\tilde{x}$. Comme $x_1 - x_n \uparrow x_1$, il vient $\tilde{x} = x_1$, d'où $x_n = (x_n - x_1) + x_1 \to 0$ en norme.

La condition (B_σ) est manifestement réalisée. Donc, X est un K_σ-espace de Banach dans lequel sont vérifiées les conditions (A_σ) et (B_σ). Comme signalé dans la note de la page 391, X est un K-espace, donc un KB-espace.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Le théorème 9 nous fournit un critère, facile à vérifier, de complétude séquentielle faible dans la classe des lattis de Banach, car en général la vérification de la réalisation des conditions (A) et (B) dans des espaces concrets est sans problème. Signalons tout d'abord que d'après le théorème 9, l'espace non réflexif $L^1(T, \Sigma, \mu)$ est faiblement séquentiellement complet. Arrêtons-nous encore sur le cas d'espaces d'Orlicz sur un espace de mesure continue finie. D'après le théorème IV.3.9, l'espace d'Orlicz L_M est un KB-espace si et seulement si la fonction M vérifie la Δ_2-condition. Donc, L_M est faiblement séquentiellement complet si et seulement si M vérifie la Δ_2-condition. De façon analogue on déduit qu'un e.f. de Banach dans lequel est satisfaite la condition (A) n'est pas faiblement séquentiellement complet si M ne remplit pas la Δ_2-condition.

La notion de KB-espace permet de formuler un critère de réflexivité (au sens des B-espaces) facile à vérifier.

THÉORÈME 10 (Ogasawara). *Si* X *est un lattis de Banach, les propositions suivantes sont équivalentes:*

1) X *est réflexif*;

2) X *et* X* *sont des KB-espaces.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). X^* étant réflexif, il suffit de prouver que X est KB-espace. Or, ceci découle de la définition de la réflexivité et du numéro 2) du théorème 9.

2) $\Rightarrow$ 1). Considérons l'injection canonique $\pi: X \to X^{**}$. Comme X est un KB-espace, il suit que $X^* = X_n^\sim$ et $\pi(X) = (X_n^\sim)_n^\sim = (X^*)_n^\sim$. X^* étant un KB-espace, il vient $X^{**} = (X^*)_n^\sim$, d'où $\pi(X) = X^{**}$, et, par suite, X est réflexif.

§ 5. Ensembles convexes fermés pour la convergence en mesure

5.1. Dans ce paragraphe, on se sert de la théorie des lattis vectoriels pour montrer que l'étude des ensembles convexes bornés, fermés pour la convergence en mesure, peut être ramenée dans des e.i. (o)-réflexifs à l'étude d'ensembles compacts convexes dans des e.v.t. convenables. Ceci étant, la nécessité d'utiliser les résultats non triviaux de la théorie des lattis vectoriels se présente déjà dans le cas de l'espace classique $L^1(0, 1)$.

Commençons par quelques résultats préliminaires.

Soient X un l.v., Y un idéal dans un K-espace $X^\sim$, total sur X. Considérons la topologie localement convexe $|\sigma|(X, Y)$ sur X engendrée par l'ensemble des semi-normes

$$p_f(x) = f(|x|), \quad x \in X,$$

où f parcourt Y_+ tout entier.

Signalons deux propriétés de l'e.l.c. $(X, |\sigma|(X, Y))$.

1) La topologie $|\sigma|(X, Y)$ est une topologie de la convergence uniforme sur l'ensemble de tous les intervalles de Y.

2) La topologie $|\sigma|(X, Y)$ est compatible avec la dualité entre X et Y.

La proposition 1) découle de la formule

$$p_f(x) = f(|x|) = \sup\{|g(x)|: |g| \leqslant f\}.$$

D'après le corollaire du lemme 3.1, tous les intervalles de Y sont $\sigma(Y, X)$-compacts. Donc, la proposition 2) résulte de 1) et du théorème de Mackey-Arens (cf. théorème III.3.8).

Dans la suite de ce paragraphe on admettra que X est un e.f. sur (T, Σ, μ), où la mesure μ et σ-finie, et $X_n^\sim$ total sur X. On rappelle que $X_n^\sim$ est alors isomorphe à X' et $\operatorname{supp} X' = T$ (théorème VI.1.1).

LEMME 1. *Soit* Y *un fondement dans* $X_n^\sim$. *Si la suite généralisée* $x_\alpha \to 0$ *pour la topologie* $|\sigma|(X, Y)$, *alors* $x_\alpha \to 0\ (\mu)$.

DÉMONSTRATION. $X_n^\sim$ étant isomorphe à X', on peut identifier le fondement Y à un e.f. dans X'. D'après le corollaire 2 du lemme IV.3.1, il existe une partition $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de l'ensemble T telle que

$\chi_{A_n} \in Y$ et $0 < \mu(A_n) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour tout n on a alors

$$\int_{A_n} |x_\alpha| \, d\mu \to 0.$$

D'où $x_\alpha \to 0$ (μ) sur chaque A_n et par suite $x_\alpha \to 0$ (μ).

LEMME 2. *Soit* Y *un fondement dans* $X_n^\sim$. *Si la suite généralisée* $x_\alpha \to 0$ (σ (X, Y)), *il existe une suite généralisée* $y_\beta \to 0$ (μ), *où chaque élément* y_β *est une combinaison convexe des éléments de* $\{x_\alpha\}$.

DÉMONSTRATION. L'espace dual de (X, $|\sigma|$ (X, Y)) étant Y, il existe une suite généralisée $y_\beta \to 0$ ($|\sigma|$ (X, Y)), où y_β est de la forme indiquée (cf. corollaire 2 du théorème III.3.2). D'après le lemme 1, $y_\beta \to 0$ (μ).

LEMME 3. *Soient* Y *un fondement dans* $X_n^\sim$, $\{x_\alpha\}$ *une suite dans* X; x, $x_0 \in X$. *Si existe* $y \in S(T, \Sigma, \mu)$ *tel que* $|x_\alpha| \leqslant y$ *pour tout* α, $x_\alpha \to x$ (μ) *et* $x_\alpha \to x_0$ (σ (X, Y)), *alors* $x = x_0$.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 2 du lemme IV.3.1, on peut admettre que la mesure μ est finie et $y \in X$. Si $x' \in Y$, il existe une suite $\{x_{\alpha_n}\}$ telle que

$$\left| \int_T (x_{\alpha_n} - x_0) x' \, d\mu \right| < 1/n, \quad x_{\alpha_n} \to x \, (\mu).$$

Le théorème de Lebesgue de la convergence majorée nous dit que $\int_T (x - x_0) x' \, d\mu = 0$, $\forall x' \in Y$, d'où $x_0 = x$.

M étant un sous-ensemble de $S = S(T, \Sigma, \mu)$, on désignera par $\tau(M)$ la topologie induite sur M à partir de S.

LEMME 4. *Soient* X *un espace* (*o*)-*réflexif*, $M \subset X$ *un ensemble borné pour la topologie faible* σ (X, $X_n^\sim$). *Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *M est fermé dans l'e.v.t.* S (T, Σ, μ);
2) *M est fermé dans* (X, τ (X)).

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2) est évidente.

2) $\Rightarrow$ 1). Etant σ (X, $X_n^\sim$)-borné, l'ensemble M est $|\sigma|$ (X, $X_n^\sim$)-borné (cf. théorème III.3.3). Soient $\{x_\alpha\} \subset M$, $x \in S$ et $x_\alpha \to x$ (μ). Prouvons que $x \in X$. Comme $X = X''$, il suffit pour cela de prouver que pour tout $x' \in X'$ on a $\int |xx'| \, d\mu < \infty$, mais ceci est évident du fait que M est $|\sigma|$ (X, $X_n^\sim$)-borné et du théorème de Fatou.

5.2. Supposons par ailleurs que X est e.f., de plus $X = X''$, c'est-à-dire X est (*o*)-réflexif. Désignons par $\varkappa$ l'injection canonique

de X dans $(X_n^{\sim})^{\sim}$. Alors $\varkappa(X) = (X_n^{\sim})_n^{\sim}$ est une bande dans le K-espace $(X_n^{\sim})^{\sim}$. Désignons par Pr un projecteur sur la bande $\varkappa(X)$.

LEMME 5. *Si une suite généralisée* $\{x_\alpha\}$ *dans* X *est telle que* $\varkappa(x_\alpha) \to F$ *pour la topologie faible* $\sigma((X_n^{\sim})^{\sim}, X_n^{\sim})$ *et* $\Pr F = \pi(x)$, $x \in X$, *il existe alors un fondement* Y *dans* $X_n^{\sim}$ *tel que* $x_\alpha \to x\,(\sigma(X, Y))$.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3.6 le K-espace $(X_n^{\sim})^{\sim}$ se décompose en une somme de deux bandes étrangères $(X_n^{\sim})_n^{\sim} = \varkappa(X)$ et $(X_n^{\sim})_s^{\sim}$. Si $F_1 = F - \varkappa(x)$, alors $F_1 \in (X_n^{\sim})_s^{\sim}$. Donc, l'ensemble $Y = \{f \in X_n^{\sim}: |F_1|(|f|) = 0\}$ est un fondement dans $X_n^{\sim}$. De plus, pour tout $f \in Y$

$$f(x_\alpha) = [\varkappa(x_\alpha)](f) \to F(f) = [\varkappa(x)](f) + F_1(f) = f(x),$$

c'est-à-dire $x_\alpha \to x\,(\sigma(X, Y))$.

Les lemmes 2 et 5 sont vitaux pour la démonstration du théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 1. *Soient* X *un e.f.* (o)*-réflexif*, V *un sous-ensemble convexe non vide dans* X, W *la* $\sigma((X_n^{\sim})^{\sim}, X_n^{\sim})$*-adhérence de l'ensemble* $\varkappa(V)$. *Si*

a) V *est fermé dans* $(X, \tau(X))$, *alors*

$$\Pr W = \varkappa(V); \tag{1}$$

b) V *est* $\sigma(X, X_n^{\sim})$*-borné et vérifie la condition* (1), *alors* V *est fermé dans* $(X, \tau(X))$.

DÉMONSTRATION. a) Supposons que V est fermé dans $(X, \tau(X))$. Il est évident que $\varkappa(V) \subset \Pr W$. Supposons que $F \in W$ et $\varkappa(x) = \Pr F$. Il existe alors une suite généralisée $\{x_\alpha\} \subset V$ telle que $\varkappa(x_\alpha) \to F$ pour la topologie $\sigma((X_n^{\sim})^{\sim}, X_n^{\sim})$. D'après le lemme 5, il existe dans $X_n^{\sim}$ un fondement Y tel que $x_\alpha \to x\,(\sigma(X, Y))$. V étant convexe et (μ)-fermé, $x \in V$ d'après le lemme 2, et par suite $\varkappa(x) \in \varkappa(V)$.

b) Etant $\sigma((X_n^{\sim})^{\sim}, X_n^{\sim})$-borné, l'ensemble $\varkappa(V)$ est, selon le corollaire du lemme 3.1. relativement compact pour cette topologie, et, par suite, l'ensemble W est compact.

La mesure μ étant σ-finie, pour prouver que V est (μ)-fermé il suffit de vérifier que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, $x_n \to x$ p.p., $x \in X$, entraînent $x \in V$. Comme $x_n \to x$ p.p., il existe $y \in S$ tel que $|x_n| \leqslant y$ $(n \in \mathbb{N})$.

La compacité de W entraîne l'existence d'une suite partielle généralisée $\{x_\alpha\}$ de $\{x_n\}$, convergeant pour la topologie $\sigma((X_n^{\sim})^{\sim}, X_n^{\sim})$ vers un $F \in W$. D'après la condition (1) et le lemme 5, il existe alors un fondement Y dans $X_n^{\sim}$ et un élément $x_0 \in V$, tels que $x_\alpha \to x_0\,(\sigma(X, Y))$. Comme $x_\alpha \to x\,(\mu)$ en tant que suite partielle d'une suite (μ)-convergente, le lemme 3 nous dit que $x = x_0 \in V$, ce qui achève la démonstration du théorème.

C'est précisément le théorème 1 qui permet de ramener l'étude des ensembles convexes bornés (μ)-fermés à celle d'ensembles $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-compacts. On suppose toujours que X est un e.f. (o)-réflexif.

THÉORÈME 2. *Soient V_1 et V_2 des ensembles de* X *convexes non vides disjoints, fermés dans* (X, τ (X)). *Si l'un d'eux au moins est* σ (X, $X_n^\sim$)-*borné, ils sont strictement séparés par une fonctionnelle de* $X_n^\sim$, *c'est-à-dire il existe* $f \in X_n^\sim$ *telle que* $\sup\{f(x) : x \in V_1\} < \inf\{f(x) : x \in V_2\}$.

DÉMONSTRATION. Soit W_i la $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-adhérence de l'ensemble $\varkappa(V_i)$ ($i = 1, 2$). D'après (1), $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Si V_1, pour fixer les idées, est borné, W_1 est $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-compact (cf. début de la démonstration du numéro b) du théorème 1). On peut maintenant se servir du théorème de séparation (cf. théorème III.2.6).

THÉORÈME 3. *Soit* $\{V_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *un système centré de sous-ensembles de* X *convexes,* σ (X, $X_n^\sim$)-*bornés, fermés dans* (X, τ (X)). *Alors* $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$ *n'est pas vide.*

DÉMONSTRATION. Soit W_ξ la $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-adhérence de $\varkappa(V_\xi)$. W_ξ étant compact pour cette topologie, $\bigcap W_\xi$ n'est pas vide. Donc $\bigcap_{\xi \in \Xi} V_\xi$ n'est pas vide d'après le théorème 1 (a).

THÉORÈME 4. *Soient V_1 et V_2 des sous-ensembles de* X *convexes,* σ (X, $X_n^\sim$)-*bornés, fermés dans* (X, τ (X)). *Alors* $V = V_1 + V_2$ *est fermé dans* (X, τ (X)).

DÉMONSTRATION. Soit W_i la $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-adhérence de $\varkappa(V_i)$ ($i = 1, 2$). Si $W = W_1 + W_2$, alors

$$\Pr W = \Pr W_1 + \Pr W_2 = \varkappa(V_1) + \varkappa(V_2) = \varkappa(V)$$

en vertu du théorème 1 (a). W étant visiblement la $\sigma((X_n^\sim)^\sim, X_n^\sim)$-adhérence de V, le théorème 1 (b) nous dit que V est (μ)-fermé.

THÉORÈME 5. *Soit* X *un e.f. de Banach avec les conditions* (B) *et* (C). *Soient V_1 et V_2 des ensembles convexes non vides de* X *fermés dans* (X, τ (X)). *Si l'un d'eux au moins est borné en norme dans* X, *il existe* $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ *tels que*

$$\| v_1 - v_2 \|_X = \inf\{\| x_1 - x_2 \|_X : x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que V_1 est borné en norme. Il suffit donc de chercher l'élément $v_2 \in V_2$ le plus proche de V_1 dans l'intersection de V_2 avec une boule fermée de rayon assez grand. Cette intersection est (μ)-fermée d'après la condition (C) et le lemme IV.3.4. Donc, V_2 peut être considéré comme borné en norme. Soit W_i la

$\sigma((X_n^{\sim})^*, X_n^{\sim})$-adhérence de $\varkappa(V_i)$ $(i = 1, 2)$. Comme les W_i sont $(*)$-faiblement] compacts, il existe $\tilde{F}_1 \in W_1$, $\tilde{F}_2 \in W_2$, tels que

$$\|\tilde{F}_1 - \tilde{F}_2\|_{(X_n^{\sim})^*} = \inf\{\|F_1 - F_2\|_{(X_n^{\sim})^*} : F_1 \in W_1,\ F_2 \in W_2\}.$$

L'application $\varkappa : X \to (X_n^{\sim})^*$ étant une isométrie, il est aisé de voir que les éléments $v_i = \Pr \tilde{F}_i$, qui appartiennent à V_i d'après le théorème 1(a) $(i = 1, 2)$, sont bien les éléments cherchés.

Les théorèmes 1 à 5 possèdent des applications en analyse convexe et en théorie de la commande optimale (cf. Lévine [2]; nous produisons un résultat de ce travail dans 5.3). Les résultats exposés dans 5.1 et 5.2 ont été obtenus par A. Boukhvalov et G. Lozanovski (cf. [1] qui contient d'autres applications et généralisations).

5.3. Utilisons le théorème 3 pour démontrer le théorème du minimum d'une fonctionnelle convexe sur un ensemble convexe fermé pour la convergence en mesure.

Une fonctionnelle p définie sur $L^1(T, \Sigma, \mu)$ prenant éventuellement la valeur $+\infty$, est dite *semi-continue inférieurement* pour la convergence en mesure si

$$x_n \to x(\mu) \Rightarrow p(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} p(x_n).$$

La fonctionnelle p est *convexe* si

$$p(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y)$$

pour tous les $x, y \in L^1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

THÉORÈME 6. *Une fonctionnelle convexe p semi-continue inférieurement pour la convergence en mesure, atteint son minimum sur tout ensemble $V \subset L^1$ borné en norme, fermé dans $(L^1, \tau(L^1))$.*

DÉMONSTRATION. Soit

$$m = \inf\{p(x) : x \in V\}.$$

Prenons une suite de nombres m_n $(m_n > m)$ tendant vers m en décroissant. Considérons les ensembles

$$V_n = \{x \in V : p(x) \leqslant m_n\}.$$

Comme $m_n > m$, chaque V_n n'est pas vide, et puisque $m_n \downarrow$, la suite des ensembles V_n décroît, donc est centrée. La convexité de p entraîne celle des ensembles V_n, et la semi-continuité inférieure de p, leur $\tau(L^1)$-fermeture. Le théorème 3 nous dit que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. Si $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, alors $x_0 \in V$ et $p(x_0) \leqslant m_n$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$, d'où $p(x_0) = m$.

CHAPITRE XI

OPÉRATEURS INTÉGRAUX

§ 1. Représentation intégrale des opérateurs

1.1. Les opérateurs intégraux forment une importante classe d'opérateurs d'un usage fréquent dans les applications. Nous avons déjà eu affaire aux opérateurs intégraux au § 2, chap. V. Cependant, notre attention a surtout été retenue par les opérateurs à noyaux continus dans $\mathbf{C}[a, b]$. Dans ce paragraphe, nous étudions des opérateurs intégraux à noyaux mesurables arbitraires, définis sur des espaces idéaux.

Soient (S, Σ_S, ν) et (T, Σ_T, μ) des espaces de mesures σ-finies, (R, Σ_R, λ), leur produit (cf. I.6.8), c'est-à-dire $R = S \times T$ et $\lambda = \nu \times \mu$.

Dans ce paragraphe $\mathbf{X}$ désigne un e.f. sur (T, Σ_T, μ), $\mathbf{Y}$, un e.f. sur (S, Σ_S, ν) *).

Un opérateur $U: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ est *intégral* si existe une fonction λ-mesurable $K(s, t)$ $(s \in S,\ t \in T)$ telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$ la valeur de $y = U(x)$ est la fonction

$$y(s) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t). \tag{1}$$

La fonction $K(s, t)$ s'appelle *noyau* de l'opérateur intégral U. Il est aisé de voir que le noyau est λ-presque partout fini.

On dit qu'un opérateur intégral (1) est un *opérateur régulier de* $\mathbf{X}$ *dans* $\mathbf{Y}$ si l'opérateur $|U|$, défini par

$$z = |U|(x), \quad z(s) = \int_T |K(s, t)|\, x(t)\, d\mu(t) \quad (x \in \mathbf{X}), \tag{2}$$

envoie $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$. L'opérateur $|U|$ est appelé *module* de U **).

---

*) Dans ce chapitre, nous admettons pour fixer les idées que tous les espaces sont réels, bien que les résultats soient valables pour le cas complexe.

**) Un opérateur intégral U est régulier au sens de la définition donnée si et seulement si $U \in L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Il s'avère de plus que $|U|$ est un module dans l'espace complètement réticulé $L^{\sim}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (cf. page 374).

Soit $U: \mathbf{X} \to \mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$ un opérateur intégral (1). Enumérons certaines de ses propriétés.

I. L'opérateur U est linéaire.

II. Pour que $U(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbf{X}_+$, il est nécessaire et suffisant que $K(s, t) \geqslant 0$, λ-p.p.

La condition suffisante est évidente. Prouvons la condition nécessaire. D'après le corollaire 2 du lemme IV.3.1, on peut admettre que $\mathbf{L}^\infty(T, \Sigma_T, \mu) \subset \mathbf{X}$. Si $\mathbf{1}_T$ est la fonction identiquement égale à l'unité sur T, alors pour ν-presque tous les s on a

$$\left| \int_T K(s, t)\, d\mu(t) \right| = |[U(\mathbf{1}_T)](s)| < +\infty,$$

d'où il résulte pour ν-presque tous les s que

$$y(s) = \int_T |K(s, t)|\, d\mu(t) < +\infty.$$

La fonction $y(s)$ étant continue ν-p.p., il existe une partition $\{B_n\}$ de l'ensemble S, telle que $y\chi_{B_n} \in \mathbf{L}^1(S, \Sigma_S, \nu)$ $(n \in \mathbb{N})$. Donc, on peut admettre que $y \in \mathbf{L}^1(S, \Sigma_S, \nu)$. D'après le théorème de Tonelli (théorème I.6.12)

$$\int_R |K(s, t)|\, d\lambda(s, t) = \int_S y(s)\, d\nu(s) < +\infty,$$

c'est-à-dire $K \in \mathbf{L}^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Donc, d'après le théorème de Fubini, pour toutes fonctions mesurables $B \subset S$, $A \subset T$, on a

$$\int_{B \times A} K(s, t)\, d\lambda(s, t) = \int_B [U(\chi_A)](s)\, d\nu(s) \geqslant 0,$$

d'où $K(s, t) \geqslant 0$ λ-p.p. (cf. I.6.8).

L'application de II aux opérateurs U et $-U$ nous donne

III. L'opérateur $U = 0$ si et seulement si $K(s, t) = 0$ λ-p.p.

IV. L'opérateur $|U|$ défini par la formule (2) transforme $\mathbf{X}$ en $\mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$.

En effet, de (1) il résulte que pour tout $x \in \mathbf{X}$

$$\int_T |K(s, t)\, x(t)|\, d\mu(t) < +\infty$$

pour ν-presque tous les $s \in S$, d'où l'on déduit que la fonction $z = |U|(x)$ de la formule (2) est p.p. finie.

V. Si $x_n \to 0$ (μ) et $|x_n| \leqslant x \in \mathbf{X}$ $(n \in \mathbb{N})$, alors $[U(x_n)](s) \to 0$ ν-p.p.

La propriété V est une conséquence de IV et du théorème de Lebesgue. La propriété V implique

VI. Si $x_n \to 0$ μ-p.p. et $|x_n| \leqslant x \in \mathbf{X}$ $(n \in \mathbb{N})$, alors $[U(x_n)](s) \to 0$ ν-p.p.

VII. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont des e.f. de Banach et U un opérateur intégral de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$, alors U est continu, c'est-à-dire $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Ceci résulte du théorème du graphe fermé (cf. théorème XII.1.4, tome 2), du lemme IV.3.2 et de V. La description en termes de noyau $K(s, t)$ du fait que l'opérateur U est un opérateur de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$, est très ardue. Certains résultats en ce sens sont exhibés dans les §§ 2 et 3.

VIII. Si U est un opérateur intégral régulier (1) de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$ et $V: \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}'$ vérifie la relation

$$\int_S U(x)\, y'\, d\nu = \int_T xV(y')\, d\mu, \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad \forall y' \in \mathbf{Y}',$$

alors pour $z = V(y')$ on a

$$z(t) = \int_S K(s, t)\, y'(s)\, d\nu(s) \quad (y' \in \mathbf{Y}'),$$

c'est-à-dire $V: \mathbf{Y}' \to \mathbf{X}'$ est aussi un opérateur intégral régulier de noyau $K^*(t, s) = K(s, t)$.

En effet, l'opérateur U étant régulier, la fonction $\int_T |K(s, t)| \times$ $\times\, x(t)\, d\mu(t)$ appartient à $\mathbf{Y}$ pour tout $x \in \mathbf{X}$. D'après le théorème de Tonelli, pour tous les $x \in \mathbf{X}_+$, $y' \in \mathbf{Y}'_+$, on a

$$\int_R |K(s, t)|\, x(t)\, y'(s)\, d\lambda(s, t) =$$

$$= \int_S \left\{ \int_T |K(s, t)|\, x(t)\, d\mu(t) \right\} y'(s)\, d\nu(s) < +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de Fubini, pour tous les $x \in \mathbf{X}_+$, $y' \in \mathbf{Y}'_+$, on obtient

$$\int_T xV(y')\, d\mu = \int_S U(x)\, y'\, d\nu = \int_S \left\{ \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) \right\} y'(s)\, d\nu(s) =$$

$$= \int_T \left\{ \int_S K(s, t)\, y'(s)\, d\nu(s) \right\} x(t)\, d\mu(t) = \int_T zx\, d\mu.$$

D'où il suit que les fonctions $V(y')$ et z définissent une même fonctionnelle (o)-continue sur $\mathbf{X}$. D'après le théorème VI.1.1, on a maintenant $z = V(y')$.

1.2. Dans ce paragraphe, on se propose d'établir les conditions sous lesquelles un opérateur linéaire U d'un e.f. dans un autre est un opérateur intégral, c'est-à-dire admet la représentation (1).

Signalons d'entrée que ce problème est très simple dans le cas d'une mesure discrète. Supposons précisément que la mesure μ est discrète. Cela étant, tout opérateur linéaire U d'un e.f. X sur (T, Σ_T, μ) dans S (S, Σ_S, ν), vérifiant la condition VI, est un opérateur intégral, c'est-à-dire la condition VI est nécessaire et suffisante pour que l'opérateur U soit intégral. En effet, la mesure μ étant discrète, l'ensemble T peut être représenté sous la forme d'une réunion d'un nombre dénombrable d'atomes $\{A_n\}$. Alors tout $x \in X$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$x = \sum_n \lambda_n \chi_{A_n},$$

où la série du second membre est presque partout convergente. L'opérateur U satisfaisant à la condition VI, on a

$$U(x) = \sum_n \lambda_n U(\chi_{A_n}),$$

la série du second membre étant presque partout convergente. Pour $t \in A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ posons

$$K(s, t) = \frac{1}{\mu(A_n)} [U(\chi_{A_n})](s).$$

Il est évident que la fonction $K(s, t)$ est $\nu \times \mu$-mesurable. Vérifions que $K(s, t)$ est noyau de l'opérateur U. Pour tout $x \in X$ on a

$$\int_T K(s, t) x(t)\, d\mu(t) = \sum_n \frac{1}{\mu(A_n)} [U(\chi_{A_n})](s) \lambda_n \mu(A_n) =$$

$$= \sum_n \lambda_n [U(\chi_{A_n})](s) = [U(x)](s),$$

c.q.f.d.

On voit immédiatement que lorsque X est l'e.f. des suites, l'opérateur linéaire $U : X \to s$ est intégral si et seulement si c'est un opérateur matriciel. Ceci signifie qu'il existe une matrice infinie $\{a_{ik}\}_{i=1, k=1}^{\infty, \infty}$ telle que si $y = U(x)$, $x = \{\xi_k\} \in X$, $y = \{\eta_i\} \in s$, alors

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k.$$

La situation est bien plus compliquée si la mesure est continue (ce cas est plus intéressant du point de vue de la théorie des opérateurs). Ici la condition VI n'est que nécessaire. En effet, si l'on considère un e.f. X sur l'espace (T, Σ_T, μ) de mesure continue et que l'on désigne par I l'opérateur identique sur X, il est manifeste que I vérifie la condition VI, mais pas la condition nécessaire V, car dans le cas d'une mesure continue il est facile de construire une

suite $\{x_n\} \subset X$ bornée dans X, convergente en norme mais pas presque partout (cf. par exemple Voulikh [III]).

Cependant, il s'avère que la condition V est déjà nécessaire et suffisante dans le cas général. Voici la formulation exacte de ce résultat qui n'est déjà plus trivial pour les opérateurs dans $L^2(D)$.

THÉORÈME 1. *Soient* X *un e.f. sur* (T, Σ_T, μ), $U : X \to S(S, \Sigma_S, \nu)$ *un opérateur linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes*:

1) *U est un opérateur intégral*;

2) *si* $x_n \to 0\ (\mu)$ *et* $|x_n| \leqslant x \in X$ $(n \in \mathbb{N})$, *alors* $[U(x_n)](s) \to 0$ ν-*p.p.*;

3) *l'opérateur U vérifie la condition* VI *et de* $\chi_{A_n} \leqslant x \in X (n \in \mathbb{N})$, $\mu(A_n) \to 0$ *il résulte que* $[U(\chi_{A_n})](s) \to 0$ ν-*p.p.*

On sait déjà que 1) $\Rightarrow$ 2) (voir V). L'implication 2) $\Rightarrow$ 3) est évidente. Le théorème 1 a été obtenu par A. Boukhvalov (voir Boukhvalov [3] où figure également la démonstration de 3) $\Rightarrow$ 1)). Il généralise un résultat antérieur de Nakano.

COROLLAIRE. *Soit* $\Phi(s, t)$ *une fonction, en général non mesurable, telle que pour tout* $x \in X$ *soit* ν-*p.p. définie la fonction finie* ν-*mesurable* $y(s) = \int_T \Phi(s, t)\, x(t)\, d\mu(t)$. *Définissons l'opérateur* $U(x) = y$ $(x \in X)$. *Il existe alors une fonction* $K(s, t)$ λ-*mesurable telle que pour tout* $x \in X$ *l'on a*

$$[U(x)](s) = \int_T \Phi(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t)$$

pour ν-*presque tous les* s (*l'ensemble exclu dépend généralement de* x).

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in X$ on a

$$\left| \int_T \Phi(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) \right| \leqslant \int_T |\Phi(s, t)\, x(t)|\, d\mu(t) < +\infty \quad \nu\text{-p.p.}$$

(on remarquera que la fonction de droite est susceptible d'être non mesurable). En utilisant le théorème de Lebesgue, on s'assure que l'opérateur U vérifie la condition 2) du théorème 1, d'où ce que nous voulions.

Le corollaire permet de remplacer les noyaux par des noyaux mesurables. Si l'espace (T, Σ_T, μ) est séparable, on déduit sans peine à partir du corollaire que pour ν-presque tous les s, $K(s, t) = \Phi(s, t)$ pour μ-presque tous les t (Gribanov [2]). On peut montrer que cette assertion est fausse sans la condition de séparabilité.

Dans le reste du paragraphe, on se propose d'établir deux théorèmes sur la représentation intégrale d'opérateurs de certaines classes spéciales. Nous aurions pu les déduire facilement du théorème 1,

mais nous ne le ferons pas, car d'une part, leurs démonstrations, à l'inverse de celle du théorème, n'impliquent pas un appareil auxiliaire important et, d'autre part, la démonstration du théorème 1 utilise un cas particulier du théorème 6.

1.3. Nous commençons par un fait auxiliaire intéressant en soi.

Soient E un ensemble non vide de fonctions $x \in S(T, \Sigma_T, \mu)$, $K(s, t)$ une fonction λ-mesurable λ-p.p. finie sur $R = S \times T$. Nous dirons que l'ensemble E et la fonction $K(s, t)$ sont *compatibles* si sont satisfaites les deux conditions suivantes:

1) il existe un ensemble $S_0' \subset S$, $\nu(S_0') = 0$, tel que pour tout $x \in E$ et tous les $s \in S \setminus S_0'$ la fonction $K(s, t)\, x(t)$ est μ-mesurable et existe $\int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t)$ *);

2) il existe un ensemble $S_0'' \subset S$, $\nu(S_0'') = 0$, tel que pour tout $x \in E$ et tous les $s \in S \setminus S_0''$, les fonctions

$$x_s(t) = \begin{cases} (\operatorname{sign} K(s, t))\, |x(t)| & \text{si } K(s, t) \neq 0 \\ |x(t)| & \text{si } K(s, t) = 0 \end{cases}$$

appartiennent à E.

Si nous posons $S_0 = S_0' \cup S_0''$, alors $\nu(S_0) = 0$. Pour de tels E et K et pour tous les $s \in S \setminus S_0$, posons

$$d_{K, E}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) : x \in E \right\}. \tag{3}$$

Nous allons prouver la ν-mesurabilité du suprémum ponctuel $d_{K, E}$, qui dans le cas d'un ensemble E non dénombrable et d'une mesure μ non séparable n'est pas très facile à vérifier. Un exemple typique de couple compatible E, K est le couple constitué de l'ensemble E des fonctions positives μ-mesurables et d'une fonction $K(s, t)$ λ-mesurable, positive λ-p.p. La condition 2) est manifestement réalisée pour $S_0'' = \varnothing$. D'après le théorème de Fubini, la fonction $K(s, \cdot)$ est μ-mesurable pour ν-presque tous les s et $K(s, t) \geqslant 0$ pour ν-presque tous les s et μ-presque tous les t. La condition 1) est réalisée maintenant de toute évidence. Voyons d'autres exemples.

On remarquera que pour tous les $s \in S \setminus S_0$ on a

$$d_{K, E}(s) = \sup \left\{ \int_T |K(s, t)|\, |x(t)|\, d\mu(t) : x \in E \right\}. \tag{4}$$

---

*) Cette intégrale n'est pas censée être finie, cf. I.6.4.

En effet, il est évident que $d_{K,E}(s)$ est $\leqslant$ à l'expression de droite dans (4). Si $x \in E$, on a $x_s \in E$ et par suite

$$\int_T |K(s,t)||x(t)|\,d\mu(t) = \int_T K(s,t)(\operatorname{sign} K(s,t))|x(t)|\,d\mu(t) =$$
$$= \int_T K(s,t)\,x_s(t)\,d\mu(t) \leqslant d_{K,E}(s),$$

d'où l'on déduit l'inégalité inverse. Ceci prouve (4).

THÉORÈME 2. *Soient un ensemble E et une fonction $K(s,t)$ compatibles. La fonction $d_{K,E}(s)$ est ν-mesurable. De plus, il existe une suite de fonctions $x_n \in E$, telle que*

$$d_{K,E}(s) = \sup_n \int_T K(s,t)|x_n(t)\,d\mu(t) \quad \nu\text{-p.p.}$$

Avant d'entamer la démonstration du théorème 2 notons qu'il n'est pas trivial, premièrement, parce que le suprémum ponctuel $d_{K,E}$ d'un ensemble non dénombrable de fonctions mesurables est généralement mesurable et, deuxièmement, parce qu'il est confondu avec le suprémum de l'ensemble correspondant dans l'espace ordonné $\mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$, puisque le théorème 2 nous dit que $d_{K,E}$ est réalisé sur une famille dénombrable (cf. I.6.10).

DÉMONSTRATION du théorème 2. Puisque l'on peut poser $K(s,t) = 0$ $(t \in T)$ sur l'ensemble S_0, on peut admettre que $\int_T K(s,t)\,x(t)\,d\mu(t)$ existe pour tous les $x \in E$ et $s \in S$. Nous commençons par formuler un lemme qui sera démontré plus bas sous une forme plus générale (cf. lemme 2).

LEMME 1. *Soit H l'ensemble de toutes les fonctions de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s)\,g_i(t),$$

où $B_i \in \Sigma_S(\nu)$ sont deux à deux disjoints, et $g_i \in \mathbf{L}^1(T, \Sigma_T, \mu) \cap \cap \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ $(1 \leqslant i \leqslant i_0)$. Alors l'ensemble H est partout dense dans le B-espace $\mathbf{L}^1(R, \Sigma_R, \lambda)$.

On rappelle que $[x]_n$ représente la troncature de la fonction x (cf. I.6.4). Posons $E_n = \{[x]_n : x \in E\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Chaque ensemble E_n est compatible avec la fonction K. Le théorème de Fatou et la formule (4) donnent pour tout $s \in S$

$$d_{K,E_n}(s) \uparrow d_{K,E}(s). \tag{5}$$

Soit la fonction

$$K_m(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s)\, g_i(t) \in H.$$

Il est clair que la fonction K_m est compatible avec chaque ensemble E_n. Alors, puisque $B_i \cap B_{i'} = \varnothing$ $(i \neq i')$, on a

$$d_{K_m, E_n}(s) = \sum_{i=1}^{i_0} \left[\sup_{x \in E} \int_T g_i(t)\, [x]_n(t)\, d\mu(t)\right] \chi_{B_i}(s), \quad \forall s \in S.$$

Donc, la fonction d_{K_m, E_n} est mesurable et de toute évidence il existe un ensemble $E(n, m) \subset E$ au plus dénombrable tel que pour tout $s \in S$

$$d_{K_m, E_n}(s) = \\ = \sup \left\{ \int_T K_m(s, t)\, [x]_n(t)\, d\mu(t) : x \in E(n, m) \right\}. \tag{6}$$

Supposons que la fonction $K \in \mathbf{L}^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Le lemme 1 affirme l'existence d'une suite de fonctions $K_m \in H$ telle que pour tout m, $\| K_m - K \|_{\mathbf{L}^1} \leqslant 2^{-m}$. Donc la série

$$L(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} | K_m(s, t) - K(s, t) |$$

est convergente dans $\mathbf{L}^1(R, \Sigma_R, \lambda)$, donc λ-p.p. Et par suite

$$| K_m(s, t) - K(s, t) | \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \quad \lambda\text{-p.p.},$$

$$| K_m(s, t) - K(s, t) | \leqslant L(s, t) \quad \lambda\text{-p.p.}$$

Définissons l'ensemble $S_1 \subset S$ comme suit: $s \in S$ est élément de S_1 si et seulement si sont simultanément satisfaites les conditions:

1) $| K_m(s, t) - K(s, t) | \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ μ-p.p.;

2) $| K_m(s, t) - K(s, t) | \leqslant L(s, t)$ μ-p.p., $\forall\, m \in \mathbb{N}$;

3) la fonction $L(s, \cdot)$ est μ-intégrable;

4) $d_{K_m, E_n}(s) < +\infty$ et $d_{K, E_n}(s) < +\infty$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

En utilisant le théorème de Fubini, on prouve aussitôt que chacune des conditions 1) à 4) est réalisée pour ν-presque tous les s. Donc, S_1 est mesurable et $\nu(S \setminus S_1) = 0$.

Quels que soient $s \in S_1$ et $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$| d_{K_m, E_n}(s) - d_{K, E_n}(s) | \leqslant d_{| K_m - K |, E_n}(s). \tag{7}$$

D'après le théorème de Lebesgue du passage à la limite sous le signe somme, pour chaque $s \in S_1$ on obtient

$$d_{K_m - K|, E_n}(s) \leqslant n \int_T | K_m(s, t) - K(s, t) |\, d\mu(t) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0. \tag{8}$$

En vertu de (7) et (8)

$$d_{K_m, E_n}(s) \xrightarrow[m\to\infty]{} d_{K, E_n}(s), \quad \text{pour} \quad s \in S_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

La fonction d_{K, E_n} est ν-mesurable, puisqu'on a démontré que les fonctions d_{K_m, E_n} l'étaient. Posons $E(n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(n, m)$. Pour tout $s \in S_1$ il vient en vertu de (6) et (9)

$$d_{K, E_n}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t)\, [x]_n(t)\, d\mu(t) : x \in E(n), \quad n \in \mathbb{N}. \right. \tag{10}$$

L'ensemble $E(n)$ étant au plus dénombrable, la fonction d_{K, E_n} est ν-mesurable, donc la fonction $d_{K, E}$ en vertu de (5), et de plus d'après (5) et (10) pour tous les $s \in S_1$ on obtient

$$d_{K, E}(s) = \sup \left\{ \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) : x \in E_0 \right\},$$

où $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n)$ est au plus dénombrable. Ceci prouve le théorème, pourvu que la fonction $K(s, t)$ soit λ-intégrable.

Dans le cas général, fixons deux suites $S_n \uparrow S$ et $T_n \uparrow T$, où $S_n \in \Sigma_S(\nu)$, $T_n \in \Sigma_T(\mu)$. Les fonctions $K_n(s, t) = [K]_n(s, t)\, \chi_{S_n \times T_n}(s, t)$ sont λ-intégrables. En utilisant la formule (4) et le théorème de Fatou on trouve que $d_{K_n, E}(s) \uparrow d_{K, E}(s)$ pour ν-presque tous les s. Le théorème ayant été démontré pour les fonctions $K_n(s, t)$, il vaut pour $K(s, t)$, c.q.f.d.

COROLLAIRE. *Si $U : \mathrm{X} \to \mathrm{S}(S, \Sigma_S, \nu)$ est un opérateur intégral* (1), *il existe pour tout $x \in \mathrm{X}_+$ une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $|x_n| = x$ et*

$$|U|(x)(s) = \int_T |K(s, t)|\, x(t)\, d\mu(t) = \sup_n \int_T K(s, t)\, x_n(t)\, d\mu(t)$$

pour ν-presque tous les s (l'ensemble exclu dépend généralement de x).

DÉMONSTRATION. Fixons $x \in \mathrm{X}_+$ et considérons l'ensemble $E = \{\tilde{x} \in \mathrm{X} : |\tilde{x}| = x\}$. Posons

$$S_0 = \left\{ s \in S : \int_T |K(s, t)|\, x(t)\, d\mu(t) = +\infty \right\}.$$

En vertu de IV on a $\nu(S_0) = 0$. Comme

$$\int_T |K(s, t)\, \tilde{x}(t)|\, d\mu(t) = \int_T |K(s, t)|\, x(t)\, d\mu(t),$$

quel que soit $\tilde{x} \in E$

$$\int_T K(s, t)\tilde{x}(t)\, d\mu(t)$$

existe et est fini pour tous les $s \in S \setminus S_0$. Donc, l'ensemble E et la fonction $K(s, t)$ sont compatibles. Reste à appliquer le théorème 2 et la formule (4).

Le théorème 2, dans une forme un peu plus faible, a été établi par Y. Gribanov [1].

1.4. Supposons encore que X est e.f. sur (T, Σ_T, μ) et Y sur (S, Σ_S, ν). Supposons que Y est un e.f. de Banach avec la condition (C). Désignons par X [Y] l'espace de toutes les fonctions $K(s, t)$ λ-mesurables, vérifiant les deux conditions suivantes:

1) pour μ-presque tous les $t \in T$ la fonction $s \to K(s, t)$ appartient à Y;

2) la fonction $w_Y(K)(t) = \| K(\cdot, t) \|_Y$ appartient à X.

Le fait que X [Y] est un espace vectoriel implique l'usage du théorème 2. En effet, la fonction $w_Y(K)$ peut *a priori* être non mesurable (ce sera généralement le cas si la condition (C) n'est pas remplie dans Y). Supposons que $K(s, t)$ est une fonction λ-mesurable vérifiant la condition 1). Vérifions que $w_Y(K)$ est μ-mesurable. La condition (C) étant satisfaite dans Y, le théorème de Nakano-Amémia-Mori (cf. théorème VI.1.6) nous dit que pour μ-presque tous les t

$$\| K(\cdot, t) \|_Y =$$

$$= \sup \left\{ \left| \int_S K(s, t)\, y'(s)\, d\nu(s) \right| : y' \in Y',\ \| y' \| \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \int_S | K(s, t) |\, | y'(s) |\, d\nu(s) : y' \in Y'_+, \| y' \| \leqslant 1 \right\}.$$

L'ensemble $E = \{y' \in Y'_+ : \| y' \| \leqslant 1\}$ et la fonction $| K |$ sont manifestement compatibles. D'après le théorème 2, la fonction $w_Y(K)$ est μ-mesurable et de plus il existe une suite $\{y'_n\} \subset Y'_+$, $\| y'_n \| \leqslant 1$ telle que

$$\| K(\cdot, t) \|_Y = \sup_n \left\{ \int_S | K(s, t) |\, | y'_n(s) |\, d\nu(s) \right\} \quad \mu = \text{p.p.}$$

Il est évident que X [Y] est un sous-espace vectoriel de S (R, Σ_R, λ), donc un e.f. sur (R, Σ_R, λ).

Si X est un e.f. de Banach, nous munissons X [Y] d'une norme par la formule $\| K \| = \| w_Y(K) \|_X$ $(K \in X[Y])$. Cette norme est visiblement monotone, donc X [Y] est e.f.n. On démontre que sous ces conditions X [Y] est complet pour la norme. Nous ne le ferons pas toutefois, car nous n'aurons pas besoin de ce résultat (cf. Boukh-

valov [2], [4], où sont accessibles d'autres propriétés des espaces X [Y]). Les espaces X [Y] sont souvent appelés *espaces de norme mixte*.

Si X est un e.f. de Banach sur (T, Σ_T, μ) avec la condition (C), et Y un e.f. sur (S, Σ_S, ν), alors en procédant comme plus haut et en changeant les rôles de (S, Σ_S, ν) et (T, Σ_T, μ) on définit l'espace Y [X] et la fonction $w_X(K)$.

Les espaces L^{p_1, p_2}, extension de l'espace L^p, constituent un important exemple d'espaces de norme mixte. Soient $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \infty$; $L^{p_1} = L^{p_1}(S, \Sigma_S, \nu)$, $L^{p_2} = L^{p_2}(T, \Sigma_T, \mu)$. L'espace L^{p_1, p_2} se définit comme l'espace $L^{p_2}[L^{p_1}]$ de norme mixte, c'est-à-dire la norme de L^{p_1, p_2} est donnée par

$$\|K\| = \begin{cases} \left(\int\limits_T \left(\int\limits_S |K(s, t)|^{p_1} d\nu(s)\right)^{p_2/p_1} d\mu(t)\right)^{1/p_2}, & 1 \leqslant p_1, p_2 < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t \in T} \left(\int\limits_S |K(s, t)|^{p_1} d\nu(s)\right)^{1/p_1}, & 1 \leqslant p_1 < \infty, \ p_2 = \infty, \\ \left(\int\limits_T (\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{s \in S} |K(s, t)|)^{p_2} d\mu(t)\right)^{1/p_2}, & p_1 = \infty, \ 1 \leqslant p_2 < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}\limits_{(s, t) \in R} |K(s, t)|, & p_1 = p_2 = \infty. \end{cases}$$

Le théorème de Fubini nous permet de vérifier immédiatement que si $p_1 = p_2 = p$, alors $L^{p_1, p_2} = L^{p_1}[L^{p_2}] = L^p(R, \Sigma_R, \lambda)$. Notons que les autres e.f. de Banach ne jouissent pas de cette propriété ; si $X \neq L^p(T, \Sigma_T, \mu)$ et $Y \neq L^p(S, \Sigma_S, \nu)$, les espaces X [Y] et Y [X] sont en général différents.

LEMME 2. *Si* X *et* Y *sont des e.f. de Banach avec la condition* (A), *alors*

1) *dans* X [Y] *est réalisée la condition* (A) ;

2) *dans* X [Y] *est partout dense l'ensemble* H_1 *de toutes les fonctions de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s)\, x_i(t),$$

où les ensembles $B_i \in \Sigma_S(\nu)$ *sont deux à deux disjoints*, $\chi_{B_i} \in Y$, $x_i \in X' \cap L^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ $(1 \leqslant i \leqslant i_0)$.

DÉMONSTRATION. 1) Si $K_n \downarrow 0$ dans X [Y], alors pour μ-presque tous les t on a $K_n(s, t) \downarrow 0$ pour ν-presque tous les s. La condition

(A) étant réalisée dans Y, $w_Y(K_n) \downarrow 0$, et puisque la condition (A) est aussi réalisée dans X il vient $\| K_n \| = \| w_Y(K_n) \|_X \to 0$.

2) La condition (A) étant remplie dans X [Y], l'ensemble de toutes les fonctions $K \in X[Y]$ s'annulant en dehors de tout ensemble $B \times A$, où $B \in \Sigma_S(\nu)$, $A \in \Sigma_T(\mu)$, $\chi_B \in Y$, $\chi_A \in X$. est partout dense dans X [Y]. Donc, sans restreindre la généralité, on peut admettre que $\mu(T), \nu(S) < \infty$ et $L^\infty(T, \Sigma_T, \mu) \subset X$, $L^\infty(S, \Sigma_S, \nu) \subset$ $\subset Y$. D'après le lemme IV.3.3, l'ensemble de toutes les fonctions de la forme

$$\sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \chi_{C_i} \quad (C_i \in \Sigma_R)$$

est dense dans X [Y]. Il est clair maintenant que pour prouver le lemme il suffit d'approximer la fonction arbitraire χ_C, $C \in \Sigma_R$, par des fonctions de H_1. En vertu de I.6.8, il existe une suite d'ensembles $C_n = \bigcup_{k=1}^{k(n)} B_k \times A_k$, où $B_k \in \Sigma_S$, $A_k \in \Sigma_T$, telle que $\chi_{C_n} \to \chi_C$ dans l'espace $L^1(R, \Sigma_R, \lambda)$. Quitte à passer à une suite partielle, on peut admettre que $\chi_{C_n}(s, t) \to \chi_C(s, t)$ λ-p.p. Comme $L^\infty(R, \Sigma_R, \lambda) \subset X[Y]$ et que la condition (A) est remplie dans X [Y], $\chi_{C_n} \to \chi_C$ pour la norme de X [Y]. Donc, l'ensemble de toutes les fonctions de la forme

$$L(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \lambda_i \chi_{B_i'}(s) \chi_{A_i}(t)$$

est dense dans X [Y]. Montrons que $L \in H_1$. Il existe des ensembles deux à deux disjoints $B_j \in \Sigma_S$ $(1 \leqslant j \leqslant j_0)$, tels que chaque ensemble B_j est contenu au moins dans un ensemble $B_1', \ldots, B_{i_0}'$, et chaque ensemble B_i' est la réunion de certains ensembles B_j $(1 \leqslant j \leqslant j_0)$. Considérons l'ensemble des indices $I_j = \{p : B_j \subset B_p', 1 \leqslant p \leqslant i_0\}$. Alors de toute évidence

$$L(s, t) = \sum_{j=1}^{j_0} \chi_{B_j}(s) \Big(\sum_{p \in I_j} \lambda_p \chi_{A_p}(t) \Big) = \sum_{j=1}^{j_0} \chi_{B_j}(s) x_j(t)$$

et de plus

$$x_j = \sum_{p \in I_j} \lambda_p \chi_{A_p} \in X \cap L^\infty(T, \Sigma_T, \mu), \quad 1 \leqslant j \leqslant j_0.$$

Ceci achève la démonstration de ce lemme.

Nous verrons plus bas que les espaces de norme mixte jouent un grand rôle dans la représentation intégrale des opérateurs.

1.5. Soient X un e.f. de Banach sur (T, Σ_T, μ), Y un e.f. de Banach sur (S, Σ_S, ν).

Un opérateur linéaire $U: \mathbf{X} \to \mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$ est un *opérateur de norme abstraite* s'il applique la boule unité $B_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$ dans un ensemble borné pour la relation d'ordre dans $\mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$. Donc, dans l'espace ordonné $\mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)$ il existe l'élément

$$|U| = \sup\{|U(x)|: x \in B_{\mathbf{X}}\}$$

appelé *norme abstraite de l'opérateur* U. Notons $L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ l'ensemble de tous les opérateurs de norme abstraite. On remarquera qu'un opérateur $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$ si et seulement si $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ et $|U| \in \mathbf{L}^\infty$; cela étant $\|U\| = \||U|\|_{\mathbf{L}^\infty}$. Donc, la classe des opérateurs de norme abstraite est une extension de la classe $B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$.

On rappelle que la condition (C) est toujours réalisée dans l'e.f. de Banach $\mathbf{X}'$.

THÉORÈME 3. *Si U est un opérateur intégral* (1), *alors $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ si et seulement si $K \in \mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)[\mathbf{X}']$; ceci étant $|U| = w_{\mathbf{X}'}(K)$.*

DÉMONSTRATION. Si $K \in \mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu)[\mathbf{X}']$, alors pour $x \in \mathbf{X}$

$$|[U(x)](s)| \leqslant \int_T |K(s, t)|\,|x(t)|\,d\mu(t) \leqslant \|K(s, \cdot)\|_{\mathbf{X}'}\,\|x\|_{\mathbf{X}}$$

pour ν-presque tous les s, d'où $|U| \leqslant w_{\mathbf{X}'}(K)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour prouver la réciproque et l'inégalité inverse.

LEMME 3. *Si un opérateur intégral $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$, il en sera de même pour l'opérateur $|U|$ (cf. (2)) et de plus $|U| = ||U||$.*

DÉMONSTRATION. Soit $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$. Le corollaire du théorème 2 affirme l'existence pour tout $x \in \mathbf{X}_+$, $\|x\| \leqslant 1$, d'une suite $\{x_n\}$ telle que $|x_n| = x$ et

$$|U|(x)(s) = \sup_n \left| \int_T K(s, t)\, x_n(t)\, d\mu(t) \right|.$$

Alors

$$|U|(x) = \sup_n |U(x_n)| \leqslant |U|,$$

d'où $|U| \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ et $||U|| \leqslant |U|$. L'inégalité $|U| \leqslant ||U||$ est manifeste.

Revenons à la démonstration du théorème 3. Soit $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$. Prolongeons la norme de l'espace $\mathbf{X}'$ à $\mathbf{S}(T, \Sigma_T, \mu)$ tout entier en posant $\|x\|_{\mathbf{X}'} = \infty$ si $x \notin \mathbf{X}'$. Pour tout $s \in \mathbf{S}$ on a alors

$$\|K(s, \cdot)\|_{\mathbf{X}'} = \\ = \sup\left\{\int_T |K(s, t)|\,x(t)\,d\mu(t) : x \in \mathbf{X}_+,\ \|x\| \leqslant 1\right\}. \qquad (11)$$

Il est clair que $K(s, \cdot) \in X'$ si et seulement si le second membre de (11) est fini. L'ensemble $E = \{x \in X_+ : \|x\| \leqslant 1\}$ et la fonction $|K(s, t)|$ sont évidemment compatibles. D'après le théorème 2, il existe une suite $\{x_n\} \subset X_+$, $\|x_n\| \leqslant 1$, telle que pour ν-presque tous les s on a

$$\|K(s, \cdot)\|_{X'} = \sup_n \int_T |K(s, t)| x_n(t) d\mu(t).$$

Donc, le lemme 3 entraîne pour ν-presque tous les s

$$\|K(s, \cdot)\|_{X'} = \sup_n |U|(x_n)(s) \leqslant \|U\|(s) = |U|(s),$$

d'où $K \in S(S, \Sigma_S, \nu)[X']$ et $w_{X'}(K) \leqslant |U|$, ce qui prouve le théorème.

Le théorème 3 implique qu'un opérateur intégral U est opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $U \in L_A(L^2, S)$ et $|U| \in L^2(S, \Sigma_S, \nu)$.

Passons maintenant à l'étude des opérateurs intégraux de $L^1 = L^1(T, \Sigma_T, \mu)$ dans un e.f. de Banach Y. Nous avons déjà indiqué (cf. VII dans 1.1) qu'un tel opérateur est continu.

LEMME 4. *Si un opérateur intégral $U \in B(L^1, Y)$, où Y est un e.f. de Banach avec les conditions* (B) *et* (C), *alors l'opérateur intégral $|U|$ est aussi un opérateur de L^1 dans Y, c'est-à-dire U est régulier. De plus $\|U\| = \||U|\|$* *).

DÉMONSTRATION. Fixons un élément $x \in L^1$, $x \geqslant 0$, et considérons l'ensemble E_x de tous les éléments de la forme

$$y = |U(x\chi_{A_1})| + \ldots + |U(x\chi_{A_n})|,$$

où $\{A_i\}_{i=1}^n$ est une partition de l'ensemble T. Si y_1 et $y_2 \in E_x$, en considérant une sous-partition des partitions correspondant à y_1 et y_2, on obtient $y \in E_x$ tel que $y \geqslant \sup(y_1, y_2)$. Donc, l'ensemble E_x est filtrant supérieurement. Pour tout $y \in E_x$ on a

$$\|y\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|U(x\chi_{A_i})\| \leqslant \|U\| \sum_{i=1}^n \|x\chi_{A_i}\|_{L^1} = \|U\| \|x\|_{L^1}. \quad (12)$$

Donc, l'ensemble E_x est borné en norme dans Y. Le corollaire du théorème 2 affirme l'existence d'une suite $\{x_n\}$ telle que $|x_n| = x$ et

$$|U|(x)(s) = \sup_n \left| \int_T K(s, t) x_n(t) d\mu(t) \right| \quad \nu\text{-p.p.}$$

*) En fait, tout opérateur continu de L^1 dans Y est régulier au sens de la définition de X.2.1. La démonstration donnée subsiste dans ce cas.

Si

$$A_1^n = \{t : x_n(t) > 0\}, \quad A_2^n = \{t : x_n(t) < 0\}, \quad A_3^n = \{t : x(t) = 0\},$$

alors

$$|U(x_n)| \leqslant |U(x\chi_{A_1^n})| + |U(x\chi_{A_2^n})| + |U(x\chi_{A_3^n})| \in E_x.$$

Posons

$$z_m = \sup_{n=1}^{m} |U(x_n)|.$$

Alors $0 \leqslant z_m \uparrow$ et, comme E_x est filtrant supérieurement, la suite $\{z_m\}$ est bornée en norme dans $\mathbf{Y}$. La condition (B) étant réalisée dans $\mathbf{Y}$, sup z_m existe dans $\mathbf{Y}$. Mais, d'après le choix de $\{x_n\}$, on a $z_m \uparrow |U|(x)$, d'où $|U|(x) \in \mathbf{Y}$. L'élément x étant arbitraire, l'opérateur U est régulier.

La condition (C) étant réalisée dans $\mathbf{Y}$, on a $\| z_m \| \uparrow \| |U|(x) \|$. Comme $\| z_m \| \leqslant \| U \| \, \| x \|_{\mathbf{L}^1}$ $(m \in \mathbb{N})$ en vertu de (12), il vient $\| |U| \| \leqslant \| U \|$. L'inégalité inverse est évidente. Ceci achève la démonstration du lemme.

Posons pour simplifier $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1(T, \Sigma_T, \mu)$, $\mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma_T, \mu)$.

THÉORÈME 4. *Soit* $\mathbf{Y}$ *un e.f. de Banach avec les conditions* (B) *et* (C). *Si* U *est un opérateur intégral* (1), *alors* $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y})$ *si et seulement si* $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$; *de plus*

$$\| U \| = \| K \|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T} \| K(\cdot, t) \|_{\mathbf{Y}}.$$

DÉMONSTRATION. Si $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$, d'après le théorème de Tonelli on a pour tout $x \in \mathbf{L}^1$ et tout $y' \in \mathbf{Y}'$

$$\int_S |[U(x)](s) y'(s)| \, d\nu(s) \leqslant \int_S \left\{ \int_T |K(s, t)| \, |x(t)| \, d\mu(t) \right\} \times$$

$$\times |y'(s)| \, d\nu(s) = \int_T \left\{ \int_S |K(s, t)| \, |y'(s)| \, d\nu(s) \right\} |x(t)| \, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T} \| K(\cdot, t)_{\mathbf{Y}} \| \, \| y' \| \, \| x \|_{\mathbf{L}^1} = \| K \|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]} \| y' \| \, \| x \|_{\mathbf{L}^1}.$$

La condition (C) étant remplie dans $\mathbf{Y}$, le théorème VI.1.6 nous dit que $\| U(x) \| \leqslant \| K \| \, \| x \|$, d'où $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y})$ et $\| U \| \leqslant \| K \|$.

Inversement, supposons que $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y})$. L'opérateur adjoint $U^* \in B(\mathbf{Y}^*, \mathbf{L}^\infty)$. Si V est la restriction de U^* à $\mathbf{Y}_n^\sim$, alors $V \in B(\mathbf{Y}_n^\sim, \mathbf{L}^\infty)$. Les espaces $\mathbf{Y}_n^\sim$ et $\mathbf{Y}'$ étant isomorphes, l'opérateur V peut être regardé comme un opérateur de $\mathbf{Y}'$ dans $\mathbf{L}^\infty$. Dans les

notations de VI.1.1, on a alors pour tous $x \in \mathbf{X}$ et $y' \in \mathbf{Y}'$

$$\int_S U(x)\, y'\, d\nu = f_{y'}(U(x)) = f_x(U^*(f_{y'})) = f_x(V(f_{y'})) = \int_T xV(y')\, d\mu.$$

L'opérateur U étant régulier en vertu du lemme 4, la propriété VIII de 1.1 nous dit que $V: \mathbf{Y}' \to \mathbf{L}^\infty$ est un opérateur intégral de noyau $K^*(t, s) = K(s, t)$, c'est-à-dire pour tout $y' \in \mathbf{Y}'$ on a

$$V(y')(t) = \int_S K^*(t, s)\, y'(s)\, d\nu(s).$$

D'après le théorème 3, on a alors $K^* \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}'']$ et $|V| = w_{\mathbf{Y}''}(K^*)$, mais comme $w_{\mathbf{Y}''}(K^*)(t) = \| K^*(t, \cdot) \|_{\mathbf{Y}''} = \| K(\cdot, t) \|_{\mathbf{Y}''} = w_{\mathbf{Y}''}(K)(t)$, il vient $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}'']$ et $|V| = w_{\mathbf{Y}''}(K)$. D'après le théorème VI.1.7, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}''$ pour un nombre d'éléments et pour la norme. Donc $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]$ et $|V| = w_{\mathbf{Y}}(K)$. Par ailleurs

$$\| U \| = \| U^* \| \geqslant \| V \| = \| |V| \|_{\mathbf{L}^\infty} = \| K \|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}]},$$

d'où $\| U \| = \| K \|$.

1.6. Nous voilà enfin en mesure de prouver le théorème de la représentation intégrale des opérateurs. Pour simplifier posons

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(S, \Sigma_S, \nu), \quad \mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1(S, \Sigma_S, \nu), \quad \mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty(S, \Sigma_S, \nu).$$

THÉORÈME 5. *Soit* $\mathbf{X}$ *un e.f. de Banach sur* (T, Σ_T, μ) *avec la condition* (A). *L'expression générale d'un opérateur* U *de la classe* $L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ *est*

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t), \quad x \in \mathbf{X}, \tag{1}$$

où $K \in \mathbf{S}[\mathbf{X}']$. *De plus* $|U| = w_{\mathbf{X}'}(K)$.

DÉMONSTRATION. Sans perdre en généralité on peut admettre que $|U|(s) > 0$, $\forall s \in S$. Considérons l'opérateur V défini sur $\mathbf{X}$ par

$$V(x)(s) = \frac{1}{|U|(s)} U(x)(s).$$

Comme $U \in L_A(\mathbf{X}, \mathbf{S})$, on a $V \in B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$. Si l'on prouve que

$$V(x)(s) = \int_T K_1(s, t)\, x(t)\, d\mu(t), \quad x \in \mathbf{X},$$

en posant $K(s, t) = K_1(s, t)\, |U|(s)$, on obtient

$$U(x)(s) = |U|(s)\, [V(x)](s) =$$

$$= \int_T K_1(s, t)\, |U|(s)\, x(t)\, d\mu(t) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t).$$

Si donc nous prouvons que tout opérateur $V \in B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$ admet une représentation intégrale, et que nous tenions compte du fait que $|U| = w_{\mathbf{X}'}(K)$ résulte du théorème 3, nous obtenons la proposition du théorème.

Donc, nous pouvons admettre que $U \in B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$. Soit l'ensemble H_2 des fonctions de la forme

$$L(s, t) = \sum_{i=1}^{i_0} \chi_{B_i}(s)\, x_i(t),$$

où les ensembles $B_i \in \Sigma_S(\nu)$ sont deux à deux disjoints et $x_i \in \mathbf{X}$ $(1 \leqslant i \leqslant i_0)$. Il est évident que H_2 est un ensemble linéaire. D'après le lemme 2, H_2 est dense dans $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$. Définissons une fonctionnelle linéaire φ sur H_2 par la formule

$$\varphi(L) = \sum_{i=1}^{i_0} \int_S U(x_i)(s)\, \chi_{B_i}(s)\, d\nu(s).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette définition est correcte. Les ensembles B_i étant deux à deux disjoints, on a

$$|\varphi(L)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \int_{B_i} |U(x_i)|\, d\nu \leqslant \sum_{i=1}^{i_0} \nu(B_i)\, \|U\|\, \|x_i\| = \|U\|\, \|L\|_{\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]}.$$

Il s'ensuit que φ est une fonctionnelle linéaire sur H_2 muni d'une norme induite de $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$. Donc, il existe un prolongement unique continu de φ à l'espace $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ que nous désignerons par la même lettre. La condition (A) étant réalisée dans $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$ d'après le lemme 2, le corollaire 2 du théorème VI.1.4 affirme l'existence d'une fonction λ-mesurable $K(s, t)$ telle que

$$\varphi(L) = \int_R L(s, t)\, K(s, t)\, d\lambda(s, t), \qquad L \in \mathbf{L}^1[\mathbf{X}].$$

En particulier, pour $L(s, t) = \chi_B(s)\, x(t)$, $B \in \Sigma_S(\nu)$, $x \in \mathbf{X}$, on obtient

$$\int_B U(x)\, d\nu = \varphi(L) = \int_R K(s, t)\, \chi_B(s)\, x(t)\, d\lambda(s, t). \tag{13}$$

Comme d'après le théorème VI.1.1 la fonction $|K(s, t)|$ engendre aussi une fonctionnelle linéaire sur $\mathbf{L}^1[\mathbf{X}]$, en transformant le second membre de (13) à l'aide du théorème de Fubini on trouve que

$$\int_B U(x)\, d\nu = \int_B \left\{ \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t) \right\} d\nu(s).$$

La représentation (1) résulte du fait que $B \in \Sigma_S(\nu)$ est arbitraire. Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Soient* X *un e.f. de Banach sur* (T, Σ_T, μ) *vérifiant la condition* (A), $\mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty(S, \Sigma_S, \nu)$. *L'expression générale d'un opérateur* U *de la classe* $B(\mathbf{X}, \mathbf{L}^\infty)$ *est donnée par la formule* (1), *où* $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{X}']$; *de plus* $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup}_{s \in S} \|K(s, \cdot)\|_{\mathbf{X}'}$.

Les caractéristiques abstraites des opérateurs de Hilbert-Schmidt et des opérateurs de Carleman (cf. Korotkov [1]) résultent du théorème 5.

Posons pour simplifier

$$\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1(T, \Sigma_T, \mu), \quad \mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty(T, \Sigma_T, \mu).$$

THÉORÈME 6. *Soit* Y *un e.f. de Banach sur* (S, Σ_S, ν) *avec la condition* (A). *L'expression générale d'un opérateur* $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y}')$ *est*

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t), \quad x \in \mathbf{L}^1, \tag{1}$$

où $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}']$. *De plus* $\|U\| = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} \|K(\cdot, t)\|_{\mathbf{Y}'}$.

DÉMONSTRATION. Les conditions (B) et (C) étant réalisées dans $\mathbf{Y}'$, en vertu du théorème 4 il nous faut seulement prouver que tout opérateur $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{Y}')$ admet la représentation intégrale (1). Considérons l'opérateur adjoint $U^* \in B((\mathbf{Y}')^*, \mathbf{L}^\infty)$. L'espace Y s'immerge canoniquement dans $(\mathbf{Y}')^*$, et cette injection conserve la norme d'après le théorème VI.1.6. Désignons par V la restriction de l'opérateur U^* à Y. Alors $V \in B(\mathbf{Y}, \mathbf{L}^\infty)$ et en vertu du théorème 5 il existe un noyau $K \in \mathbf{L}^\infty[\mathbf{Y}']$ pour lequel

$$V(y)(t) = \int_S K(t, s)\, y(s)\, d\nu(s), \quad y \in \mathbf{Y}.$$

Le lemme 3 nous dit que V est un opérateur régulier, donc en utilisant la propriété VIII de 1.1, l'on déduit sans peine comme dans la démonstration du théorème 4 que U est justiciable de la représentation (1).

On a le cas particulier important suivant.

COROLLAIRE. *Soit* $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(S, \Sigma_S, \nu)$, $1 < p \leqslant \infty$. *L'expression générale d'un opérateur* $U \in B(\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^p)$ *est*

$$U(x)(s) = \int_T K(s, t)\, x(t)\, d\mu(t), \quad x \in \mathbf{L}^1,$$

où $K \in \mathbf{L}^{p,\infty}$. *De plus*

$$\|U\| = \begin{cases} \operatorname{vrai\,sup}_{t \in T} \left(\int_S |K(s, t)|^p\, d\nu(s) \right)^{1/p} & \text{pour } 1 < p < \infty; \\ \operatorname{vrai\,sup}_{(s, t) \in R} |K(s, t)| & \text{pour } p = \infty. \end{cases}$$

REMARQUE. Ce corollaire ne passe pas pour $p = 1$, car l'opérateur identique dans $\mathbf{L}^1(0, 1)$ n'admet pas de représentation intégrale (cf. 1.2).

La représentation intégrale des opérateurs retient depuis longtemps l'attention des mathématiciens. Des cas particuliers importants des théorèmes 5 et 6 ont été établis dans les années 30 (cf. Guelfand [1], Dunford et Pettis [1], Kantorovitch et Voulikh [1], de même que Kantorovitch, Voulikh et Pinsker) *). A la place d'un espace mesuré abstrait on considérait généralement l'intervalle [0, 1] muni de la mesure de Lebesgue et à la place d'un e.f. de Banach un espace adéquat $\mathbf{L}^p$.

Dans leurs formes actuelles, les théorèmes de 1.5 et 1.6 ont été obtenus dans un article de Boukhvalov [4], dont nous nous sommes inspirés dans notre exposé. D'autres théorèmes de représentation intégrale des opérateurs dans des espaces idéaux sont accessibles dans les travaux de Boukhvalov [3], [4], Korotkov [2]. De nombreux travaux sont consacrés à la représentation analytique des opérateurs par des fonctions vectorielles (cf. par exemple Dinculeanu, Diestel, Phillips [1], Grothendieck [2], Korotkov [2], Boukhvalov [5]).

§ 2. Opérateurs dans les espaces de suites

2.1. Décrivons les opérateurs linéaires continus et en particulier les opérateurs linéaires compacts de $\mathbf{l}^p$ dans $\mathbf{l}^r$ ($1 < p < \infty$, $1 \leqslant r < \infty$).

Soit U un opérateur linéaire continu de $\mathbf{l}^p$ dans $\mathbf{l}^r$:

$$y = U(x) \quad (x = \{\xi_k\} \in \mathbf{l}^p, \quad y = \{\eta_i\} \in \mathbf{l}^r).$$

Posons $f_i(x) = \eta_i$ ($i = 1, 2, \ldots$). Comme

$$|f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \|y\| \leqslant \|U\| \, \|x\|,$$

il est clair que f_i est une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $\mathbf{l}^p$. De plus $\|f_i\| \leqslant \|U\|$. D'après le théorème de la forme générale des fonctionnelles dans l'espace $\mathbf{l}^p$, la fonctionnelle f_i peut s'écrire

$$\eta_i = f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$$

$$\left(z_i = \{a_{ik}\} \in \mathbf{l}^q; \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \ \|z_i\| = \|f_i\|; \ i = 1, 2, \ldots\right). \qquad (1)$$

*) Le théorème 5 est souvent appelé théorème de Kantorovitch-Voulikh et le théorème 6, de Dunford-Pettis.

Donc l'opérateur U définit de façon naturelle la matrice

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_{ik}=f_i(x_k) \quad (x_k=\underset{1}{0}, \dots, \underset{k-1}{0}, \underset{k}{1}, \underset{k+1}{0}, \dots; \quad i, k=1, 2, \dots).$$

Soient $x=\{\xi_k\}\in l^p$, $y=\{\eta_k\}\in l^r$. On rappelle que
$[x]_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots)$, $[y]_n = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots)$.
Considérons encore les opérateurs U_n et U_{nm}:

$$U_n(x) = [U(x)]_n, \quad U_{nm}(x) = U_n([x]_m) \quad (x \in l^p).$$

Posons encore

$$[a_{ik}]_n=\begin{cases} a_{ik} & (i\leqslant n), \\ 0 & (i>n), \end{cases} \quad [a_{ik}]_{mn}=\begin{cases} a_{ik} & (i\leqslant n,\ k\leqslant m), \\ 0 & (i>n \text{ ou } k>m) \end{cases}$$

et introduisons les matrices

$$[A]_n = \begin{pmatrix} [a_{11}]_n & [a_{12}]_n & \dots & [a_{1k}]_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{i1}]_n & [a_{i2}]_n & \dots & [a_{ik}]_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

$$[A]_{nm} = \begin{pmatrix} [a_{11}]_{nm} & [a_{12}]_{nm} & \dots & [a_{1k}]_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [a_{i1}]_{nm} & [a_{i2}]_{nm} & \dots & [a_{ik}]_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Il est immédiat de vérifier que ces matrices correspondent précisément aux opérateurs U_n et U_{nm}. En effet, en conservant les notations précédentes de x et $y = U(x)$ et en supposant de plus que $U_n(x) =$

$= \{[\eta_k]_n\}$, $U_{nm}(x) = \{[\eta_k]_{nm}\}$, on obtient

$$[\eta_i]_n = \begin{cases} \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k & (i \leqslant n), \\ 0 & (i > n), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[\eta_i]_n = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_n \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

D'où

$$[\eta_i]_{nm} = \sum_{k=1}^{m} [a_{ik}]_n \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ik}]_{nm} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Prouvons que les suites d'opérateurs $\{U_n\}$ et $\{U_{nm}\}$ convergent vers U sur chaque élément de l^p.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} [y]_n = y$,

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = \lim_{n\to\infty} [U(x)]_n = U(x) \quad (x \in l^p).$$

Notons qu'en vertu de l'inégalité évidente $\| [y]_n \| \leqslant \| y \|$, on a $\| U_n(x) \| \leqslant \| U(x) \| \leqslant \| U \| \, \| x \|$, c'est-à-dire

$$\| U_n \| \leqslant \| U \|. \tag{3}$$

Choisissons N et M tels que

$$\| [x]_m - x \| < \varepsilon, \quad \| U_n(x) - U(x) \| < \varepsilon \text{ pour } m \geqslant M, \quad n \geqslant N.$$

Si $m \geqslant M$ et $n \geqslant N$, alors

$$\| U(x) - U_{nm}(x) \| \leqslant \| U(x) - U_n(x) \| + \| U_n(x) - \\ - U_n([x]_m) \| < \varepsilon + \| U_n \| \, \| x - [x]_m \| \leqslant \varepsilon + \| U \| \, \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n,\, m\to\infty} U_{nm}(x) = U(x) \quad (x \in l^p).$$

Si U est un opérateur compact, la convergence $U_n \to U$ et $U_{nm} \to U$ est en norme dans l'espace des opérateurs linéaires.

THÉORÈME 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur U soit compact est que $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} U$ ou $U_{nm} \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} U$, c'est-à-dire doit être satisfaite l'une des deux relations*

$$\lim_{n\to\infty} \| U_n - U \| = 0 \text{ ou } \lim_{n,\, m\to\infty} \| U_{nm} - U \| = 0. \tag{4}$$

DÉMONSTRATION. La *condition* est *suffisante*. Les opérateurs U_n et U_{nm} sont compacts, car ils appliquent l^p dans un espace de dimension n finie. Donc, d'après le théorème IX.2.3 l'opérateur $U = \lim U_n = \lim U_{nm}$ sera aussi compact.

La *condition* est *nécessaire*. Désignons par Γ l'ensemble de valeurs de $U(x)$ pour $\|x\| \leqslant 1$. Comme U est compact, Γ est relativement compact. Considérons maintenant les opérateurs V_n :

$$V_n(y) = [y]_n \quad (y \in l^r;\ n = 1, 2, \ldots).$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} V_n(y) = y \quad (y \in l^r). \tag{5}$$

Donc, d'après le théorème de Guelfand (théorème IX.1.3), la convergence (5) est uniforme sur l'ensemble relativement compact Γ, autrement dit pour tous les $y \in \Gamma$ et les n assez grands ($n \geqslant N$)

$$\|[y]_n - y\| < \varepsilon$$

ou, ce qui revient au même

$$\|U_n(x) - U(x)\| < \varepsilon \quad (\|x\| \leqslant 1,\ n \geqslant N).$$

Or cela signifie que

$$\|U_n - U\| < \varepsilon \quad (n \geqslant N). \tag{6}$$

Nous avons donc prouvé la première des relations (4).

Pour établir la seconde nous partons de

$$U_N(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x), 0, \ldots).$$

Si l'on pose

$$f_{im}(x) = f_i([x]_m) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k \quad (x = \{\xi_k\} \in l^p),$$

pour les m ($m \geqslant M$) assez grands on aura

$$\|f_i - f_{im}\| = \Big\{\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_{ik}|^q\Big\}^{1/q} < \frac{\varepsilon}{N} \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Dans ce cas

$$\|U_N(x) - U_{Nm}(x)\| =$$
$$= \|(f_1(x) - f_{1m}(x), f_2(x) - f_{2m}(x), \ldots, f_N(x) - f_{Nm}(x), 0, \ldots)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{N}\|x\|\,\|(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots)\| = \frac{\varepsilon}{N}\|x\| N^{1/r} \leqslant \varepsilon\|x\|.$$

Enfin, ceci et l'inégalité $\| U_n - U_N \| \leqslant 2\varepsilon$ $(n \geqslant N)$, qui découle de (6), entraînent

$$\| U_n(x) - U_{nm}(x) \| = \| U_n(x) - U_n([x]_m) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U_n(x) - U_N(x) \| + \| U_n([x]_m) - U_N([x]_m) \| +$$
$$+ \| U_N(x) - U_N([x]_m) \| \leqslant 2\varepsilon \| x \| + 2\varepsilon \| [x]_m \| + \varepsilon \| x \| \leqslant$$
$$\leqslant 5\varepsilon \| x \|.$$

Comme, d'autre part $\| U_n - U \| \leqslant \varepsilon$, on obtient

$$\| U_{nm} - U \| \leqslant 6\varepsilon \quad (n \geqslant N,\ m \geqslant M),$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque. On peut énoncer ce théorème sous une autre forme. Tout d'abord on peut se borner à l'opérateur U_{nn} et remplacer la convergence vers U par une convergence en soi. Cela étant, pour qu'un opérateur U soit compact, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\| U_{nn} - U_{pp} \| < \varepsilon \quad (n,\ p \geqslant N_\varepsilon).$$

Notons maintenant que

$$\| U_{nn} \| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|x'\| \leqslant 1}} \Big| \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi'_k \Big|$$
$$\left(x = \{\xi_k\} \in \mathbf{l}^p,\ x' = \{\xi'_k\} \in \mathbf{l}^s,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \right). \tag{7}$$

En effet, soit $\mathbf{X}$ un B-espace. Désignons par F_x la fonctionnelle définie dans $\mathbf{X}^*$ par $x \in \mathbf{X}$ (cf. V.7.3). Alors

$$\| x \| = \| F_x \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | F_x(f) | = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | f(x) | \quad (f \in \mathbf{X}^*).$$

Si U est un opérateur de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{Y}$, alors

$$\| U \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} | U(x) | = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|g\| \leqslant 1} | g(U(x)) | \quad (x \in \mathbf{X},\ g \in \mathbf{Y}^*). \tag{8}$$

Si l'on remplace $\mathbf{X}$ par $\mathbf{l}^p$, $\mathbf{Y}$ par $\mathbf{l}^r$ et U par U_{nn}, on aura

$$g(U(x)) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi'_k \quad (x = \{\xi_k\} \in \mathbf{l}^p), \tag{9}$$

où la suite $x' = \{\xi'_k\} \in \mathbf{l}^s$ définit la fonctionnelle g $(\| g \| = \| x' \|)$. En groupant (8) et (9), on obtient (7).

En appliquant la formule (7) à la différence $U_{nn} - U_{pp}$ (on admet que $n \geqslant p$), on peut mettre la condition précédente sous la forme

$$\Big| \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \xi'_k - \sum_{i,\,k=1}^{p} a_{ik} \xi_i \xi'_k \Big| < \varepsilon \quad (p \geqslant N)$$

pour $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k|^s \leqslant 1$. Autrement dit on peut énoncer le théorème comme suit:

Pour qu'un opérateur U soit compact, il est nécessaire et suffisant que la suite de formes bilinéaires correspondant aux matrices « tronquées » $[A]_{nn}$ soit une suite de Cauchy sur les boules unités des espaces l^p et l^s.

Cette proposition a en fait été établie déjà par Hilbert.

2.2. Plus haut, nous sommes partis d'un opérateur linéaire U et nous avons défini la matrice (2) correspondante. Il serait intéressant d'établir sous quelles conditions une matrice donnée (2) est associée à un opérateur continu ou compact.

Grâce aux matrices « tronquées » on peut former les opérateurs U_{nm} en posant

$$y = U_{nm}(x) \quad (x = \{\xi_k\} \in l^p, \quad y = \{\eta_k\} \in l^r),$$

$$\eta_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k & (i \leqslant n), \\ 0 & (i > n). \end{cases}$$

THÉORÈME 2. *Pour que la matrice* (2) *soit matrice d'un opérateur linéaire continu U de l^p dans l^r, il est nécessaire et suffisant que les opérateurs U_{nn} (ou U_{nm}) définis à l'aide de cette matrice soient bornés en norme*:

$$\| U_{nn} \| \leqslant K \ (n = 1, 2, \ldots) \ [ou \ \| U_{nm} \| \leqslant K \ (n, m = 1, 2, \ldots)] \tag{10}$$

Pour que l'opérateur U soit compact il est nécessaire et suffisant que la suite d'opérateurs U_{nn} soit une suite de Cauchy:

$$\lim_{n,\, p \to \infty} \| U_{nn} - U_{pp} \| = 0 \ ^{*)}. \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. Les *conditions* sont *nécessaires*. Si l'opérateur U existe, nous avons montré que $U_{nn} \to U$ sur l^p. Les espaces l^p et l^r étant complets, les normes des opérateurs U_{nn} sont bornées dans leur ensemble (théorème de Banach-Steinhaus; VII.1.2).

Si l'opérateur est compact, le théorème 1 nous dit que $\lim_{n \to \infty} U_{nn} = U$, d'où l'on déduit immédiatement (11).

Les *conditions* sont *suffisantes*. Etudions d'abord le comportement des opérateurs U_{nn} sur les éléments tronqués. Soit donné un élé-

*) Ce théorème a été prouvé par Hilbert (cf. Hilbert) pour l'espace l^2.

ment $x \in l^p$ tel que $[x]_m = x$. En supposant que $n > m$, on a

$$U_{nn}(x) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, \ldots)$$

$$\left(\eta_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, 0, \ldots); \quad i = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Ceci étant, en vertu de (10)

$$\| U_{nn}(x) \| = \left[\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^r\right]^{1/r} \leqslant K \| x \|.$$

Donc $\{\eta_i\} \in l^r$ et par suite il existe

$$y = \lim_{n\to\infty} U_{nn}(x) = \{\eta_i\}.$$

La suite $\{U_{nn}\}$ est convergente dans l'ensemble, dense dans l^p, des éléments tronqués, donc dans l^p tout entier, puisque la suite des normes de ces opérateurs est bornée. Supposons que

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U_{nn}(x) \quad (x \in l^p).$$

Comme pour tout $x \in l^p$

$$U([x]_m) = \lim_{n\to\infty} U_{nn}([x]_m) = (\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \ldots, \eta_i^{(m)}, \ldots),$$

$$\eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k \quad (x = \{\xi_k\}; \quad i = 1, 2, \ldots),$$

pour $m \to \infty$ on obtient

$$U(x) = \lim_{m\to\infty} U([x]_m) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots),$$

où

$$\eta_i = \lim_{m\to\infty} \eta_i^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire l'opérateur U est associé à la matrice (2).

Si (11) est réalisée, alors de toute évidence

$$U = \lim_{n\to\infty} U_{nn}$$

et comme les opérateurs U_{nn} sont compacts, l'opérateur U le sera aussi. C.q.f.d.

Voici quelques corollaires.

COROLLAIRE 1. *Si A est une matrice symétrique, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il lui soit associé un opérateur linéaire continu de l^2 dans l^2 est que*

$$\sup_n |\lambda_1^{(n)}| < \infty, \tag{12}$$

où $\lambda_1^{(n)}$ *est la valeur propre de plus grand module de la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En effet, l'opérateur U_{nn} est en fait un opérateur dans un espace de dimension n formé avec les éléments dont toutes les coordonnées sont nulles à partir de la $(n+1)$-ième. Par suite,

$$\| U_{nn} \| = | \lambda_1^{(n)} |.$$

Donc (12) exprime que $\sup\limits_n \| U_{nn} \| < \infty$, ce qui est confondu avec (10).

Corollaire 2. *Si la matrice* (2) *vérifie la condition*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \right]^{r/q} \right\}^{1/r} < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \tag{13}$$

l'opérateur U *qui lui est associé est compact et*

$$\| U \| \leqslant B.$$

En effet, majorons la norme de l'opérateur U_{nn}. On obtient

$$\| U_{nn}(x) \|^r = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \xi_k \right|^r \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |^q \right]^{r/q} \left[\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^p \right]^{r/p} \leqslant B^r \| x \|^r.$$

Donc $\| U_{nn} \| \leqslant B$, c'est-à-dire on a (10). Par suite, à la matrice A est associé un opérateur linéaire U, et de plus $\| U \| \leqslant B$.

Appliquons la majoration établie pour la norme de U à la différence $U - U_n$, où U_n est l'opérateur défini dans 2.1 :

$$\| U - U_n \| \leqslant \left\{ \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \right]^{r/q} \right\}^{1/r},$$

d'où il est clair que $\lim\limits_{n \to \infty} \| U - U_n \| = 0$, et par suite U est compact.

Remarque 1. Si $p = r = 2$, la condition (13) devient

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

REMARQUE 2. Si $p = 1$, la condition (13) doit être remplacée par

$$B = \{ \sum_{i=1}^{\infty} \sup_k |a_{ik}|^r \}^{1/r} < \infty. \tag{14}$$

La démonstration est analogue.

§ 3. Opérateurs intégraux dans les espaces fonctionnels

Dans ce paragraphe on indique les conditions sous lesquelles un opérateur intégral U

$$y = U(x), \; y(s) = \int_D K(s, t)\, x(t)\, dt \quad (s \in D') \tag{1}$$

est un opérateur continu (ou compact) d'un espace fonctionnel $\mathbf{X}$ dans un espace fonctionnel $\mathbf{Y}$. La majeure partie des résultats se rapportent au cas $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(D)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^q(D')$ $(1 \leqslant p, \; q \leqslant \infty)$, où D et D' sont des domaines bornés d'espaces euclidiens respectivement de dimension μ et ν *). Sans perdre en généralité on admettra dans la suite que mes $D = 1$.

La fonction $K(s, t)$, noyau de l'opérateur U, sera toujours supposée mesurable dans le domaine $D' \times D$ d'un espace de dimension $\mu + \nu$, donc elle sera mesurable par rapport à t pour presque tous les $s \in D'$ et par rapport à s pour presque tous les $t \in D$.

Les faits établis dans ce paragraphe trouvent une importante application au § 4 dans l'exposé des théorèmes d'immersion de S. Sobolev, théorèmes qui occupent une place importante en théorie des équations différentielles de physique mathématique.

La plupart des résultats de ce paragraphe sont une généralisation des théorèmes de Sobolev des intégrales de type potentiel. Ici et au § 4, l'exposé suit un article de Kantorovitch [11].

3.1. THÉORÈME 1. *Soient réalisées les conditions suivantes*:

1) $$\left[\int_D |K(s, t)|^r dt \right]^{1/r} \leqslant C_1 \quad (r > 0) \tag{2}$$

pour presque tous les $s \in D'$;

2) $$\left[\int_{D'} |K(s, t)|^\sigma ds \right]^{1/\sigma} \leqslant C_2 \quad (\sigma > 0) \tag{3}$$

*) En raison du grand nombre d'indices, dans les §§ 3, 4, nous désignons un espace de dimension finie, par $\mathbf{R}^\mu$ ou $\mathbf{R}^\nu$ et non par $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$ comme nous l'avons fait tout au long de cet ouvrage.

pour presque tous les $t \in D'$;

3) $$q \geqslant p, \quad q \geqslant \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' \leqslant r \text{ *)} \quad (p, q \geqslant 1). \tag{4}$$

Alors l'opérateur intégral (1) *est un opérateur linéaire continu de* $\mathbf{L}^p(D)$ *dans* $\mathbf{L}^q(D')$, *et de plus* **)

$$\| U \| \leqslant C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q}. \tag{5}$$

Démonstration. Transformons la majoration évidente pour $| y(s) |$:

$$| y(s) | \leqslant \int_D | K(s, t) | | x(t) | \, dt =$$

$$= \int_D [| K(s, t) |^\sigma | x(t) |^p]^{1/q} | x(t) |^{p(1/p - 1/q)} | K(s, t) |^{1-\sigma/q} \, dt.$$

En appliquant à la dernière intégrale l'inégalité généralisée de Hölder (IV.2.4) avec les exposants

$$\lambda_1 = q, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad \lambda_3 = p' = \frac{p}{p-1} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 1 \right) \text{ ***)},$$

on obtient

$$| y(s) | \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_D | K(s, t) |^\sigma | x(t) |^p \, dt \right]^{1/q} \left[\int_D | x(t) |^p \, dt \right]^{1/p - 1/q} \times$$

$$\times \left[\int_D | K(s, t) |^{p'(1-\sigma/q)} \, dt \right]^{1-1/p}. \tag{6}$$

En posant

$$\lambda = p' \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right),$$

on obtient, en vertu de (2), et compte tenu de ce que mes $D = 1$ et que $\lambda \leqslant r$ d'après (4),

$$\left[\int_D | K(s, t) |^\lambda \, dt \right]^{1-1/p} = \left[\int_D | K(s, t) |^\lambda \, dt \right]^{\frac{1}{\lambda}(1-\sigma/q)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_D | K(s, t) |^r \, dt \right]^{\frac{1}{r}(1-\sigma/q)} \leqslant C_1^{1-\sigma/q}.$$

*) Ici et dans la suite, le symbole *prime* désigne l'indice « conjugué » qui se déduit à partir de $1/p + 1/p' = 1$.

**) Ce théorème a été généralisé par Smolitski [1].

***) Nous supposons que $q > p > 1$. Le cas $q = p$ est laissé au soin du lecteur. Le cas $p = 1$ est traité dans la remarque 3.

En utilisant ceci dans (6), on a pour $|y(s)|$

$$|y(s)| \leqslant \Big[\int_D |K(s,t)|^\sigma |x(t)|^p\,dt\Big]^{1/q} \|x\|^{1-p/q} C_1^{1-\sigma/q}. \tag{7}$$

En majorant $\|y\|$ au moyen de cette inégalité, on trouve

$$\|y\| = \Big[\int_{D'} |y(s)|^q\,ds\Big]^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\int_{D'}\int_D |K(s,t)|^\sigma |x(t)|^p\,dt\,ds\Big\}^{1/q} \|x\|^{1-p/q} C_1^{1-\sigma/q} =$$

$$= C_1^{1-\sigma/q}\Big\{\int_D |x(t)|^p \Big(\int_D |K(s,t)|^\sigma\,ds\Big)\,dt\Big\}^{1/q} \|x\|^{1-p/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q} \|x\|,$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque 1. La conclusion essentielle de ce théorème, savoir que (1) est un opérateur continu de $\mathbf{L}^p$ dans $\mathbf{L}^q$, subsiste même si $q \geqslant \sigma$ dans la condition 3). En effet, si $q < \sigma$, les inégalités (4) restent vraies si l'on remplace q par $q_1 = \sigma$. Donc, U est un opérateur linéaire de $\mathbf{L}^p$ dans $\mathbf{L}^{q_1}$ et *a fortiori* dans $\mathbf{L}^q$ (puisque $q < q_1$).

Si la condition $q \geqslant p$ n'est pas remplie, l'opérateur U est continu de $\mathbf{L}^p$ dans $\mathbf{L}^q$ si seulement

$$p'\left(1 - \frac{\sigma}{p}\right) \leqslant r, \tag{8}$$

inégalité qui se déduit à partir de (4) en remplaçant q par $q_1 = p$.

Remarquons que (8) a lieu pour $\sigma \geqslant 1$, $r \geqslant 1$.

Remarque 2. La restriction mes $D = 1$ n'est visiblement pas essentielle. On peut toujours s'arranger pour que mes $D = 1$ moyennant une similitude sur le domaine D. Cela étant, il peut apparaître dans certaines majorations un facteur A dépendant uniquement de mes D et des exposants.

Remarque 3. Signalons le cas limite du théorème, correspondant à $p = 1$, c'est-à-dire il est question d'un opérateur de $\mathbf{L}^1(D)$ dans $\mathbf{L}^q(D')$. Dans ce cas, les hypothèses du théorème se simplifient. Plus exactement, pour qu'un opérateur U soit continu de $\mathbf{L}^1(D)$ dans $\mathbf{L}^q(D')$ il suffit que soit réalisée la condition

$$\Big[\int_{D'} |K(s,t)|^q\,ds\Big]^{1/q} \leqslant C_2 \tag{3'}$$

pour presque tous les $t \in D$; et de plus

$$\| U \| \leqslant C_2.$$

Donc, les conditions 1) et 3) sont écartées et la condition 2) doit être remplie pour $\sigma = q$.

La démonstration du théorème est plus simple dans ce cas aussi, car le dernier facteur est éliminé dans (6), et il suffit d'utiliser l'inégalité ordinaire de Hölder.

Remarque 4. Signalons aussi le cas particulier important où $q = \infty$. Le théorème s'énonce alors : l'opérateur intégral (1) applique $\mathbf{L}^p(D)$ dans $\mathbf{L}^\infty(D')$ si est remplie la condition (2) pour un $r \geqslant p'$. La norme de l'opérateur U est majorée par

$$\| U \| \leqslant C_1.$$

La démonstration s'effectue par une application directe de l'inégalité de Hölder à (1).

Remarque 5. Le théorème reste en vigueur dans le cas où le second membre de l'inégalité (2) dépend de s, plus exactement si les inégalités (2) et (3) sont remplacées par les suivantes :

$$\Big[\int_D |K(s, t)|^r \, dt\Big]^{1/r} \leqslant C_1 \Psi(s), \tag{2a}$$

$$\Big\{\int_{D'} [|K(s, t)| (\Psi(s))^{q/\sigma - 1}]^\sigma \, ds\Big\}^{1/\sigma} \leqslant C_2. \tag{3a}$$

En particulier, l'inégalité (5) subsiste.

3.2. Passons à la description des opérateurs compacts. Nous commençons par prouver un théorème simple.

Théorème 2. *L'opérateur intégral* (1) *est un opérateur compact de* $\mathbf{L}^p(D)$ *dans* $\mathbf{L}^q(D')$ *si son noyau est de puissance* r'*-ième sommable dans le domaine* $D \times D'$, *où* $r' = \min(p, q')$, *c'est-à-dire si*

$$\Big[\int_{D'} \int_D |K(s, t)|^{r'} \, dt \, ds\Big]^{1/r'} \leqslant C < \infty. \tag{9}$$

De plus

$$\| U \| \leqslant AC, \tag{10}$$

où l'on peut prendre

$$A = [\operatorname{mes} D']^{\frac{1}{q\left(\frac{r'}{q}\right)'}}.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par prouver que la norme de l'opérateur U admet la majoration indiquée. L'inégalité de Hölder donne

$$|y(s) \leqslant \Big[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt\Big]^{1/r'} \Big[\int_D |x(t)|^r dt\Big]^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt\Big]^{1/r'} \Big[\int_D |x(t)|^p dt\Big]^{1/p} =$$

$$= \|x\| \Big[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt\Big]^{1/r'},$$

d'où

$$\|y\| = \Big[\int_{D'} |y(s)|^q ds\Big]^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \|x\| \Big\{\int_{D'} \Big[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt\Big]^{q/r'} ds\Big\}^{1/q}.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{r'}{q}$ et $\left(\frac{r'}{q}\right)'$ à l'intégrale extérieure. Comme $r \leqslant q'$, donc $r' \geqslant q$, on obtient

$$\|y\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x\| \Big\{\int_{D'} \Big[\int_D |K(s, t)|^{r'} dt\Big] ds\Big\}^{1/r'} \Big\{\int_{D'} 1^{\left(\frac{r'}{q}\right)'} ds\Big\}^{\left(q\left(\frac{r'}{q}\right)'\right)^{-1}} \leqslant AC\|x\|,$$

d'où résulte (10).

Le noyau K étant un élément de l'espace $\mathbf{L}^{r'}(D' \times D)$, il existe une suite de noyaux continus K_n, telle que

$$\Big[\int_{D'} \int_D |K(s, t) - K_n(s, t)|^{r'} dt\, ds\Big]^{1/r'} \leqslant \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

où $\varepsilon_n \to 0$. En désignant par U_n l'opérateur intégral de noyau $K_n(s, t)$, on obtient que U_n est compact (cf. IX.2.1) et en vertu de (10) et (11)

$$\|U_n - U\| \leqslant A\varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire la suite $\{U_n\}$ converge vers U. Donc, l'opérateur U est compact (théorème IX.2.3).

REMARQUE. Si le noyau $K(s, t)$ est tel que

$$B = \Big\{\int_{D'} \Big[\int_D |K(s, t)|^{p'} dt\Big]^{q/p'} ds\Big\}^{1/q} < \infty, \tag{12}$$

l'opérateur U est un opérateur compact de $L^p(D)$ dans $L^q(D')$ et de plus $\| U \| \leqslant B$.

La démonstration est analogue à celle du théorème.

THÉORÈME 3. *Si l'on se place dans les hypothèses* 1) *et* 2) *du théorème* 1 *et que la condition* 3) *soit remplie dans sa forme stricte*

$$q \geqslant p, \quad q > \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < r, \tag{13}$$

alors l'opérateur intégral (1) *est un opérateur compact de* $L^p(D)$ *dans* $L^q(D')$.

DÉMONSTRATION. Choisissons $\rho < r$ tel que l'on ait (4)

$$\left(1 - \frac{\sigma}{q}\right) p' < \rho,$$

et considérons les noyaux $K_n(s, t)$

$$K_n(s, t) = \begin{cases} -n & (-n > K(s, t)), \\ K(s, t) & (-n \leqslant K(s, t) \leqslant n), \\ n & (K(s, t) > n). \end{cases}$$

Majorons la quantité

$$C_1^{(n)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_D | K(s, t) - K_n(s, t) |^\rho \, dt \right\}^{1/\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} | K(s, t) |^\rho \, dt \right\}^{1/\rho},$$

où $A_n(s)$ représente l'ensemble de tous les points de D tels que $| K(s, t) | > n$. Si $t \in A_n(s)$, alors du fait que $| K(s, t) | > n$ l'on a

$$| K(s, t) |^\rho \leqslant \frac{1}{n^{r-\rho}} | K(s, t) |^r,$$

et par suite

$$C_1^{(n)} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \left\{ \int_{A_n(s)} \frac{1}{n^{r-\rho}} | K(s, t) |^r \, dt \right\}^{\frac{1}{r} \cdot \frac{r}{\rho}} \leqslant n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}.$$

On désigne toujours par U_n l'opérateur de noyau $K_n(s, t)$. En appliquant la majoration (5) du théorème 1 à l'opérateur $U - U_n$ (en remplaçant C_1 par $C_1^{(n)} \leqslant n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho}$), on obtient

$$\| U - U_n \| \leqslant (n^{1-r/\rho} C_1^{r/\rho})^{1-\sigma/q} C_2^{\sigma/q},$$

d'où $\lim\limits_{n \to \infty} \| U - U_n \| = 0$.

Le noyau de l'opérateur U_n étant borné, il est de puissance quelconque sommable, donc U_n est compact d'après le théorème 2.

Etant limite d'une suite d'opérateurs compacts, l'opérateur U est compact (théorème IX.2.3).

REMARQUE 1. Le théorème reste en vigueur même si l'égalité est réalisée dans la troisième des conditions (13) mais existe une fonction croissante $\Phi(\lambda)$ $(\lambda \geqslant 0)$ telle que le rapport $\Phi(\lambda)/\lambda$ tende vers l'infini avec λ; de plus est réalisée l'inégalité forte (2)

$$\left\{\int_D [\Phi(|K(s, t)|)]^r \, dt\right\}^{1/r} \leqslant C_1.$$

REMARQUE 2. Les théorèmes 1, 2 et 3 sont valables dans le cas où D et D' sont des espaces quelconques de mesures finies (des modifications insignifiantes sont apportées aux démonstrations). On peut même les généraliser à de plus larges classes d'espaces idéaux.

3.3. Introduisons l'espace Lip β de toutes les fonctions définies dans un domaine D' et vérifiant sur D' une condition de Lipchitz dans le rapport β $(0 < \beta \leqslant 1)$; $y \in \text{Lip}\,\beta$ exprime donc l'existence d'une constante B telle que

$$|y(s + \Delta s) - y(s)| \leqslant B\,|\Delta s|^{\beta} \quad ([s, s + \Delta s] \subset D'),$$

où $|\Delta s|$ désigne la longueur du vecteur Δs dans un espace de dimension ν. Il est évident que toute fonction $y \in \text{Lip}\,\beta$ est prolongeable en continuité de façon unique à l'adhérence $\overline{D}'$. En effet, si $s_n \to s$, $s_n \in D'$, $s \in \overline{D}'$, alors

$$|y(s_n) - y(s_m)| \leqslant B\,|s_n - s_m|^{\beta} \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0.$$

Donc, $\{y(s_n)\}$ est une suite de Cauchy, ce qui entraîne l'existence de $y(s) = \lim y(s_n)$. En se servant encore de la condition de Lipchitz, on vérifie que $y(s)$ ne dépend pas du choix de $s_n \to s$. Comme la fonction prolongée y vérifie manifestement la condition de Lipchitz sur $\overline{D}'$ dans le même rapport β, elle est continue sur le compact $\overline{D}'$. On a donc défini l'injection naturelle de Lip β dans $C(D')$ (cf. IV.4.4.). Dans Lip β la norme est définie par

$$\|y\| = \sup_{[s,\, s+\Delta s] \subset D'} \frac{|y(s+\Delta s) - y(s)|}{|\Delta s|^{\beta}} + \sup_{s \in D'} |y(s)| = C_{\beta}(y) + \|y\|_C.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que Lip β devient ainsi un B-espace.

Etudions plus en détail l'opérateur intégral (1) dans le cas où les ensembles D et D' sont contenus dans le même espace et tous les points singuliers du noyau $K(s, t)$ sont concentrés sur la « diagonale » de l'ensemble $D' \times D$, c'est-à-dire pour $s = t$. Pour $s \neq t$ on admettra que le noyau est dérivable par rapport aux coordonnées du point s. Dans la suite on désignera par $|s - t|$ la distance entre les points s et t, autrement dit la longueur du vecteur $s - t$.

Dans le cas considéré on a le

THÉORÈME 4. *Soit $K(s, t)$ un noyau tel que*

1) $$\left\{\int_D [|\operatorname{grad}_s K(s, t)| \cdot |s - t|^{1-\beta}]^r \, dt\right\}^{1/r} \leqslant E, \tag{14}$$

où grad_s *est le gradient calculé par rapport à* s;

2) $$\left\{\int_D \left[\frac{|K(s, t)|}{|s - t|^{\beta}}\right]^r dt\right\}^{1/r} \leqslant F. \tag{15}$$

Alors l'opérateur intégral (1) *applique l'espace* $L^{r'}(D)$ (*et tout espace* $L^p(D)$ *pour* $p \geqslant r'$) *dans l'espace* Lip β *et de plus*

$$C_\beta(y) \leqslant [E + (2^\beta + 3^\beta) F] \, \| x \|. \tag{16}$$

DÉMONSTRATION. Prenons un intervalle quelconque $[s, s + \Delta s]$ entièrement contenu dans D'. Pour la fonction $y = U(x)$ on a

$$| y(s+\Delta s) - y(s) | = \left| \int_D [K(s+\Delta s, t) - K(s, t)] \, x(t) \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_D | K(s+\Delta s, t) - K(s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} \| x \|_{L^{r'}}. \tag{17}$$

Pour majorer le premier facteur, partageons le domaine d'intégration en deux parties: D_1, intersection de D avec la boule $| t - s | \leqslant 2 | \Delta s |$, et $D_2 = D \setminus D_1$. On a

$$\left[\int_{D_1} | K(s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} = \left[\int_{D_1} \left(\frac{| K(s, t) |}{| s - t |^\beta} \right)^r | s - t |^{\beta r} \, dt \right]^{1/r} \leqslant (2 | \Delta s |)^\beta F.$$

On obtient la même majoration pour l'intégrale de $| K(s + \Delta s, t) |^r$ en remplaçant 2^β par 3^β, puisque

$$| s + \Delta s - t | \leqslant | s - t | + | \Delta s | \leqslant 3 | \Delta s |.$$

Ceci nous donne

$$I_1 = \left[\int_{D_1} | K(s+\Delta s, t) - K(s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} \leqslant \left[\int_{D_1} | K(s+\Delta s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} +$$

$$+ \left[\int_{D_1} | K(s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} \leqslant (2^\beta + 3^\beta) F \, | \Delta s |^\beta. \tag{18}$$

D'autre part

$$I_2 = \left[\int_{D_2} | K(s+\Delta s, t) - K(s, t) |^r \, dt \right]^{1/r} \leqslant \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} | \operatorname{grad}_s K(\lambda, t) | \, d\lambda \right]^r dt \right\}^{1/r} {}^{*)}.$$

Ceci étant, comme $t \in D_2$, on a $| \lambda - t | \geqslant | s - t | - | \lambda - s | \geqslant | s - t | - | \Delta s | \geqslant \frac{1}{2} | s - t |$ et par suite

$$I_2 \leqslant 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} | \operatorname{grad}_s K(\lambda, t) | \, | \lambda - t |^{1-\beta} \, d\lambda \right]^r \frac{dt}{| s - t |^{r(1-\beta)}} \right\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1-\beta} \left\{ \int_{D_2} \left[\int_s^{s+\Delta s} (| \operatorname{grad}_s K(\lambda, t) | \, | \lambda - t |^{1-\beta})^r \, d\lambda \right] \times \right.$$

---

*) L'expression $\int_s^{s+\Delta s} \varphi(\lambda) \, d\lambda$ doit être comprise comme une intégrale étendue à l'intervalle $[s, s+\Delta s]$.

$$\times\left[\int_s^{s+\Delta s} 1\cdot d\lambda\right]^{r/r'} \frac{dt}{|s-t|^{r(1-\beta)}}\Bigg\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{1-\beta}\,|\Delta s|^{1/r'}}{(2\,|\Delta s|)^{1-\beta}}\left\{\int_s^{s+\Delta s} d\lambda \int_{D_2} [|\operatorname{grad}_s K(\lambda, t)|\;|\lambda-t|^{1-\beta}]^r\, dt\right\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta s|^{\frac{1}{r'}+\beta-1+\frac{1}{r}} E = |\Delta s|^{\beta} E. \qquad (19)$$

En groupant (18) et (19), on trouve

$$\left[\int_D |K(s+\Delta s, t)-K(s, t)|^r\, dt\right]^{1/r} \leqslant I_1+I_2 \leqslant [E+(2^\beta+3^\beta)F]\,|\Delta s|^\beta$$

et en vertu de (17)

$$\frac{|y(s+\Delta s)-y(s)|}{|\Delta s|^\beta} \leqslant [E+(2^\beta+3^\beta)F]\,\|x\|,$$

ce qui nous amène à (16).

On peut majorer $\max|y(s)|$ en utilisant le fait qu'en vertu de la condition (15) l'opérateur U est un opérateur continu de $\mathbf{L}^r(D)$ dans $\mathbf{L}^\infty(D')$ (cf. remarque 4 suivant le théorème 1), donc

$$\max|y(s)| \leqslant A\,\|x\|.$$

Ce résultat joint à (16) prouve la continuité de l'opérateur U.

REMARQUE 1. Les fonctions de norme bornée dans Lip β étant équicontinues et uniformément bornées, le théorème prouvé nous dit que si le noyau $K(s, t)$ vérifie les conditions (14) et (15) pour un $\beta > 0$, l'opérateur (1) considéré comme un opérateur de $\mathbf{L}^r(D)$ dans $\mathbf{C}(D')$ est compact.

REMARQUE 2. Le théorème reste en vigueur pour $p=\infty$. Plus exactement, si les conditions (14) et (15) sont remplies pour $r = 1$ et un $\beta > 0$, l'opérateur U est un opérateur continu de $\mathbf{L}^\infty(D)$ dans Lip β, et de plus

$$C_\beta(y) \leqslant [E + (2^\beta + 3^\beta)F]\,\|x\|.$$

Considéré comme un opérateur de $\mathbf{L}^\infty(D)$ dans $\mathbf{C}(D')$, U est compact.

Signalons qu'une généralisation du théorème 4 à un e.f. de Banach est accessible dans le travail de Berkolaïko et Routitski [1].

3.4. Traitons maintenant le cas où le noyau de l'opérateur U dépend d'un paramètre.

On dira qu'une fonction $K_\tau(s, t)$ pour $\tau = \tau_0$ est *presque uniformément continue* en τ relativement à s et t si quels que soient $\varepsilon > 0$, $h > 0$ et s il existe $\delta > 0$ et un ensemble $A(s)$ tels que $|K_\tau(s, t) - K_{\tau_0}(s, t)| < \varepsilon$ dès que $|\tau - \tau_0| < \delta$, $t \bar{\in} A(s)$, et de plus $\operatorname{mes} A(s) < h$ *).

*) Les valeurs du paramètre τ sont les points d'un espace euclidien. Cependant par τ on peut sous-entendre les éléments d'un espace métrique quelconque.

La notion de continuité presque uniforme est utilisée dans le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Si le noyau d'un opérateur intégral est presque uniformément continu en τ pour $\tau = \tau_0$ et vérifie pour tout τ les hypothèses du théorème* 3, *les constantes* C_1, C_2, σ, *etc., participant à l'énoncé du théorème étant indépendantes de* τ, *alors l'opérateur intégral* U_τ

$$y_\tau = U_\tau(x), \quad y_\tau(s) = \int_D K_\tau(s, t)\, x(t)\, dt$$

$$(x \in L^p(D), \quad y_\tau \in L^q(D')) \tag{20}$$

dépend continûment du paramètre τ *en ce sens que*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \| U_\tau - U_{\tau_0} \| = 0.$$

DÉMONSTRATION. On a

$$y_{\tau_0}(s) - y_\tau(s) = \int_D [K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t)]\, x(t)\, dt.$$

On se sert des notations de la démonstration du théorème 3 pour majorer la constante

$$C_1^{(\rho)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in D'} \Big[\int_D | K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t) |^\rho\, dt \Big]^{1/\rho}.$$

Supposons que $\varepsilon > 0$, $h > 0$ et s sont donnés et cherchons le $\delta > 0$ et l'ensemble $A(s) \subset D$ correspondants de la définition de la continuité presque uniforme. En posant pour simplifier $\rho \geqslant 1$ *), on obtient

$$\Big[\int_D | K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t) |^\rho\, dt \Big]^{1/\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\int_{D' \setminus A(s)} | K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t) |^\rho\, dt \Big]^{1/\rho} +$$

$$+ \Big[\int_{A(s)} | K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t) |^\rho\, dt \Big]^{1/\rho} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\, [\operatorname{mes} D]^{1/\rho} + \Big[\int_{A(s)} | K_{\tau_0}(s, t) - K_\tau(s, t) |^{\rho \cdot \frac{r}{\rho}}\, dt \Big]^{1/r} \times$$

$$\times \Big[\int_{A(s)} dt \Big]^{1/\left(\frac{r}{\rho}\right)'\rho} \leqslant \varepsilon\, [\operatorname{mes} D]^{1/\rho} + 2C_1 h^{1/\rho - 1/r}.$$

*) Si $\rho < 1$ il faut se servir de l'inégalité

$$(a+b)^{1/\rho} \leqslant 2^{1/\rho - 1} [a^{1/\rho} + b^{1/\rho}] \quad (a, b \geqslant 0).$$

Donc, $C_1^\rho \leqslant \varepsilon\,[\text{mes}\,D]^{1/\rho} + 2C_1 h^{1/\rho - 1/r}$, c'est-à-dire cette quantité peut être rendue arbitrairement petite. Comme

$$\| U_{\tau_0} - U_\tau \| \leqslant [C_1^{(\rho)}]^{1-\sigma/q}\,[2C_2]^{\sigma/q},$$

d'après le théorème 1 (cf. (5)), la quantité $\| U_{\tau_0} - U_\tau \|$ est aussi arbitrairement petite, ce qui prouve le théorème.

Remarque. Le théorème s'applique immédiatement au cas où $q = \infty$ (cf. remarque 4 suivant le théorème 1). De façon plus précise, si $r > p'$ et (2) est remplie (pour chaque τ) et que le noyau $K_\tau(s, t)$ soit presque uniformément continu en τ pour $\tau = \tau_0$, alors l'opérateur (20) est continu en τ. Cette circonstance signifie ici que de toute évidence pour $\eta > 0$ on peut trouver $\lambda > 0$, tel que

$$|y_{\tau_0}(s) - y_\tau(s)| < \eta \quad (|\tau_0 - \tau| < \lambda, \quad s \in D').$$

3.5. Nous concluons par l'étude d'un noyau de type spécial. Plus exactement, nous admettons que les ensembles D et D' appartiennent à un même espace et nous considérons les noyaux de la forme

$$K(s, t) = \frac{B(s, t)}{|s - t|^m}, \tag{21}$$

où $B(s, t)$ est une fonction bornée, continue pour $s \neq t$. Ces noyaux s'appellent *noyaux de type potentiel.*

Pour qu'un tel noyau soit de puissance r-ième sommable en t, de façon plus précise, pour que (2) soit réalisée, il suffit que $mr < \mu$; la condition (3) sera satisfaite si $m\sigma < \nu$. Donc, pour r et σ on peut prendre des nombres aussi proches que l'on veut de $\frac{\mu}{m}$ et $\frac{\nu}{m}$ respectivement. Les conditions (4) s'écrivent alors

$$q \geqslant p, \quad q > \frac{\nu}{m}, \quad \left(1 - \frac{\nu}{mq}\right) p' < \frac{\mu}{m}.$$

La remarque 1 qui suit le théorème 1 nous permet donc d'affirmer que les conditions

$$q < \frac{\nu p}{\mu - (\mu - m)p}, \quad \nu > \mu - (\mu - m)\,p \tag{22}$$

assurent la continuité d'un opérateur (1) avec un noyau (21), considéré comme un opérateur de $L^p(D)$ dans $L^q(D')$. Les conditions du théorème 3 (compte tenu de la remarque analogue) étant alors réunies, il résulte de (22) que l'opérateur U est compact *). En

*) En effet, la première relation (22) équivaut à l'inégalité $\left(1 - \frac{\nu}{mq}\right) p' < \frac{\mu}{m}$. Si, de plus, $q < p$, la deuxième condition (22) assure la réalisation de l'inégalité (8).

particulier pour $m = \mu - 1$, les conditions (22) deviennent

$$q < \frac{\nu p}{\mu - p}, \quad \nu > \mu - p. \tag{23}$$

Le théorème 4 s'applique au cas envisagé sous les conditions suivantes. Comme de toute évidence

$$|\operatorname{grad}_s K(s, t)| \leqslant \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|}{|s-t|^m} + m \frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{m+1}},$$

les conditions (14) et (15) sont remplies si

$$\sup_{s \in D'} \left[\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B(s, t)|^r}{|s-t|^{(m+\beta-1)r}} dt \right]^{1/r} \leqslant E', \tag{24}$$

$$(m + \beta) r < \mu. \tag{25}$$

Sous ces conditions, l'opérateur (1) est un opérateur continu de $L^p(D)$ dans Lip β.

Considérons le noyau $K(s + \Delta s, t)$ comme une fonction du paramètre Δs. L'élimination d'un voisinage aussi petit que l'on veut du point s rendant $K(s + \Delta s, t)$ uniformément continu en Δs pour $\Delta s = 0$, le théorème 5 nous dit que

$$\lim_{\Delta s \to 0} \| U_{\Delta s} - U \| = 0,$$

où $U_{\Delta s}$ est un opérateur intégral de noyau $K(s + \Delta s, t)$. En particulier

$$\int_{D'} |y(s + \Delta s) - y(s)|^q ds \to 0 \quad \text{pour } \Delta s \to 0 \text{ *)}.$$

De façon analogue, soit D' une variété de dimension ν, continue et dépendant différentiablement d'un paramètre τ, $D' = D'_\tau$, c'est-à-dire la variété composée des points $s + \varphi(s, \tau)$, où s parcourt le domaine D'_0, et $\varphi(s, \tau) \to 0$ pour $\tau \to 0$, uniformément en s, et de plus $|\varphi(s, \tau) - \varphi(s', \tau)| \leqslant \alpha |s - s'|$ $(\alpha < 1)$. Alors la fonction y considérée sur la variété D'_τ

$$y_\tau(s) = y(s + \varphi(s, \tau)) = \int_D K(s + \varphi(s, \tau), t) x(t) dt,$$

est continue en τ pour la métrique de l'espace $L^q(D'_0)$, c'est-à-dire

$$\| y_0 - y_\tau \| = \left\{ \int_{D'_0} |y_0(s) - y_\tau(s)|^q ds \right\}^{1/q} \xrightarrow[\tau \to 0]{} 0.$$

Ce qui vient d'être dit se résume dans les deux théorèmes suivants.

---

*) Ici et dans la suite y est l'image de $x \in L^p(D)$ par l'opérateur U: $y = U(x)$.

THÉORÈME 6. *Si les conditions* (22) *sont réunies, tout opérateur intégral à noyau de type* (21) *est un opérateur compact de* $L^p(D)$ *dans* $L^q(D')$, *où* D *est un domaine de dimension* μ *d'un espace euclidien,* D' *une variété de dimension* ν *du même espace. En outre, si cette variété dépend continûment d'un paramètre, alors* $y = U(x)$ *sera aussi continu en le paramètre. En particulier*

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left[\int_{D'} |y(s+\Delta s) - y(s)|^q \, ds \right]^{1/q} = 0. \tag{26}$$

REMARQUE. Le théorème est valable pour $q = \infty$, les conditions (22) étant remplacées par (cf. remarque 4 suivant le théorème 1):

$$(\mu - m)\, p > \mu. \tag{27}$$

La relation (26) devient

$$\sup_s |y(s+\Delta s) - y(s)| \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0,$$

ce qui exprime la continuité de la fonction y, c'est-à-dire l'opérateur U applique en fait $L^p(D)$ dans $C(D')$.

La condition (27) peut encore s'écrire : $mp' < \mu$. La remarque qui suit le théorème 2 nous dit alors que U est un opérateur compact de $L^p(D)$ dans $L^\infty(D')$ (donc, comme nous l'avons indiqué, dans $C(D')$). D'où le

THÉORÈME 7. *Sous la condition* (27) *tout opérateur intégral à noyau de type potentiel est un opérateur compact de* $L^p(D)$ *dans* $C(D')$.

§ 4. Théorèmes d'immersion de Sobolev

Les relations qui existent entre les propriétés différentielles des fonctions jouent un grand rôle dans les divers problèmes de physique mathématique et d'autres domaines de l'analyse. Ainsi, la connaissance des majorations intégrales des dérivées partielles d'une fonction permet d'établir si cette dernière est bornée, voire continue. Souvent, le comportement d'une fonction dans l'espace tout entier nous renseigne sur sa différentiabilité sur une surface, etc.

Au chapitre VI, nous avons déjà exploité l'idée qu'une fonction peut être considérée comme un élément de plusieurs espaces fonctionnels. C'est cette idée que nous allons développer de façon plus systématique. Les espaces envisagés dans ce paragraphe sont caractérisés par les diverses propriétés des dérivées des fonctions qui les composent, de sorte que si l'un de ces espaces est une partie d'un autre (au sens ensembliste), les propriétés caractéristiques du premier entraînent celles du second. En associant alors à une fonction, considérée comme élément du premier espace, cette même fonction, considérée comme élément du second espace, on obtient un *opérateur*

d'immersion dont l'étude permet non seulement de préciser les relations qualitatives déjà établies entre les diverses propriétés des fonctions, mais encore de caractériser quantitativement ces relations.

Les résultats de ce paragraphe sont dus essentiellement à S. Sobolev (cf. Sobolev [I]; [II]) et occupent une place fondamentale dans les applications à la physique mathématique.

4.1. Nous commençons par prouver un lemme sur la représentation intégrale d'une fonction dérivable (les notations utilisées ici et plus bas sont celles du paragraphe précédent). Par D on désigne un domaine borné de $\mathbf{R}^\mu$, de frontière assez lisse.

LEMME 1. *Soit $x(s)$ une fonction continûment dérivable, définie dans un domaine convexe $D \subset \mathbf{R}^\mu$. On a l'identité*

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{mes} D} \int_D x(t)\, dt - \sum_{k=1}^{\mu} \int_D \frac{B_k(s, t)}{|s-t|^{\mu-1}} \frac{\partial x}{\partial t_k}\, dt, \tag{1}$$

où $B_k(s, t)$ $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ sont des fonctions bornées, i.e.

$$|B_k(s, t)| \leqslant \frac{\delta^\mu}{\mu \operatorname{mes} D} \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{2}$$

continues pour $s \neq t$; $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ désignent les coordonnées du point t, δ le diamètre du domaine D.

DÉMONSTRATION. Soient s un point fixe du domaine D, $\bar{l}$ le vecteur unitaire. Tout point $t \in D$ de la demi-droite issue du point s parallèlement à $\bar{l}$ peut être représenté sous la forme $t = s + R\bar{l}$, où $R = |s - t|$ est la distance de t à s. Soit $d = d(\bar{l})$ la longueur du segment découpé par le domaine D sur la demi-droite indiquée. Posons

$$F(t) = x(t) \int_R^d \rho^{\mu-1}\, d\rho = x(t) \frac{d^\mu - R^\mu}{\mu} \quad (t = s + R\bar{l}).$$

De toute évidence,

$$F(s) = F(t)|_{R=0} = x(s) \frac{d^\mu}{\mu}, \quad F(t)|_{R=d} = 0.$$

Donc

$$x(s) \frac{d^\mu}{\mu} = -\int_0^d \frac{\partial F}{\partial R}\, dR = \int_0^d x(t) R^{\mu-1}\, dR -$$

$$- \int_0^d \frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial^\mu - R^\mu}{\mu} \frac{R^{\mu-1}}{R^{\mu-1}}\, dR.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par l'élément de surface de la sphère unité dans un espace de dimension μ et intégrons sur cette sphère en utilisant la formule

$$\int_D z(t)\,dt = \int_\omega d\omega \int_0^d z(t)\,R^{\mu-1}\,dR,$$

où ω désigne la surface de la sphère unité centrée en s.

On obtient

$$x(s)\,\text{mes}\,D = \int_D x(t)\,dt - \int_D \frac{\partial x}{\partial R}\,\frac{d^\mu - R^\mu}{\mu}\,\frac{dt}{R^{\mu-1}}.$$

Comme $\frac{\partial x(t)}{\partial R} = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x(t)}{\partial t_k}\cos(\bar{l},\, t_k)$, en divisant les deux membres par mes D et en posant

$$B_k(s,\,t) = B(s,\,t)\cos(\bar{l},\,t_k) \quad \left(B(s,\,t) = \frac{d^\mu - R^\mu}{\mu\,\text{mes}\,D}\,;\ k = 1, 2, \ldots, \mu\right),$$

on obtient la relation (1). La majoration (2) et la continuité de la fonction se déduisent aussi à partir de là.

Remarque 1. Le résultat du lemme est valable sous une forme plus générale. Plus exactement, le domaine D peut ne pas être convexe, mais contenir simplement un sous-domaine convexe D_1 tel que D renferme le cône D_2 engendré par les segments des demi-droites issues d'un point arbitraire s de D et coupant D_1, compris entre s et le plus proche point d'intersection *). En outre, la formule (1) est remplacée par l'une des formules

$$x(s) = \frac{1}{\text{mes}\,D_1}\int_{D_1} x(t)\,dt - \sum_{k=1}^{\mu}\int_{D_1\cup D_2} \frac{B_k(s,\,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\,\frac{\partial x}{\partial t_k}\,dt, \tag{3}$$

$$x(s) = \frac{1}{\text{mes}\,D_1}\int_{D_1} x(t)\,dt - \sum_{k=1}^{\mu}\int_{D} \frac{B_k(s,\,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\,\frac{\partial x}{\partial t_k}\,dt. \tag{3'}$$

On fait la démonstration en raisonnant comme plus haut.

Remarque 2. Dans les conditions du lemme, la convexité du domaine D n'intervient que pour garantir qu'une demi-droite issue d'un point intérieur quelconque du domaine D coupe la frontière du domaine en un seul point. Si donc, l'on n'admet pas que le domaine est convexe, la représentation (1) peut avoir lieu pour tous les $s \in D$ par rapport auxquels D est étoilé, en particulier, pour tous les $s \in D_1$, où D_1 est le domaine de la remarque 1.

*) Un domaine D de cette forme est dit *étoilé* par rapport à D_1.

Remarque 3. Le lemme 1 peut être généralisé. Plus exactement: si $x(t)$ possède dans un domaine convexe D des dérivées continues jusqu'à l'ordre l compris, on a l'identité

$$x(s)=\frac{1}{\operatorname{mes} D}\int\limits_D x(t)\,\mathscr{L}(s,t)\,dt+$$

$$+(-1)^l\sum_{i_1,\ldots,i_l=1}^{\mu}\int\limits_D\frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1}\ldots\partial t_{i_l}}\mathscr{L}_{i_1\ldots i_l}(s,t)\frac{dt}{|s-t|^{\mu-l}},\tag{4}$$

où *)

$$\mathscr{L}(s,t)=\sum_{i=0}^{l-1}b_i\left(1-\frac{R}{d}\right)^{l-1-i}\left(\frac{R}{d}\right)^i,\tag{5}$$

b_i sont des constantes dépendant seulement de l et μ,

$$\mathscr{L}_{i_1\ldots i_l}(s,t)=$$

$$=\frac{(\mu+l-1)!}{\mu!\,(l-1)!}\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_l}\frac{d^\mu}{\operatorname{mes} D}\left(\int\limits_{\frac{R}{d}}^{1}(1-u)^{l-1}u^{\mu-1}\,du\right),\tag{5'}$$

$$\alpha_i=\cos(\bar{l},t_i)\quad(i=1,2,\ldots,\mu).$$

La démonstration de la formule (4) se fait par analogie à celle de la formule (1). Dans ce cas seulement on définit $F(t)$ de la manière suivante:

$$F(t)=x(t)\frac{\partial^{l-1}}{\partial R^{l-1}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right]-$$

$$-\frac{\partial x(t)}{\partial R}\frac{\partial^{l-2}}{\partial R^{l-2}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right]+$$

$$+\ldots+(-1)^{l-1}\frac{\partial^{l-1}x(t)}{\partial R^{l-1}}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\psi(R,d)\right],$$

où

$$\psi(R,d)=\int\limits_R^d(d-\rho)^{l-1}\rho^{\mu-1}\,d\rho=d^{\mu+l-1}\int\limits_{\frac{R}{d}}^{1}(1-u)^{l-1}u^{\mu-1}\,du.$$

*) Nous utilisons les notations de la démonstration du lemme 1.

Il est aisé de voir que

$$F(s) = F(t)\,|_{R=0} = x(s)\,\psi(0,\ d) = x(s)\,\frac{(l-1)!\,(\mu-1)!}{(\mu+l-1)!}\,d^{\mu+l-1},$$

$$F(t)\,|_{R=d} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = x(t)\,\frac{\partial^l}{\partial R^l}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\,\psi(R,\ d)\right] +$$

$$+ (-1)^{l-1}\,\frac{\partial^l x(t)}{\partial R^l}\left[\frac{R^{l-1}}{(l-1)!}\,\psi(R,\ d)\right].$$

En poursuivant comme pour la démonstration du lemme 1, et en utilisant la relation

$$\frac{\partial^l x(t)}{\partial R^l} = \sum_{i_1,\ \ldots,\ i_l=1}^{\mu} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_l}\,\frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_l}},\ \alpha_i = \cos(\overline{l},\ t_i),$$

on obtient l'identité (4).

Supposons comme précédemment que D est un domaine convexe dans $\mathbf{R}^\mu$, limité par une surface S assez lisse. Soient $B_k(s,\ t)$ les fonctions construites dans la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. *Les fonctions $B_k(s,\ t)$ sont telles que l'intégrale*

$$\int_D \frac{|\operatorname{grad}_s B_k(s,\ t)|^r}{|s-t|^{(\mu-2+\beta)r}}\,dt \tag{6}$$

est bornée indépendamment de s, si seulement $r < \frac{\mu}{\mu-1}$ et $\beta > 0$ assez petit pour que $(\mu - 1 + \beta)\,r < \mu$.

DÉMONSTRATION. Comme

$$B_k(s,\ t) = B(s,\ t)\cos(\overline{l},\ t_k),$$

alors

$$|\operatorname{grad}_s B_k(s,\ t)| \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{grad}_s B(s,\ t)|\,|\cos(\overline{l},\ t_k)| + |B(s,\ t)|\,|\operatorname{grad}_s \cos(\overline{l},\ t_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |\operatorname{grad}_s B(s,\ t)| + K/R \quad (R = |s-t|),$$

où K est une constante.

Le lemme est vrai pour le terme K/R, car $(\mu - 1 + \beta)\,r < \mu$. Vérifions qu'il l'est pour le premier terme aussi. Comme $B(s,\ t) = \frac{1}{\mu \operatorname{mes} D}(d^\mu - R^\mu)$ et que le lemme est manifestement vrai pour R^μ, il reste à le prouver seulement pour la fonction d^μ.

Désignons par u le point d'intersection de la demi-droite définie par le vecteur $\overline{l}$ avec la frontière du domaine D, par $\overline{n} = (A_1,\ \ldots,\ A_\mu)$ le vecteur unitaire de la normale à la surface S au point $u\,(A_i,$

$1 \leqslant i \leqslant \mu$, sont les projections du vecteur $\bar{n}$ sur les axes de coordonnées), et enfin par φ l'angle de $\bar{l}$ et $\bar{n}$.

Soient $\tilde{s} = s + he_j$, où e_j est le vecteur unitaire du j-ième axe de coordonnée, un point proche de s; $\tilde{u}$ le point d'intersection de la demi-droite issue de $\tilde{s}$ dans la direction de t avec la frontière du domaine D; $\tilde{\varphi}$ l'angle de cette demi-droite et du vecteur $\bar{n}$; et enfin v le pied de la perpendiculaire abaissée du point $\tilde{u}$ sur l'hyperplan tangent en u à S.

Mettons les coordonnées des points $u = (u_1, \ldots, u_\mu)$ et $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_\mu)$ sous la forme

$$u_i = s_i + (t_i - s_i)\, r(s), \quad \tilde{u}_i = \tilde{s}_i + (t_i - \tilde{s}_i)\, r(\tilde{s}) \quad (1 \leqslant i \leqslant \mu).$$

Alors

$$d(s) = |u - s| = r(s)\,|t - s| = r(s)\,R(s),$$
$$d(\tilde{s}) = |\tilde{u} - \tilde{s}| = r(\tilde{s})\,|t - \tilde{s}| = r(\tilde{s})\,R(\tilde{s}).$$

Calculons la dérivée de la fonction $d(s)$ par rapport à s_j. On a

$$d'_{s_j}(s) = \lim_{h \to 0} \frac{d(s + he_j) - d(s)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{r(\tilde{s})\,R(\tilde{s}) - r(s)\,R(s)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{r(\tilde{s}) - r(s)}{h} R(\tilde{s}) + \frac{R(\tilde{s}) - R(s)}{h} r(s) \right]. \tag{7}$$

De toute évidence

$$\frac{R(\tilde{s}) - R(s)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} R'_{s_j}(s) = \frac{s_j - t_j}{R(s)}. \tag{8}$$

Pour trouver la limite du premier rapport du second membre de (7), mettons $r(s)$ et $r(\tilde{s})$ sous la forme

$$r(s) = \frac{d(s)}{R(s)} = \frac{|u - s| \cos\varphi}{|t - s| \cos\varphi} = \frac{(u - s, \bar{n})}{(t - s, \bar{n})} = \frac{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i)}{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i)}, \tag{9}$$

$$r(s) = \frac{d(\tilde{s})}{R(\tilde{s})} = \frac{|\tilde{u} - \tilde{s}| \cos\tilde{\varphi}}{|t - \tilde{s}| \cos\tilde{\varphi}} = \frac{(\tilde{u} - \tilde{s}, \bar{n})}{(t - \tilde{s}, \bar{n})} =$$
$$= \frac{(\tilde{u} - v, \bar{n}) + (v - u, \bar{n}) + (u - \tilde{s}, \bar{n})}{(t - \tilde{s}, \bar{n})} = \frac{|\tilde{u} - v| + \sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i) - A_j h}{\sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i) - A_j h}, \tag{10}$$

puisque le vecteur $\tilde{u} - v$ est colinéaire au vecteur $\bar{n}$, $v - u$ orthogonal à $\bar{n}$ et de plus $\tilde{s} = s + he_j = (s_1, \ldots, s_j + h, \ldots, s_n)$.

On remarquera qu'en vertu des hypothèses faites sur la surface limitant D,

$$\frac{|\tilde{u} - v|}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0^{*)}. \tag{11}$$

En utilisant les relations (9), (10) et (11), et en posant

$$P = \sum_{i=1}^{\mu} A_i (u_i - s_i) = d(s) \cos \varphi, \quad Q = \sum_{i=1}^{\mu} A_i (t_i - s_i) = R(s) \cos \varphi,$$

on obtient

$$\frac{r(\tilde{s}) - r(s)}{h} = \frac{|\tilde{u} - v|}{h(Q - A_j h)} + \frac{1}{h}\left[\frac{P - A_j h}{Q - A_j h} - \frac{P}{Q}\right] \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{A_j (P - Q)}{Q^2} =$$

$$= \frac{A_j (d(s) - R(s))}{R^2(s) \cos \varphi}. \tag{12}$$

Donc, en vertu de (7), (8) et (12), il vient

$$d'_{s_j}(s) = \frac{A_j (d(s) - R(s))}{R(s) \cos \varphi} + \frac{s_j - t_j}{R^2(s)} d(s).$$

D'où, puisque $|A_j| \leqslant 1$ et $\frac{|s_j - t_j|}{R(s)} \leqslant 1$,

$$|d'_{s_j}(s)| \leqslant \frac{d - R}{R|\cos \varphi|} + \frac{d}{R} \leqslant 2 \frac{d}{R|\cos \varphi|}$$

et

$$|\operatorname{grad}_s d| \leqslant 2\mu^{1/2} \frac{d}{R|\cos \varphi|}.$$

---

*) Prouvons cette relation. Tout d'abord les hypothèses assujettissant la surface entraînent

$$|\tilde{u} - v| \leqslant A|v - u|^2 \leqslant A|\tilde{u} - u|^2, \tag{*}$$

où A est une constante dépendant des propriétés de la surface. Le segment $\tilde{u}u$ est situé dans le plan des droites stu et $\tilde{s}\tilde{t}\tilde{u}$. Prenons sur la droite $\tilde{u}\tilde{s}$ des points w et η tels que la droite uw soit parallèle à $s\tilde{s}$ et la droite $u\eta$ perpendiculaire à $\tilde{u}\tilde{s}$. Soit $\psi(\tilde{s})$ l'angle des droites $\tilde{u}u$ et $\tilde{u}\tilde{s}$. Alors

$$|\tilde{u} - u| = \frac{|u - \eta|}{\sin \psi(\tilde{s})} \leqslant \frac{|u - w|}{\sin \psi(\tilde{s})} = \frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})} |\tilde{s} - s| = \frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})} h. \tag{**}$$

D'après (*) et (**), on obtient

$$|\tilde{u} - v| \leqslant A \left(\frac{d - R}{R \sin \psi(\tilde{s})}\right)^2 h^2,$$

d'où résulte (11), car, le domaine D étant convexe, $\sin \psi(\tilde{s})$ est séparé de zéro pour $\tilde{s} \to s$.

Donc

$$|\operatorname{grad}_s d^\mu| \leqslant 2\mu^{3/2} \frac{d^\mu}{R\,|\cos\varphi|}.$$

Par suite

$$\frac{|\operatorname{grad}_s d^\mu|^r}{R^{(\mu-2+\beta)r}} \leqslant 2^r \mu^{(3/2)r} \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}\,|\cos\varphi|^r}.$$

Pour majorer l'intégrale de cette expression, on remarquera que

$$dt = \frac{R^{\mu-1}}{d^{\mu-1}} \cos\varphi\, dS\, dR,$$

où dS est l'élément de la surface S limitant D. On notera par ailleurs qu'en vertu des hypothèses du lemme,

$$\mu r - (\mu - 1 + \beta)\, r + 1 > \mu r - \mu + 1 > 0.$$

De ce qui précède il suit

$$\int_D \frac{d^{\mu r}}{R^{(\mu-1+\beta)r}} \frac{dt}{|\cos\varphi|^r} = \int_S \frac{\cos\varphi}{|\cos\varphi|^r} \left(\int_0^d \frac{d^{\mu r-(\mu-1)} R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1+\beta)r}}\, dR \right) dS \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{\mu r-(\mu-1+\beta)r+1}}{\mu-(\mu-1+\beta)r} \int_S \frac{dS}{|\cos\varphi|^{r-1}}.$$

Comme $r < \frac{\mu}{\mu-1} \leqslant 2$, donc $r - 1 < 1$, en tenant compte des hypothèses imposées à la surface, on obtient

$$\int_D \frac{dS}{|\cos\varphi|^{r-1}} \leqslant K_1,$$

ce qui avec le résultat précédent nous donne ce que nous voulions.

Remarque. De ce qui a été dit dans 3.5 il résulte que si l'on se place dans les conditions du lemme, le noyau $\frac{B_k(s,\, t)}{|s-t|^{\mu-1}}$ satisfait aux hypothèses du théorème 3.4.

4.2. En se basant sur les théorèmes des opérateurs intégraux, établis dans le paragraphe précédent on peut prouver le théorème fondamental suivant.

Théorème 1 (inégalité de Sobolev). *Soient $x(s)$ une fonction continûment différentiable dans un domaine convexe D et*

$$q < \frac{\mu p}{\mu - p}. \tag{13}$$

On a l'inégalité

$$\| x - m(x) \|_{L^q(D)} = \left\{ \int_D | x(t) - m(x) |^q \, dt \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant A \, \| \, | \operatorname{grad} x | \, \|_{L^p(D)} = A \left\{ \int_D \left[\sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}, \quad (14)$$

où

$$m(x) = \frac{1}{\operatorname{mes} D} \int_D x(s) \, ds \quad (15)$$

est la valeur moyenne de la fonction x dans le domaine D, A, une constante.

DÉMONSTRATION. Le lemme 1 (compte tenu de l'expression pour $B_k(s, t)$) nous donne

$$|x(s) - m(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\mu} \left| \int_D \frac{B_k(s, t)}{| s - t |^{\mu - 1}} \frac{\partial x}{\partial t_k} \right| \leqslant \int_D \frac{| B(s, t) |}{| s - t |^{\mu - 1}} \, | \operatorname{grad} x | \, dt.$$

Or, sous la condition (13) l'opérateur intégral U de noyau $\frac{| B(s, t) |}{| s - t |^{\mu - 1}}$ est un opérateur continu de $L^p(D)$ dans $L^q(D)$ (cf. 3.5, condition (23)). Donc

$$\| x - m(x) \|_{L^q} \leqslant \| U \| \, \| \, | \operatorname{grad} x | \, \|_{L^p},$$

d'où (14) si pour A on prend la norme de l'opérateur intégral indiqué U.

REMARQUE 1. L'inégalité (14) est parfois d'un usage plus commode sous la forme équivalente

$$\| x \|_{L^q} \leqslant M \left[\| \, | \operatorname{grad} x | \, \|_{L^p} + | m(x) | \right]. \quad (16)$$

REMARQUE 2. Si $p = 2$ et $\mu \geqslant 2$, l'inégalité (13) sera réalisée pour $q = 2$. L'inégalité (16) s'écrit alors

$$\left[\int_D | x(s) |^2 \, ds \right]^{1/2} \leqslant M \left\{ \left| \int_D x(t) \, dt \right| + \left[\int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right]^{1/2} \right\} \quad (17)$$

ou encore

$$\int_D | x(s) |^2 \, ds \leqslant M_1 \left\{ \left| \int_D x(t) \, dt \right|^2 + \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt \right\} \quad (18)$$

qui n'est autre que l'*inégalité* classique *de Poincaré.*

REMARQUE 3. La valeur de la constante A de (14) peut jouer un rôle dans les applications. On peut majorer la norme de l'opérateur intégral U de noyau $\frac{|B(s, t)|}{|s-t|^{\mu-1}}$ grâce au théorème 3.1. En prenant $\sigma = r$ et en déterminant la valeur minimale de r à partir de l'inégalité $\left(1 - \frac{r}{q}\right)p' \leqslant r$, on trouve que pour A on peut prendre la quantité

$$A = C_1 = C_2 \leqslant \max |B(s, t)| \max_s \left[\int_D \frac{dt}{|s-t|^{(\mu-1)r}}\right]^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^\mu}{\mu \operatorname{mes} D} \left\{\int_\omega d\omega \int_0^\delta \frac{R^{\mu-1}}{R^{(\mu-1)r}} dR\right\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^{1+\mu/r}}{\mu \operatorname{mes} D} \left\{\frac{\mu \pi^{\mu/2}}{(\mu-(\mu-1)r)\, \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)}\right\}^{1/r}.$$

REMARQUE 4. L'hypothèse de la convexité du domaine D est essentielle dans la démonstration de l'inégalité de Sobolev. Cependant, cette inégalité peut être établie pour des domaines de forme bien plus générale. Notons d'abord que si cette inégalité est réalisée pour l'image d'un domaine par une transformation univoque continûment différentiable de jacobien égal à un, elle le sera pour le domaine de départ. La possibilité de généraliser l'inégalité de Sobolev à des domaines de forme plus générale est affirmée par le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soit D la réunion de deux domaines D_1 et D_2 dont l'intersection est de mesure positive. Si l'inégalité* (14) *est réalisée pour D_1 et D_2, elle l'est pour D tout entier.*

DÉMONSTRATION. Soit $D = D_1 \cup D_2$. Posons

$$D_3 = D_1 \cap D_2, \quad D_4 = D_2 \setminus D_3.$$

Désignons par $m(x)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$ et $m_4(x)$ les valeurs moyennes de x sur les domaines D, D_1, D_2, D_3 et D_4 respectivement. En vertu de (14), on a pour D_1 et D_2

$$\|x - m_1(x)\|_{L^q(D_1)} \leqslant B_1 J, \quad \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)} \leqslant B_2 J, \tag{19}$$

où J désigne $\| |\operatorname{grad} x| \|_{L^p(D)}$, B_1 et B_2 des constantes.

Ensuite,

$$|m_1(x) - m_2(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\operatorname{mes} D_3)^{1/q}} [\|x - m_1(x)\|_{L^q(D_3)} + \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_3)}] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\operatorname{mes} D_3)^{1/q}} [\|x - m_1 x\|_{L^q(D_1)} + \|x - m_2(x)\|_{L^q(D_2)}] \leqslant B_3 J,$$

$$|m_4(x)-m_2(x)|=\frac{1}{\operatorname{mes} D_4}\left|\int_{D_4}[x(s)-m_2(x)]\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\operatorname{mes} D_4}\|x-m_2(x)\|_{L^q(D_2)}\leqslant B_4 J.$$

Or, d'après la signification des valeurs moyennes

$$\min[m_1(x),\ m_4(x)]\leqslant m(x)\leqslant\max[m_1(x),\ m_4(x)].$$

Par conséquent,

$$|m(x)-m_1(x)|\leqslant|m_4(x)-m_1(x)|\leqslant$$

$$\leqslant|m_4(x)-m_2(x)|+|(m_2(x)-m_1(x)|\leqslant B_5 J,$$

d'où

$$|m(x)-m_2(x)|\leqslant|m(x)-m_1(x)|+|m_2(x)-$$

$$-m_1(x)|\leqslant B_6 J.$$

Enfin

$$\|x-m(x)\|_{L^q(D)}\leqslant\|x-m(x)\|_{L^q(D_1)}+\|x-m(x)\|_{L^q(D_2)}\leqslant$$

$$\leqslant\|x-m_1(x)\|_{L^q(D_1)}+\|x-m_2(x)\|_{L^q(D_2)}+$$

$$+|m(x)-m_1(x)|(\operatorname{mes} D_1)^{1/q}+|m(x)-m_2(x)|(\operatorname{mes} D_2)^{1/q}\leqslant B_7 J,$$

ce qui exprime que l'inégalité de type (14) est valable pour le domaine D.

La remarque suivant le lemme 1 nous permet d'obtenir une autre extension de la classe des domaines justiciables de l'inégalité de Sobolev. De façon plus précise, soit un domaine D étoilé par rapport à un domaine convexe $D_1\subset D$; désignons par $m_1(x)$ la valeur moyenne de la fonction x sur le domaine D_1. En utilisant la représentation (3) on obtient

$$\|x-m_1(x)\|_{L^q(D)}\leqslant A_1 J\quad(J=\||\operatorname{grad} x|\|_{L^p(D)}).$$

Mais d'après la remarque 2 suivant le lemme 1, la représentation (1) est valable pour tous les $s\in D_1$, c'est-à-dire

$$x(s)=m(x)+\sum_{k=1}^{\mu}\int_D\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x}{\partial t_k}\,dt\quad(s\in D_1).$$

Le second membre de la dernière formule définissant de toute évidence un opérateur continu de $L^p(D)$ dans $L^q(D_1)$, on a

$$\|x-m(x)\|_{L^q(D_1)}\leqslant A_2 J.$$

D'où

$$|m_1(x)-m(x)| = \left|\frac{}{\operatorname{mes} D_1}\int_{D_1}[x(s)-m(x)]\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} D_1}\|x-m(x)\|_{L^q(D_1)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} D_1} A_2 J.$$

Et en définitive

$$\|x-m(x)\| \leqslant A_3 J,$$

c.q.f.d.

4.3. Etudions maintenant quelques espaces fonctionnels dont les éléments sont les fonctions continûment différentiables dans le domaine D. Donc, ces espaces ne se distingueront que par la norme dont nous les munirons.

Commençons par l'espace $\widetilde{W}_p^{(1)} = \widetilde{W}_p^{(1)}(D)$. Posons

$$\|x\| = \frac{1}{\operatorname{mes} D}\left|\int_D x(s)\,ds\right| + \left[\int_D |\operatorname{grad} x|^p\,dt\right]^{1/p} =$$

$$= |m(x)| + \||\operatorname{grad} x|\|_{L^p(D)}. \qquad (20)$$

Il est immédiat de voir que cette norme satisfait à tous les axiomes d'un espace normé (avec une linéarisation naturelle).

Si l'on traite l'élément $x \in \widetilde{W}_p^{(1)}$ comme une fonction de $L^q(D)$, l'inégalité de Sobolev (dans sa forme (16)) peut s'écrire:

$$\|x\|_{L^q(D)} \leqslant M\,\|x\|_{\widetilde{W}_p^{(1)}}. \qquad (21)$$

Donc l'opérateur d'immersion, c'est-à-dire l'opérateur associant à l'élément $x \in \widetilde{W}_p^{(1)}$ cet élément lui-même mais considéré comme élément de $L^q(D)$ est un opérateur linéaire continu. Montrons qu'il est compact.

Soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans l'espace $\widetilde{W}_p^{(1)}$. D'après le lemme 1

$$x_n(s) = m(x_n) + \sum_{k=1}^{\mu}\int_D \frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\,dt.$$

Mais l'opérateur de noyau $\frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}$ est compact sous la condition (13) (théorème 3.6). La suite $\left\{\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\right\}$ $(k=1, 2, \ldots, \mu)$ étant bornée dans l'espace $L^p(D)$, on peut choisir une suite d'indices $\{n_i\}$ telle que $\{y_{n_i}^{(k)}\}$:

$$y_{n_i}^{(k)}(s) = \int_D \frac{B_k(s,t)}{|s-t|^{\mu-1}}\frac{\partial x_{n_i}}{\partial t_k}\,dt \quad (k=1, 2, \ldots, \mu;\ i=1, 2 \ldots)$$

soit convergente dans $L^q(D)$. On peut de même admettre que la suite numérique $\{m(x_{n_i})\}$ est convergente, elle aussi. Donc, la suite $\{x_{n_i}\}$ est convergente dans $L^q(D)$ et l'opérateur d'immersion est compact. On a donc le

THÉORÈME 3 (Sobolev-Kondrachev) *). *Sous la condition* (13), *l'opérateur d'immersion associant à une fonction de* $\widetilde{W}_p^{(1)}$ *cette même fonction considérée comme élément de* $L^q(D)$ *est compact.*

La classe de domaines D pour lesquels est valable le théorème 3 est confondue avec celle des domaines pour lesquels est réalisée l'inégalité de Sobolev. En particulier, pour les domaines étoilés par rapport à un sous-domaine convexe, ou à une réunion finie de tels domaines (théorème 2).

Comme pour le théorème 3, en utilisant le théorème 3.6 on peut établir un résultat plus général.

THÉORÈME 4. *L'opérateur d'immersion de* $\widetilde{W}_p^{(1)}$ *dans* $L^q(D')$ (D' *est une surface de dimension* ν *contenue dans* D) *est compact sous les conditions*

$$q < \frac{\nu p}{\mu - p}, \quad \nu > \mu - p. \tag{22}$$

De plus, tout élément x *dépend continûment du vecteur translation par une translation de la surface* D', *c'est-à-dire*

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left\{ \int_{D'} | x(s+\Delta s) - x(s) |^q \, ds \right\}^{1/q} = 0. \tag{23}$$

Dans le cas où $\mu < p$, le théorème 3.7 entraîne le

THÉORÈME 5. *Si* $\mu < p$, *l'opérateu d'immersion considéré comme un opérateur de* $\widetilde{W}_p^{(1)}(D)$ *dans* $C(D)$ *es ontinu et compact.*

REMARQUE. On peut renforcer le théorème 5 en se servant du théorème 3.4 et de la remarque qui suit le lemme 2 Plus exactement, si $\beta < \frac{p-\mu}{p}$, l'opérateur d'immersion de $\widetilde{W}_p^{(1)}$ dans Lip β sera continu (cf. aussi Sobolev [I], § 11).

4.4. De même que nous avons introduit les espaces $\widetilde{W}_p^{(1)}(D)$, de même nous pouvons envisager des espaces dont les normes sont définies par les dérivées supérieures. Plus exactement, désignons par $\widetilde{W}_p^{(l)} = \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ l'espace des fonctions l fois continûment

*) S. Sobolev a prouvé la continuité de l'opérateur d'immersion, V. Kondrachev en a établi la compacité.

différentiables dans le domaine D, muni de la norme

$$\|x\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)} = \|x\|_{L^p(D)} + \sum_{i_1, \ldots, i_l = 1}^{\mu} \left[\int_D \left| \frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_l}} \right|^p dt \right]^{1/p}. \tag{24}$$

Le théorème 4 (donc le théorème 3 en tant que cas particulier du théorème 4) se généralise au cas de dérivées d'ordre supérieur. c'est-à-dire on a le

THÉORÈME 6. *L'opérateur d'immersion de l'espace* $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ (D *étant convexe*) *dans l'espace* $L^q(D')$ (D' *étant une surface de dimension* ν *dans* D) *est compact si*

$$q < \frac{\nu p}{\mu - lp}, \quad \nu > \mu - lp. \tag{25}$$

Si, de plus, la surface D' subit une déformation dépendant continûment d'un paramètre, l'opérateur d'immersion dépend continûment de ce paramètre.

DÉMONSTRATION. D'après la représentation intégrale (4), pour toute fonction $x \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ et tout point $s \in D'$ on a

$$x(s) = \frac{1}{\operatorname{mes} D} \int_D x(t)\, \mathcal{L}(s, t)\, dt +$$

$$+ (-1)^l \sum_{i_1, \ldots, i_l}^{\mu} \int_D \frac{\partial^l x(t)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_l}} \frac{\mathcal{L}_{i_1 \ldots i_l}(s, t)}{|s - t|^{\mu - l}}\, dt,$$

où les fonctions $\mathcal{L}(s, t)$ et $\mathcal{L}_{i_1 \ldots i_l}(s, t)$ sont définies par les formules (5) et (5').

Sous les conditions (25) l'opérateur intégral de noyau $\dfrac{\mathcal{L}_{i_1 \ldots i_l}(s, t)}{|s - t|^{\mu - l}}$ est, en vertu du théorème 3.6, un opérateur compact de $L^p(D)$ dans $L^q(D')$ (les conditions (28) de ce théorème coïncident avec les conditions (25) pour $m = \mu - l$); d'après le même théorème, l'opérateur envisagé dépend continûment du paramètre de translation de la surface D'.

L'opérateur intégral défini par le premier terme de la représentation possède visiblement les mêmes propriétés. D'où le théorème énoncé.

Enfin, le résultat suivant généralise le théorème 5 pour les dérivées supérieures: l'opérateur d'immersion est un opérateur compact de $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ dans $C(D)$ si $\mu < lp$.

4.5. Les espaces $\widetilde{W}_p^{(l)}$ ne sont manifestement pas complets. Mais si on leur ajoute des fonctions différentiables au sens des distributions, on en fait des B-espaces.

On dira qu'une fonction $x^{(i)}(s)$ sommable dans D est la *dérivée distributionnelle* d'une fonction x dans le domaine D si existe une

suite $\{x_k\}$ de fonctions continûment dérivables dans D telle que pour tout domaine D_1 dont l'adhérence est contenue dans D, on a

$$\int_{D_1} |x_k(t) - x(t)|\, dt \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \qquad \int_{D_1} \left|\frac{\partial x_k}{\partial t_i} - x^{(i)}(t)\right| dt \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{26}$$

Soit φ une fonction continûment dérivable dans un domaine D, nulle sur et au voisinage de la frontière du domaine D, c'est-à-dire non nulle uniquement dans un domaine D_1 dont l'adhérence est contenue dans D. On a alors

$$\int_D x(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} dt = -\int_D \varphi(t)\, x^{(i)}(t)\, dt. \tag{27}$$

En effet, si l'on remplace la fonction x par x_k, et $x^{(i)}$ par $\frac{\partial x_k}{\partial t_i}$, la relation (27) n'est autre que la formule classique de Green. Un passage à la limite nous conduit au résultat voulu.

L'égalité (27) entraîne, entre autres, l'unicité de la dérivée distributionnelle. En effet, si existaient deux telles dérivées $x^{(i)}$ et $\tilde{x}^{(i)}$, on aurait pour la différence $\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}$

$$\int_D \varphi(t)\, [\tilde{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)]\, dt = 0, \tag{28}$$

où φ est une fonction de la forme indiquée plus haut. D'où il est aisé de déduire à l'aide du théorème de Lusin que $\tilde{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t)$ presque partout.

Dans la suite, les fonctions approximantes ne seront pas arbitraires mais choisies suivant le procédé de moyennisation de Steklov.

Outre les conditions imposées au noyau moyennisant dans IX.1.1, nous admettrons encore que pour tout $h > 0$ la fonction ω_h est continûment dérivable dans $[0, \infty]$.

Dans IX.1.1, nous avons établi les propriétés suivantes pour les fonctions moyennes:

a) $$\|x_h\|_{L^p(D)} \leqslant M \|x\|_{L^p(D)} \quad (h > 0); \tag{29}$$

b) si $x \in L^p(D)$ $(p \geqslant 1)$, alors $\|x - x_h\|_{L^p(D)} \to 0$ pour $h \to 0$;

c) si $\|x_m - x\|_{L^p(D)} \to 0$, alors $\|(x_m)_h - x_h\|_{L^p(D)} \to 0$.

De plus, d'après le choix spécial de la fonction ω_h, on a

d) si x admet dans D une dérivée distributionnelle $x^{(i)}$, pour tout domaine $D_1 \subset D$ l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t_i} x_h = [x^{(i)}]_h \tag{30}$$

est réalisée dans D_1 pour $h > 0$ assez petit.

Prouvons d). Prenons $\{x_k\}$ telle que soit réalisée (26). Pour x_k, l'égalité (30) est visiblement satisfaite, car on peut alors dériver sous le signe somme. Mais, d'après c)

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial t_i}\right)_h \to (x^{(i)})_h \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^p(D),$$

$$\frac{\partial}{\partial s_i}[(x_k)_h] = \int \frac{\partial}{\partial s_i}\omega_h(|s-t|)\,x_k(t)\,dt \to$$

$$\to \int \frac{\partial}{\partial s_i}\omega_h(|s-t|)\,x(t)\,dt = \frac{\partial}{\partial s_i}x_h.$$

Le passage à la limite est licite, puisque $s \in D_1$ et le domaine d'intégration, boule $K_h(s)$ de rayon h et de centre s, est entièrement contenu dans D pour h assez petit.

Notons que (30) et b) entraînent que les fonctions moyennes x_h peuvent tenir le rôle des fonctions x_k dans la définition des dérivées distributionnelles.

Toutes ces considérations permettent de généraliser l'inégalité de Sobolev (16) aux fonctions ne possédant que des dérivées distributionnelles. En effet, supposons que le gradient généralisé est de puissance p-ième sommable. Alors, d'après b)

$$\int_{D_1}\left|\frac{\partial x_h}{\partial t_i} - x^{(i)}\right|^p dt = \int_{D_1}|[x^{(i)}]_h - x^{(i)}|^p\,dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

une relation identique a lieu pour le gradient; donc, en appliquant l'inégalité de Sobolev à la fonction continûment dérivable x_h, on trouve

$$\left[\int_{D_1}|x_h|^q\,dt\right]^{1/q} \leqslant M_1\left\{\frac{1}{\operatorname{mes} D_1}\left|\int_{D_1}x_h(t)\,dt\right| + \left[\int_{D_1}|\operatorname{grad} x_h|^p\,dt\right]^{1/p}\right\}$$

et en faisant tendre $h \to 0$ on obtient l'inégalité de Sobolev pour x

$$\left[\int_{D_1}|x|^q\,dt\right]^{1/q} \leqslant M_1\left\{\frac{1}{\operatorname{mes} D_1}\left|\int_{D_1}x(t)\,dt\right| + \left[\int_{D_1}|\operatorname{grad} x|^p\,dt\right]^{1/p}\right\}.$$

Cela étant, on peut considérer que la constante M_1 ne dépend pas de D_1 (remarque 3 suivant le théorème 1). En prenant une suite de domaines D_1 dont la réunion est D, nous obtiendrons à la limite la même inégalité, mais cette fois pour D. Nous établirons incidemment la sommabilité de la fonction $|x|^q$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{L}^q(D)$. Et en définitive

$$\left[\int_{D}|x|^q\,dt\right]^{1/q} \leqslant M_1\left\{\frac{1}{\operatorname{mes} D_1}\left|\int_{D}x(t)\,dt\right| + \left[\int_{D}|\operatorname{grad} x|^p\,dt\right]^{1/p}\right\}.$$

En ajoutant à l'espace $\widetilde{\mathrm{W}}_p^{(1)}$ les fonctions dont les dérivées distributionnelles sont de puissance p-ième sommable, on obtiendra un

espace, noté $W_p^{(1)}$*), qui sera complet. En effet, soit $\|x_k - x_m\|_{W_p^{(1)}} \to$ $\to 0$. La suite $\left\{\frac{\partial x_k}{\partial t_i}\right\}$ est alors convergente dans $L^p(D)$ vers des fonctions $x^{(i)}$ et en vertu de l'inégalité de Sobolev la suite $\{x_k\}$ est convergente vers une fonction $x \in L^p(D)$. Reste à prouver que $x^{(i)}$ sont les dérivées distributionnelles de x, auquel cas, de toute évidence $x_k \to x$ dans $W_p^{(1)}$. Soit $\{D^{(n)}\}$ une suite de sous-domaines intérieurs de D qui en s'élargissant couvrent D. D'après (26), pour chaque $n = 1, 2, \ldots$ il existe des fonctions continûment dérivables $\tilde{x}_n$, telles que

$$\int_{D^{(n)}} |x_n - \tilde{x}_n|\, dt < \frac{1}{n}, \qquad \int_{D^{(n)}} \left|x_n^{(i)} - \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i}\right| dt < \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

D'où il est clair que les suites $\{\tilde{x}_n\}$ et $\left\{\frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial t_i}\right\}$ ont pour limites respectives x et $x^{(i)}$ dans tout sous-domaine intérieur de D, c.q.f.d.

L'espace $W_p^{(1)}$ est séparable. En effet, les points b) et d) nous disent qu'il est possible d'approcher (dans $W_p^{(1)}$) toute fonction de $W_p^{(1)}$ par des fonctions continûment dérivables, qui, à leur tour, peuvent l'être par des polynômes à coefficients rationnels.

On peut également partir de l'égalité (27) pour définir la dérivée distributionnelle. Plus exactement, si existe une fonction $x^{(i)}$ telle que (27) ait lieu pour toute fonction φ de la forme indiquée, alors $x^{(i)}$ est dérivée distributionnelle de x. En effet, pour tout domaine intérieur $D_1 \subset D$, on a

$$\frac{\partial x_h}{\partial s_i} = \int \frac{\partial}{\partial s_i} \omega_h(|s-t|)\, x(t)\, dt = -\int \frac{\partial}{\partial t_i} [\omega_h(|s-t|)]\, x(t)\, dt =$$
$$= \int \omega_h(|s-t|)\, x^{(i)}(t)\, dt = (x^{(i)})_h \to x^{(i)}$$

pour h assez petit, d'où il est clair que $x^{(i)}$ est dérivée distributionnelle de x.

On introduit de façon analogue les dérivées distributionnelles d'ordres supérieurs. On établit de même par récurrence la complétude et la séparabilité des espaces $W_p^{(l)}$ obtenus à partir de $\tilde{W}_p^{(l)}$ par adjonction des fonctions dont les dérivées distributionnelles d'ordre l sont de puissance p-ième sommable. Ces espaces sont appelés *espaces de Sobolev*.

S'agissant des espaces $W_p^{(l)}$, l'immersion de l'un d'eux dans un autre ($W_p^{(l)} \subset W_q^{(m)}$) n'exprime pas seulement une inégalité intégrale mais aussi le fait que toute fonction, élément de $W_p^{(l)}$, sera aussi élément de $W_q^{(m)}$ $\left(\text{ce sera le cas si } q < \frac{\mu p}{\mu - (l-m)p}\right)$**). La der-

*) Dans l'espace $W_p^{(1)}$ la norme est définie par la formule (20) sauf qu'il faut y remplacer les dérivées ordinaires par les dérivées distributionnelles.

**) A cette condition l'immersion de $W_p^{(l)}$ dans $W_q^{(m)}$ est compacte.

nière circonstance est loin d'être aussi triviale que pour les espaces $\widetilde{W}_p^{(l)}$.

Notons enfin le fait important que l'on peut munir l'espace $W_p^{(l)}$ d'une norme par d'autres procédés équivalents au précédent.

Soit $f_1, f_2, \ldots, f_k$ un système de fonctionnelles linéaires continues dans $W_p^{(l)}$, tel que les égalités

$$f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x) = 0,$$

$$\int_D \Big[\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_l = 1}^{\mu} \Big[\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_l}} \Big]^2 \Big]^{p/2} dt = 0 \tag{31}$$

entraînent que $x = 0$. Un tel système est dit *déterminant*.

Etablissons l'inégalité

$$\| x \|_{W_p^{(l)}} \leqslant B \Big\{ |f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_k(x)| + \\ + \Big[\int_D \Big[\sum_{i_1, \ldots, i_l} \Big(\frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_l}} \Big)^2 \Big]^{p/2} dt \Big]^{1/p} \Big\}, \tag{32}$$

où B est une constante. En effet, si une telle constante n'existait pas. il existerait une suite $\{x_n\}$ telle que $\| x_n \| = 1$ et

$$| f_1(x_n) | + \ldots + | f_k(x_n) | + \\ + \Big\{ \int_D \Big[\sum_{i_1, \ldots, i_l} \Big(\frac{\partial^l x_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_l}} \Big)^2 \Big]^{p/2} dt \Big\}^{1/p} = \varepsilon_n \to 0. \tag{33}$$

Les valeurs moyennes de la fonction x_n et de ses dérivées distributionnelles jusqu'à l'ordre $l - 1$ étant inférieures ou égales à $\| x_n \| = 1$, de la suite $\{x_n\}$ on peut extraire une suite partielle $\{x_{n_k}\}$ telle que les valeurs moyennes des fonctions x_{n_k} et de leurs dérivées formeront des suites convergentes. Compte tenu de (33) on trouve $\| x_{n_k} - x_{n_j} \| \to 0$. L'espace $W_p^{(l)}$ étant complet, il existe $y = \lim x_{n_k} \in W_p^{(l)}$. En appliquant encore (33), on trouve que x vérifie les conditions (31), de sorte que $x = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc établi l'inégalité (32). L'inégalité inverse découle de la continuité des fonctionnelles $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Donc, pour norme dans $W_p^{(l)}$ on peut prendre l'expression

$$\| x \| = | f_1(x) | + | f_2(x) | + \ldots + | f_k(x) | + \\ + \Big\{ \int_D \Big[\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_l} \Big| \frac{\partial^l x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_l}} \Big|^2 \Big]^{p/2} dt \Big\}^{1/p}.$$

On peut aussi prendre d'autres expressions. Par exemple

$$\|x\| = \left\{ \int_D \left[\sum_{k=0}^{l} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{\mu} \left| \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_k}} \right|^2 \right]^{p/2} dt \right\}^{1/p}.$$

Signalons que muni d'une telle norme l'espace $W_2^{(l)}$ est un hilbertien, le produit scalaire y étant défini par

$$(x, y) = \int_D \sum_{k=1}^{l} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{\partial^k x}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_k}} \frac{\partial^k y}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \ldots \partial t_{i_k}} dt.$$

Indiquons encore le fait important suivant. Soit donnée l'immersion des espaces $W_q^{(m)}(S) \supset W_p^{(l)}(D)$, où S est une variété de dimension ν, contenue dans le domaine D. On peut envisager les valeurs des dérivées m-ièmes d'une fonction de $W_p^{(l)}(D)$ sur la surface S, qui sont définies comme des fonctions de puissance q-ième sommable sur S. Si les théorèmes d'immersion assurent la continuité des dérivées distributionnelles d'un certain ordre, il est aisé d'établir l'existence de ces dérivées au sens ordinaire *).

Enfin, il est utile de noter que, si les fonctions de $W_p^{(l)}(D)$ sont assujetties à des conditions linéaires, portant sur la valeur des dérivées m-ièmes sur la surface S, $W_p^{(l)}(D) \subset W_q^{(m)}(S)$, alors ces conditions définissent un ensemble fermé (et linéaire) dans l'espace $W_p^{(l)}(D)$.

4.6. En conclusion, à titre d'application nous démontrons l'existence d'une solution du problème de Dirichlet par la méthode variationnelle.

Soit le problème aux limites

$$\Delta x = 0, \quad x|_S = \varphi. \tag{34}$$

On cherchera la solution parmi les fonctions dont est finie l'intégrale de Dirichlet

$$H(x) = \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial t_k} \right)^2 dt < \infty \tag{35}$$

c'est-à-dire on admettra que $x \in W_2^{(1)}(D)$. D'où, en vertu du théorème 4, il résulte que $x \in L^2(S)$. En effet, la variété S est de dimension $\mu - 1$ et

$$q = 2 < \frac{(\mu-1)2}{\mu-2} = 2 + \frac{2}{\mu-2}, \quad \nu = \mu - 1 > \mu - 2 = \mu - p.$$

Ceci étant,

$$\int_S |x(s+\Delta s) - x(s)|^2 ds \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0,$$

*) Plus exactement, l'une des fonctions équivalentes correspondant à x jouira de cette propriété.

c'est-à-dire les valeurs de la fonction x sur la surface frontière sont les limites (moyennes) de ses valeurs à l'intérieur (sur la surface translatée).

Donc, une fonction à intégrale de Dirichlet finie doit avoir des valeurs frontière, de carré sommable sur la surface.

Cependant toute fonction φ définie sur S et de carré sommable ne peut être prise pour valeur frontière. Nous dirons que φ est *permise* si existe une fonction $x \in W_2^{(1)}(D)$ telle que $\varphi = x \mid_S$.

Dans le problème aux limites (34), on admet que φ est permise.

Désignons par $W_2^{(1)}(\varphi)$ l'ensemble des fonctions de $W_2^{(1)}(D)$ dont les valeurs frontière sur S sont égales à φ. Pour $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ on a $0 \leqslant H(x) < \infty$, donc

$$\inf \{H(x) : x \in W_2^{(1)}(\varphi)\} = d$$

existe et est fini. Construisons la suite $\{x_n\} \subset W_2^{(1)}(\varphi)$ qui minimise la fonctionnelle H, c'est-à-dire telle que

$$d = \lim_{n \to \infty} H(x_n).$$

THÉORÈME 7. *La suite minimisante $\{x_n\}$ est convergente dans $W_2^{(1)}$; la fonction limite appartient à l'ensemble $W_2^{(1)}(\varphi)$ et réalise le minimum de la fonctionnelle H.*

DÉMONSTRATION. Si l'on munit $W_2^{(1)}$ du produit scalaire

$$(x, y) = \int_S x(s)\, y(s)\, ds + \int_D \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x}{\partial t_k} \frac{\partial y}{\partial t_k}\, dt \quad (x, y \in W_2^{(1)}),$$

on fait de lui un espace hilbertien. Ceci étant, la norme de tout élément $x \in W_2^{(1)}(\varphi)$ et la valeur de la fonctionnelle H sur cet élément sont liées par la relation

$$\| x \|^2 = \int_S |\varphi(s)|^2 ds + H(x). \tag{36}$$

Désignons par $\dot{W}_2^{(1)}$ l'ensemble de tous les $x \in W_2^{(1)}$ nuls sur S. Comme indiqué à la fin de 4.5, $\dot{W}_2^{(1)}$ est un sous-espace fermé de $W_2^{(1)}$.

Soit un élément $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$. On peut admettre que x_0 est orthogonal au sous-espace $\dot{W}_2^{(1)}$. En effet, dans le cas contraire on peut mettre x_0 sous la forme $x_0 = x_0' + x_0''$, où x_0' est orthogonal à $\dot{W}_2^{(1)}$, et $x_0'' \in \dot{W}_2^{(1)}$. Comme

$$x_0' |_S = x_0 |_S - x_0'' |_S = \varphi,$$

alors $x_0' \in W_2^{(1)}(\varphi)$ et au lieu de x_0 on peut considérer x_0'.

Prouvons que $H(x_0) = d$. Soit x un élément quelconque de $W_2^{(1)}(\varphi)$. Comme la différence $x - x_0 \in \mathring{W}_2^{(1)}$, elle est orthogonale à x_0. Donc, en vertu de (36)

$$H(x) - H(x_0) = \| x \|^2 - \| x_0 \|^2 = \| x - x_0 \|^2 \geqslant 0, \quad (37)$$

c'est-à-dire

$$d \leqslant H(x_0) \leqslant \inf H(x) = d,$$

ou encore $d = H(x_0)$.

En faisant $x = x_n$ dans (37), on obtient

$$H(x_n) - H(x_0) = \| x_n - x_0 \|^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or $H(x_0) = d$, donc $H(x_n) - H(x_0) \to 0$. Et par suite $x_n \to x_0$. C.q.f.d.

Remarque. La relation (37) exprime que l'élément $x_0 \in W_2^{(1)}(\varphi)$ réalisant le minimum de la fonctionnelle H est unique.

Nous ne nous attarderons pas sur la démonstration du fait que la fonction x_0 qui minimise la fonctionnelle H est la solution unique du problème aux limites (34). Pour ce point et pour d'autres applications des théorèmes d'immersion à la physique mathématique nous renvoyons le lecteur à la monographie de S. Sobolev (cf. Sobolev [I]) qui les traite méthodiquement.

D'autres détails sur les théorèmes d'immersion sont accessibles dans Sobolev [I], [II]; Bessov, Ilyne et Nikolski.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages d'analyse fonctionnelle

AHIEZER N., GLAZMAN I.
Théorie des opérateurs linéaires dans l'espace hilbertien. Moscou, 1966 (en russe).

AKILOV G., MAKAROV B., HAVINE V.
Introduction élémentaire à la théorie de l'intégrale. Izd. LGU, 1969 (en russe).

ALEXANDROV P.
Introduction à la théorie générale des ensembles et des fonctions. M., Gostekhizdat, 1948 (en russe).

ANTONOVSKI M., BOLTIANSKI V., SARYMSAKOV T.
Algèbres topologiques de Boole. Izd. AN OuzSSR, 1963 (en russe).

BAKELMAN I.
Méthodes géométriques de résolution des équations elliptiques. M., « Naouka », 1965 (en russe).

BANACH S.
Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.

BESSOV O., ILYNE V., NIKOLSKI S.
Représentations intégrales des fonctions et théorèmes d'immersion. M., « Naouka », 1975 (en russe).

BIRKHOFF G.
Lattice Theory. N.Y., 1948.

BIRMAN M. et autres
Analyse fonctionnelle (dans la série « Spravotchnaya matematitcheskaya bibliotéka »). M., « Naouka », 1972 (en russe).

BOURBAKI N.

I. Eléments de mathématique. Première partie. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre 1. Description de la mathématique formelle. Chapitre 2. Théorie des ensembles. Deuxième édition. Paris, Hermann, 1960.

II. Eléments de mathématique. Première partie. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre III. Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers. Paris, Hermann et C°, 1956.

III. Eléments de mathématique I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre IV. Structures. Paris, Hermann, 1957.

IV. Eléments de mathématique I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Fascicule des résultats. Troisième édition. Paris, Hermann, 1958.

V. Eléments de mathématique. Livre III. Topologie générale. Chapitre I. Structures topologiques. Chapitre II. Structures uniformes. Troisième édition. Paris, Hermann.
VI. Eléments de mathématique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Paris, 1955.
VII. Eléments de mathématique. Première partie. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre VI. Intégration. Mesures, intégration des mesures. Paris, Hermann et C°.
VIII. Eléments de mathématique. Première partie. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre VI. Intégration. Intégration vectorielle, mesure de Haar, convolution et représentations. Paris.
IX. Théories spectrales. Chapitre I. Algèbres normés. Chapitre II. Groupes localement compacts. Paris, Hermann, 1967.

CHILOV G.
I. Analyse mathématique. Cours spécial. M., Fizmatguiz, 1961.
II. Analyse mathématique. Deuxième cours spécial. M., « Naouka », 1965.

CHILOV G., HUREWICZ B.
Intégrale, mesure et dérivée. M., « Naouka », 1964 (en russe).

COLLATZ L.
Funktionalanalysis und numerische Mathematik. B. R. D., 1964.

DAY M.
Normed Linear Spaces, Berlin, 1958.

DÉMIANOV V., MALOZÉMOV V.
Introduction au minimax. M., « Naouka », 1972 (en russe).

DÉMIANOV V., ROUBINOV A.
Méthodes approchées de résolution des problèmes d'extrémum. L., Izdvo LGU, 1968 (en russe).

DIESTEL J.
Geometry of Banach Spaces., Selected topics, Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

DIEUDONNÉ J.
Foundations of Modern Analysis, N.Y., 1960.

DINCULEANU N.
Vector measures. Berlin, 1966.

DUNFORD N., SCHWARTZ J.
I. Linear Operators. General Theory. N.Y., 1958.
II. Linear Operators. Spectral Theory. N.Y., 1963.
III. Linear Operators. Spectral Operators. N.Y., 1971.

EDWARDS R.
Functional Analysis. Theory and Applications. N.Y., 1965.

FADDÉEV D., FADDÉEVA V.
Méthodes numériques d'algèbre linéaire. M., Fizmatguiz, 1963 (en russe).

FIKHTENGOLTZ G.
Cours de calcul différentiel et intégral. Tomes I, II, III. M., « Naouka », 1966 (en russe).

FREMLIN D.H.
Topological Riesz spaces and measure theory, Cambridge Univ. Press, 1974.

GAVOURINE M.
Cours sur les méthodes de calcul. M., « Naouka », 1971 (en russe).

GLAZMAN I., LUBITCH Y.
Analyse linéaire dans les espaces à dimensions finies. Editions Mir, Moscou, 1972.

GOLDSTEIN E.
Théorie de la dualité en programmation mathématique et ses applications. M., « Naouka », 1971.

GUELFAND I., CHILOV G.
Les distributions. Editions Dunod.
Tome 1. Les distributions.
Tome 2. Espaces fondamentaux.
Tome 3. Théorie des équations différentielles.

GUELFAND I., RAÏKOV D., CHILOV G.
Anneaux normés commutatifs. M., Fizmatguiz, 1960 (en russe).

GUELFAND I., VILENKINE N.
Les distributions. Editions Dunod. Tome 4. Applications de l'analyse harmonique.

HALMOS P.
Measure Theory. N.Y., 1950.

HARDY G., LITTLEWOOD J. a.o.
Inequalities. Cambridge, 1934.

HAUSDORFF F.
Théorie des ensembles. M., 1937.

HAVINE V.
Espaces de fonctions analytiques. V. zb. « Math. analiz. 1964 (Itogui Naouki, BINITI An SSSR) ». M., 1966 (en russe).

HÖRMANDER L.
Linear Partial Differential Operators. N.Y., 1963.

HILBERT D.
Grundzüge einer allgemeine Theorie der Integralgleichungen. Leipzig, 1912.

HILLE E., PHILLIPS R.
Functional Analysis and Semi-Groups, Providens, 1957.

HOFFMAN K.
Banach Spaces of Analytic Functions, Englewood Cliffs, 1962.

IOFFE A., TIKHOMIROV V.
Théorie des problèmes d'extrémum. M., « Naouka », 1974.

KADETS M.
Géométrie des espaces normés. V. sb. « Mathem. analiz. 1975 (Itogui naouki. VINITI AN SSSR) ». M., 1975 (en russe).

KANTOROVITCH L., KRYLOV V.
Méthodes approchées d'analyse supérieure. M.-L., Fizmatguiz, 1962 (en russe).

KANTOROVITCH L., VOULIKH B., PINSKER A.
Analyse fonctionnelle dans les espaces semi-ordonnés. M.-L., Gostekhizdat, 1950 (en russe).

KARLIN S.
Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Vols. 1, 2. London, 1959.

KELLEY J.
Topologie générale. M., 1968.

KOLMOGOROV A., FOMINE S.
Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Editions Mir, Moscou, 1974.

KOROTKOV V.
Opérateurs intégraux. Novossibirsk, izd-vo NGU, 1977 (en russe).

KOUTATÊLADZÊ S., ROUBINOV A.
La dualité de Minkowski et ses applications. Novossibirsk, « Naouka », 1976 (en russe).

KRASNOSSELSKI M.
I. Méthodes topologiques en théorie des équations intégrales non linéaires. M., Gostekhizdat, 1956 (en russe).
II. Solutions positives des équations opératorielles. M., Fizmatguiz, 1962 (en russe).

KRASNOSSELSKI M. et autres
Résolution approchée des équations opératorielles. M., « Naouka », 1969 (en russe).

KRASNOSSELSKI M. et autres
Opérateurs intégraux dans les espaces de fonctions sommables. M., « Naouka », 1966 (en russe).

KRASNOSSELSKI M., ROUTITSKI Y.
Fonctions convexes et espaces d'Orlicz. M., Fizmatguiz, 1958 (en russe).

KRYLOV N.
Méthodes de résolution approchée des problèmes de physique mathématique. Izbrani troudy, t. 2, 150-204, Izd. AN USSR, Kiev, 1961 (en russe).

LADYJENSKAÏA O.
Problèmes aux limites de physique mathématique. M., « Naouka », 1973 (en russe).

LINDENSTRAUSS J., TZAFRIRI L.
Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math., 338, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

LUSTERNIK L., SOBOLEV V.
Eléments d'analyse fonctionnelle. M., « Naouka », 1965 (en russe).

LUXEMBURG W. A. J., ZAANEN A. C.
Riesz Spaces, v. I, Amsterdam, 1971.

MIKHLINE S.
I. Réalisation numérique des méthodes variationnelles. M., « Naouka », 1966 (en russe).
II. Méthodes variationnelles en physique mathématique. M., « Naouka », 1968 (en russe).

NAÏMARK M.
Anneaux normés. M., « Naouka », 1968 (en russe).

NAKANO H.
Modulared semi-ordered linear spaces, Tokyo, Maruzen Co., LTD, 1950.

NATANSON I.
I. Théorie constructive des fonctions. M., Gostekhizdat, 1949 (en russe).
II. Théorie des fonctions d'une variable réelle. M., « Naouka », 1974 (en russe).

NIKAÏDO H.
Convex Structures and Economic Theory. N.Y., 1968.

NIKOLSKI N.
Problèmes choisis d'approximation pondérée et d'analyse spectrale. Troudy Math. in-ta V. Stéklova, 120, « Naouka », L., 1974 (en russe).

PCHÊNYTCHNI B.
Conditions nécessaires d'extrémum. M., « Naouka », 1969 (en russe).

PÊTROVSKI I.
Cours sur la théorie des équations intégrales. M., « Naouka », 1965 (en russe).

PHELPS R.
Lectures on Choquet's Theorem, N. Y., 1966.

PHILLIPOV A., RIABENKI V.
Sur la stabilité des équations aux différences. M., Gostekhizdat, 1956 (en russe).

PLESNER A.
Théorie spectrale des opérateurs linéaires. M., « Naouka », 1965 (en russe).

RIESZ F., SZ.-NADY B.
Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, 1953.

ROBERTSON A., ROBERTSON W.
Topological Vector Spaces. Cambridge, 1964.

ROCKAFELLAR R.
Convex Analysis. Princeton, 1970.

RUBINSTEIN G.
Modèles d'optimisation en dimension finie. Novossibirsk, « Naouka », 1970 (en russe).

RUDIN W.
Functional Analysis. N.Y., 1973.

SCHAEFER H.
I. Topological Vector Spaces. N.Y., 1966.
II. Banach lattices and positive operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

SCHWARTZ L.
Théorie des distributions, t. I-II. Paris, 1950-1951.

SINGER I.
Bases, in Banach spaces, v. I. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

SMIRNOV V.
Cours de mathématiques supérieures, t. 5. M., Fizmatguiz, 1959 (en russe).

SOBOLEV S.
I. Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique. Izd-vo LGU, 1950 (en russe).
II. Introduction à la théorie des formules de cubature. M., « Naouka », 1974 (en russe).

SZEGÖ G.
Polynômes orthogonaux. M., Fizmatguiz, 1962 (en russe).

TIKHOMIROV V.
Quelques problèmes de la théorie des approximations. M., Izd-vo MGU, 1976 (en russe).

VAÏNIKKO G.
Approximation compacte des opérateurs et résolution approchée des équations. Tartou, Izd. Tartouskovo gos. un-ta, 1970 (en russe).

VLADIMIROV D.
Algèbre de Boole. M., « Naouka », 1969 (en russe).

VOROBIEV Y.
Méthode des moments en mathématiques appliquées. M., Fizmatguiz, 1958 (en russe).

VOULIKH B.
I. Introduction à la théorie des espaces semi-ordonnés. M., Fizmatguiz, 1961 (en russe).
II. Introduction à l'analyse fonctionnelle. M., « Naouka », 1967 (en russe).

III. Précis de la théorie des fonctions d'une variable réelle. M., « Naouka », 1973 (en russe).
IV. Introduction à la théorie des cônes dans les espaces normés. Izd. KGU, Kalinine, 1977 (en russe).

YOSIDA K.
Functional Analysis. Berlin, 1965.

ZAANEN A.
I. Linear Analysis. Amsterdam, 1960.
II. Integration. Amsterdam, 1967.

ZYGMUND A.
Trigonometric Series, Vol. 1, Cambridge, 1959; Vol. 2, Cambridge, 1960.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages utilisés

ABRAMOVITCH Y.

1. Quelques théorèmes sur les espaces de Riesz normés. Vestnik LGU, n° 13 (1971), 5-11 (en russe).

AGAKHANOV S., NATANSON G.

1. Fonction de Lebesgue des sommes de Fourier-Jacobi. Vestnik LGU, n° 1 (1968), 11-23 (en russe).

AKILOV G.

1. Sur le prolongement des opérations linéaires. DAN SSSR 57, n° 7 (1947), 643-646 (en russe).
2. Conditions nécessaires de prolongement des opérations linéaires. DAN SSSR 59, n° 3 (1948), 417-418 (en russe).
3. Sur l'application d'une méthode de résolution des équations différentielles non linéaires à l'étude de systèmes d'équations différentielles. DAN SSSR 68, n° 4 (1949), 645 (en russe).

ALSYNBAÉV K., IMOMNAZAROV B., RUBINSTEIN G.

1. Problème de déplacement d'une masse sur un compact muni d'une métrique non symétrique. V sb. Optimizatsia, vyp. 17 (34), Novossibirsk, 1975, 94-107 (en russe).

ANDO T.

1. Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Arch. Wiskunde 8, n° 1 (1960), 4-16.

ARONSZAIN N., SMITH K.

1. Invariant subspaces of completely continuous operators. Ann. Math. 60 (1954), 345-350.

BALOUEV A.

1. Sur la méthode de S. Tchapliguine. Vestnik LGU, n° 13 (1956), 27-42 (en russe).

BANACH S.

1. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales. Fund. Math. 3 (1922), 133-181.
2. Sur les fonctionnelles linéaires II. Studia Math. 1 (1929), 223-240.

BANACH S., STEINHAUS H.

1. Sur le principe de la condensation de singularités. Fund. Math. 9 (1927), 50-61.

BERKOLAÏKO M., RUTITSKI Y.

1. Sur les opérateurs dans les espaces généralisés de Helder, Sib. mathem. journal 12, 5 (1971), 1015-1025 (en russe).

BERMAN D.
1. Sur une classe d'opérations linéaires. DAN SSSR 85, 1 (1952), 13-16 (en russe).

BIRMAN M.
1. Quelques estimations pour la méthode de plus forte pente. UMN 5, n° 3 (1950), 152-155 (en russe).
2. Sur le calcul des valeurs propres par la méthode de plus forte pente. Zap. Léningrad. gornovo in-ta, 27, n° 1 (1952), 209-216 (en russe).

BIRMAN M., SOLOMIAK M.
1. Estimations des valeurs singulières des opérateurs intégraux. UMN 32, 1 (1977), 17-84 (en russe).

BOUKHVALOV A.
1. Sur les espaces localement convexes engendrés par des ensembles faiblement compacts. Vestnik LGU, n° 7 (1973), 11-17 (en russe).
2. Sur les espaces de norme mixte. Vestnik LGU, n° 19 (1973), 5-12 (en russe).
3. Sur la représentation intégrale des opérateurs linéaires. Zap. naoutch. séminarov Lening. otd. Mathem. in-ta AN SSSR, 47 (1974), 5-14 (en russe).
4. Opérateurs intégraux et représentation de fonctionnelles complètement linéaires sur des espaces de norme mixte. Sib. math. journ. 16, n° 3 (1975), 483-493 (en russe).
5. Sur la représentation analytique des opérateurs de norme abstraite. Izvestia vouzov, Mathem., n° 11 (1975), 21-32 (en russe).

BOUKHVALOV A., LOZANOVSKI G.
1. Sur les ensembles fermés pour la mesure dans des espaces de fonctions mesurables. Troudy Moskovskovo mathem. ob-va, 34 (1976), 128-149 (en russe).

BROUWER L. E. F.
1. Über Abbindung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1911), 97-115.

CURRY H. B.
1. The method of steepest descent for noulinear minimization problem. Quart. Appl. Math. 2, 3 (1944), 268-271.

DAOUGAVET I.
1. Application de la théorie générale des méthodes d'approximation à l'étude de la convergence de la méthode de Galerkine pour certains problèmes aux limites de physique mathématique. DAN SSSR 98, 6 (1954) (en russe).
2. Sur la méthode des moments pour une équation différentielle ordinaire. Sib. mathem. journ. 6, 1 (1965), 70-85 (en russe).

DOUBOVITSKI A., MILIOUTINE A.
1. Problèmes d'extrémum moyennant des contraintes. JVM et MF 5, n° 3 (1965), 395-453 (en russe).
2. Conditions nécessaires d'extrémum faible dans les problèmes de commande optimale avec des contraintes mixtes de type inégalités. JVM et MF 8, n° 4 (1968), 725-779 (en russe).

DUNFORD N., PETTIS B. J.
1. Linear operators on summable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 47, n° 3 (1940), 323-392.

EKHLAKOV N.
1. Existence de transports optimaux de la mesure de Lebesgue avec densités. V zb. Optimizatsia, vyp. (15) (32), Novossibirsk, 1974, 90-114 (en russe).

ENFLO P.
1. A countreexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math. 130, n° 3-4 (1973), 309-317.

ERMOLIEV Y., CHOR N.
1. Sur la minimisation de fonctions non dérivables. « Kibernétika », 1 (1967), 101, 102 (en russe).

FICHTENHOLZ G., KANTOROVITCH L.
1. Sur les opérations linéaires dans l'espace de fonctions bornées. Studia math. 5 (1935), 69-98.

FRÉCHET M.
1. Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Math. di Palermo 22 (1906), 1-74.
2. Sur les ensembles des fonctions et les opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. (Paris), 144, (1907), 1414-1416.
3. Sur les fonctionnelles continues. Ann. Ec. Norm. 27, n° 3 (1910), 193-216.

FREUDENTHAL H.
1. Teilweise geordnete Moduln. Proc. Acad Sei. Amsterdam, 39 (1936), 641-651.

FRIEDMAN V.
1. Sur la convergence des méthodes du type de plus forte pente. UMN 17, 3 (1962), 201-204 (en russe).

GATEAUX R.
1. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques. C. R. Acad. Sci. (Paris) 157 (1913), 325-327.

GAVOURINE M.
1. Über die Stiltjessche Integration abstrakten Funktionen. Fund. Math. 27 (1936), 254-268.
2. Méthodes analytiques d'étude des transformations fonctionnelles. Outch. zap. LGU, ser. mathem., 19 (1950), 59-154 (en russe).
3. Sur les estimations pour les valeurs et les vecteurs propres d'un opérateur perturbé. DAN SSSR 96, n° 6 (1954), 1093-1095 (en russe).
4. Equations fonctionnelles non linéaires et analogues continus des méthodes d'itération. Izvestia vouzov, Mathem., n° 5 (1958), 18-31 (en russe).

GONTCHAROV V.
1. Théorie d'interpolation et approximations des fonctions. Izd. 2-e, Gostekhizdat, M.-L., 1954 (en russe).

GRIBANOV Y.
1. Sur la mesurabilité d'une fonction. Izvestia vouzov, Mathem., n° 3 (1970), 22-26 (en russe).
2. Sur la mesurabilité des noyaux des opérateurs intégraux. Izvestia vouzov, Mathem., n° 7 (1972), 31-34 (en russe).

GROTHENDIECK A.
1. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C (K). Canad. J. Math. 5 (1953), 129-173.
2. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

GUELFAND I.
1. Abstrakte Functionen und lineare Operatoren. Math. zb. 4 (46) (1938), 235-286.

GUNTER N.
1. Théorie du potentiel. Gostekhizdat, M.-L., 1952 (en russe).

HARRIK I.
1. Sur un analogue de l'inégalité de Markov. DAN SSSR 106, n° 2 (1956), 203-206 (en russe).
2. Sur les approximations de fonctions s'annulant sur la frontière du domaine avec leurs dérivées partielles par des fonctions spéciales. Sib. mathem. journ. 4, n° 2 (1963), 408-425 (en russe).

HELLINGER E., TOEPLITZ O.
1. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Ann. 69 (1910), 289-330.
2. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Enciclopädie der matematische Wissenschaften, Bd II, C 13 (1927), 1335-1616.

HILDEBRANDT T. H.
1. Über vollstetige lineare Transformationen. Acta Math., 51 (1928), 311-318.

JAMES R.
1. A non-reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate spaces. Proc. Nat. Acad. U.S.A. 37, n° 3 (1951), 174-177.

KADETZ M., MITIAGUINE B.
1. Sous-espaces complémentables dans les espaces de Banach. UMN 28, n° 6 (1973), 77-94 (en russe).

KAKUTANI S.
1. Some characterizations of Euclidean space. Jap. Jorn. Math. 16, n° 2 (1939), 93-98.
2. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. 8, n° 3 (1941).

KALANDIA A.
1. Sur une méthode directe de résolution de l'équation de la théorie de l'aile et son application à la théorie de l'élasticité. Mathem. sb. 42 (1957) (en russe).

KANTOROVITCH L.
1. Sur une nouvelle méthode de résolution approchée d'équations aux dérivées partielles. DAN SSSR 2, n° 8-9 (1934), 532-536 (en russe).
2. Sur les espaces vectoriels semi-ordonnés et leurs applications à la théorie des opérations linéaires. DAN SSSR 4 (1935), 11-14 (en russe).
2a. Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires. Comptes Rendus. Ac. de Sc. 202 (1936), 813-816.
3. Lineare halbgeordnete Raüme. Math. Sbornik 2 (44), 1937, 121-168.
4. The method of successive approximations for functional equations. Acta math. 71 (1939), 52-68.
4a. Linear operations in semiordered Spaces I. Mathem. sbornik 7 (49) (1940), 209-284.
5. Méthodes mathématiques d'organisation et de planification de la production. Izd. LGU, L., 1939 (en russe).
6. Sur le déplacement des masses. DAN SSSR 37, n° 7-8 (1942), 227-229 (en russe).
7. Sur une méthode efficace de résolution des problèmes d'extrémum pour une fonctionnelle quadratique. DAN SSSR 48, n° 7 (1945), 483-487 (en russe).
8. Sur un problème de Monge. UMN 3, n° 2 (1948), 225-226 (en russe).
9. Analyse fonctionnelle et mathématiques appliquées. UMN 3, n° 6 (1948), 89-185 (en russe).
10. Principe du majorant et méthode de Newton. DAN SSSR 76 (1951), 17-20 (en russe).
11. Sur les opérateurs intégraux. UMN 11, n° 2 (1956), 3-29 (en russe).

12. Sur certaines applications ultérieures de la méthode de Newton. Vestnik LGU, n° 7 (1957), 68-103 (en russe).

KANTOROVITCH L., AKILOV G., RUBINSTEIN G.
1. Etats extrémaux et commandes extrémales. Vestnik LGU, n° 7 (1967), 30-37 (en russe).

KANTOROVITCH L., GAVOURINE M.
1. Application des méthodes mathématiques dans les problèmes d'analyse des transports. Sb. stateï « Problémy povichénia effektivnosti raboti transporta ». Izd. AN SSSR, 1949, str. 110-138 (en russe).

KANTOROVITCH L., RUBINSTEIN G.
1. Sur un espace fonctionnel et quelques problèmes d'extrémum. DAN SSSR 115, n° 6 (1957), 1058-1061 (en russe).
2. Sur un espace de fonctions complètement additives. Vestnik LGU, n° 7 (1958), 52-59 (en russe).

KANTOROVITCH L., VOULIKH B.
1. Sur la représentation des opérations linéaires. Comp. Math. 5 (1937), 119-165.

KARPILOVSKAÏA E.
1. Sur la convergence d'une méthode d'interpolation pour les équations différentielles ordinaires. UMN 8, n° 3 (1953), 111-118 (en russe).
2. Sur la convergence de la méthode des sous-domaines pour les équations intégro-différentielles ordinaires. Sib. mathem. journ. 4, 3 (1963), 632-640 (en russe).

KELDYCH M.
1. Sur la méthode de Galerkine pour la résolution de problèmes aux limites. Izv. AN SSSR, ser. mathem., 6 (1942), 309-330 (en russe).

KELLEY J.
1. Banach spaces with the extension property. Trans. Amer. Math. Soc. 72, n° 2 (1952), 323-326.

KIS O.
1. Sur la convergence de la méthode de collocation. Acta Math., Acad. Sei. Hung., 17, 3-4 (1966).

KOCHELEV A.
1. Méthode de Newton et solutions généralisées des équations non linéaires de type elliptique. DAN SSSR 91, n° 6 (1953), 1263-1266 (en russe).
2. Existence de la solution généralisée d'un problème de torsion élasto-plastique. DAN SSSR 99, n° 3 (1954), 357-360 (en russe).

KOLMOGOROV A.
1. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. 5 (1934), 29-33.

KOROTKOV V.
1. Opérateurs intégraux dont les noyaux vérifient les conditions de Carleman et d'Ahiezer I. Sib. Math. journ. 12, n° 5 (1971), 1041-1055 (en russe).
2. Représentations intégrales d'opérateurs linéaires. Sib. math. journ. 15, n° 3 (1974), 529-545 (en russe).

KRASNOSSELSKI M.
1. Quelques problèmes d'analyse non linéaire. UMN 9, n° 3 (1954), 57-114 (en russe).
2. Sur quelques nouveaux principes du point fixe. DAN SSSR 208, n° 6 (1973), 1280-1281 (en russe).
3. Sur les équations opératorielles quasi linéaires. DAN SSSR 214, n° 4 (1974), 761-764 (en russe).

KRASNOSSELSKI M., KREIN S.
1. Processus itératif avec des résidus minimaux. Mathem. sb. 31 (1952), 315-334 (en russe).

KRASNOSSELSKI M., TCHÊTCHIK V.
1. Sur un théorème de L. Kantorovitch. Tr. seminara po funkts. analizou, vyp. 3-4, Rostovsk. n/D, un-t, VGU (1960), 50-53 (en russe).

KREIN S., PÊTOUNINE Y.
1. Echelles des espaces de Banach. UMN 21, 2 (1966), 89-168 (en russe).

KREIN S., RUTMAN M.
1. Opérateurs linéaires laissant invariant un cône dans un espace de Banach. UMN 3, 1 (1948), 3-95 (en russe).

LERAY G. et SCHAUDER J.
1. Topologie et équations fonctionnelles. UMN 1, n° 3-4 (1946), 71-95.

LEVINE V.
1. Sur le problème de déplacement d'une masse. DAN SSSR 224, n° 5 (1975), 1016-1019 (en russe).
2. Problèmes d'extrémums avec des fonctionnelles convexes semi-continues inférieurement pour la convergence en mesure. DAN SSSR 224, n° 6 (1975), 1256-1259 (en russe).
3. Sur les théorèmes de dualité pour le problème de Monge-Kantorovitch, UMN 32 (1977) (en russe).
4. Problème de Monge-Kantorovitch sur le déplacement d'une masse. V kn. « Metodi founktsionalnovo analiza v matematitcheskoï ekonomiké ». M., « Naouka », 1977 (en russe).

LEVINE A., STRYGUINE V.
1. Sur la vitesse de convergence de la méthode de Newton-Kantorovitch. UMN 17, 3 (1962), 185-187 (en russe).

LIOUBITCH Y., MAÏSTROVSKI G.
1. Théorie générale des processus de relaxation pour les fonctionnelles convexes. UMN 25, n° 1 (1970), 57-112 (en russe).

LOMONOSSOV V.
1. Sur les sous-espaces invariants d'une famille d'opérateurs commutant avec des opérateurs complètement continus. Founktsionalni analiz i evo prilojénié, 7, n° 3 (1973), 55-56 (en russe).

LOZANOVSKI G.
1. Sur les espaces réticulés de Banach isomorphes. Sib. math. journ. 10, n° 1 (1969), 93-98 (en russe).
2. Sur certains espaces réticulés de Banach. Sib. math. journ. 10, n° 3 (1969), 584-599 (en russe).
3. Sur les fonctionnelles localisées dans les espaces de Riesz. Sb. « Théoria founktsii, founkts. an. i ich prilojénié », Kharkov, vyp. 19 (1974), 66-80 (en russe).

LOZINSKI S.
1. Les espaces $\widetilde{C}_\omega$ et $\widetilde{C}^*_\omega$ et la convergence des processus d'interpolation. DAN SSSR 59, n° 8 (1948), 1389-1392 (en russe).
2. Fonctions inverses, fonctions implicites et résolution d'équations. Vestnik LGU, n° 7 (1957), 131-142 (en russe).

LUXEMBURG W. A. J.
1. Notes on Banach Function Spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam A68 (1965), 229-248, 415-446, 646-667.

LUXEMBURG W. A. J., ZAANEN A. C.
1. Notes on Banach Function Spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam A66 (1973), 135-153, 239-263, 496-504, 655-681; A67 (1964), 104-119, 360-376, 493-543.

MYSSOVSKIKH I.
1. Sur la convergence de la méthode de Kantorovitch de résolution des équations fonctionnelles et son application. DAN SSSR 70, n° 4 (1950), 565-568 (en russe).
2. Sur le problème aux limites pour l'équation $\Delta u = k(x, y) u^2$. DAN SSSR 94, n° 6 (1954), 995-998 (en russe).

NACHBIN L.
1. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 68, n° 1 (1950), 28-46.

NATANSON I.
1. Quelques théorèmes non locaux des intégrales singulières. DAN SSSR 19, n° 5 (1938), 357-360 (en russe).

NEUMANN J. von
1. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Ann. 102 (1929), 49-131.

NIKOLAÊV V.
1. Sur le problème de l'approximation des fonctions continues par des polynômes. DAN SSSR 61, 2 (1948), 201-204 (en russe).

NIKOLAÊVA G.
1. Sur la construction approchée d'une transformation conforme par la méthode des séries trigonométriques conjuguées. Tr. Mathem. in-ta im. V. Stéklova 53 (1959), 236-266 (en russe).

NIKOLSKI S.
1. Equations linéaires dans les espaces vectoriels normés. Izv. AN SSSR, ser. mathem. 7, n° 3 (1943), 147-163 (en russe).

PELTCHINSKI A., FIGUEL T.
1. Sur la méthode d'Enflo de construction d'espaces de Banach sans la propriété d'approximation. UMN 28, n° 6 (1973), 95-108.

PHILLIPS R. S.
1. On weakly compact subsets of a Banach space. Amer. J. Math. 65 (1943), 108-136.

POLIAK B.
1. Méthodes du gradient de résolution d'équations et d'inéquations. JVM i MF 4, 6 (1964), 995-1005 (en russe).
2. Une méthode générale de résolution des problèmes d'extrémum. DAN SSSR 174, n° 1 (1967), 33-36 (en russe).

POUGATCHEV B.
1. Sur la convergence des méthodes localement proches de la méthode de Newton-Kantorovitch. Tr. séminara po founkts. analizou, vyp. 7, Voronej, izd-vo VGU (1963), 130-136 (en russe).

RELLICH F.
1. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. Math. Ann. 110 (1934), 342-356.

RIESZ F.
1. Sur les opérations fonctionnelles linéaires. C. R. Acad. Sci. (Paris) 149 (1909), 974-977.
2. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69 (1910), 449-497.
3. Leçons sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913.
4. Sur la décomposition des opérations fonctionnelles. Atti Congresso Bologna 3 (1928), 143-148.
5. Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires. Ann. of Math. 41 (1940), 174-206.

RUBINSTEIN G.
1. Quelques exemples de problèmes d'extrémums duaux. V kn.: Mathematitcheskoe programmirovanié. M., « Naouka », 1966 (en russe).
2. Dualité en programmation mathématique et quelques problèmes d'analyse convexe. UMN 25, 5 (155), (1970) (en russe).
3. Sur le déplacement d'une masse sur un compact. DAN SSSR 223, n° 3 (1975), 572-575 (en russe).

RVATCHEV M.
1. Sur le déplacement d'une masse. V. zb.: Optimisation, vyp. 9 (26), Novossibirsk, 1974, 203-208 (en russe).

SAMOKICH B.
1. Etude de la vitesse de convergence de la méthode de plus forte pente. UMN 12, n° 1 (1957), 238-240.
2. Méthode de plus forte pente dans le problème des valeurs propres d'opérateurs semi-bornés. Izv. vouzov, Mathem. n° 5 (1958), 105-114 (en russe).

SCHAUDER J.
1. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Math. Zetschr. 26, n° 1 (1927), 47-65.
2. Über lineare vollstetige Operatoren. Studia Math. 2 (1930), 183-196.
3. Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann. 106 (1932), 611-721.
4. Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhangigen Veränderlichen. Fund. Math., 24 (1935), 213-246.

SÊDAEV A.
1. Sur un problème de G. Lozanovski. Troudy NIIM VGU, Voronej, vyp. 14 (1974), 63-67 (en russe).

SÊMÊNOV E.
1. Théorèmes d'immersion pour les espaces de fonctions mesurables de Banach. DAN SSSR 156, n° 6 (1964), 1292-1295 (en russe).

SIRVINT Y.
1. Ensembles convexes et fonctionnelles linéaires dans les espaces abstraits. Izv. AN SSSR, ser. mathem., 6 (1942), 143-170, 189-211 (en russe).

SMOLITSKI H.
1. Sur la sommabilité des potentiels. UMN 12, n° 4 (1957), 349-356 (en russe).

SOUDAKOV V.
1. Problèmes géométriques de la théorie des distributions probabilistiques infinidimensionnelles. Troudy MIAN 141, L., « Naouka » 1976 (en russe).

STEINHAUS H.
1. Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr. 5 (1919), 186-221.

STÊPANOV V.
1. Cours d'équations différentielles. Izd. 8-e, Fizmatguiz, M., 1959 (en russe).

TOULAÏKOV A.
1. Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1, n° 39 (1933), 167-170.

TROÏTSKAÏA E.
1. Sur les valeurs propres et les vecteurs propres d'opérateurs complètement continus. Izv. vouzov, Mathem., n° 3 (1961), 148-156 (en russe).

VERCHIC A.
1. Quelques remarques sur les problèmes de programmation linéaire en dimension infinie. UMN 25, 5 (1970), 117-124 (en russe).
2. Sur les travaux d'Orstein, les conditions de faible dépendance et les classes de mesures stationnaires. « Théoria véroïatnostei i iéo priménénia » 21, 3 (1976) (en russe).

VERTHEIM B.
1. Sur quelques méthodes de résolution approchée d'équations opératorielles non linéaires dans les espaces de Banach. UMN 12, 1 (1957), 166-169 (en russe).

VEXLER A.
1. Sur la localité des espaces de Riesz fonctionnels. Sib. math. journ. 12, n° 1 (1971), 54-64.

VLADIMIROV V.
1. Problèmes mathématiques de la théorie de transfert des particules. M., « Naouka », 1961 (en russe).

ZABRÉÏKO P.
1. Espaces idéaux de fonctions. Vestnik Iarosl. in-ta, vyp. 8 (1974), 12-52 (en russe).

INDEX DES MATIÈRES

Algèbre 47
Anneau 203
— normé 203
Annulateur 111
Application
— bijective 12
— continue 19
— injective 12
— inverse 12
— linéaire 73
— surjective 12
Archimédien 368
Atome 55

Bande 368
— principale 369
Base(s)
— algébrique 71
— équivalentes 17
— d'un espace 16
— orthonormale 162
— d'une topologie 17
— de voisinages 16
Bipolaire 112
Borne
— inférieure 14
— supérieure 13
Boule
— fermée 27
— ouverte 27

Classe d'Orlicz 147
Combinaisons linéaires 71
Compact 24
— extrêmement discontinu 371
— hyperstonien 381
Complémentaire 13
Complément étranger 368
Complétion 33, 95, 122
Condition
— (A_σ) 391
— (B_σ) 391
— (C_σ) 391
— Δ_2 150
— de Hölder 46
— de Lipchitz 46
— de validité 368
Cône 367
Convergence
— en mesure 54
— en moyenne d'ordre p 142
— p.p. 54
— au sens de Moore-Smith 19
Corps convexe 105

Décomposition de Lebesgue 57
Dérivée distributionnelle 457
Différence
— d'éléments 69
— de deux ensembles 13
— symétrique 13
Dimension d'un espace 71
Domaine étoilé 446
Dual
— algébrique 74
— topologique 104
Dualité 107

Egalité de Parseval 171
Elément(s)
— caractéristiques 344
— étrangers 135, 368
— linéairement dépendants 71
— — indépendants 71

Elément(s)
— maximal 13
— maximum 13
— minimal 13
— minimum 13
— orthogonaux 162
— symétrique 69
Ensemble(s) 11
— absolument convexe 77
— absorbant 78
— borélien 59
— borné 13
— complètement continu 328
— convexe 77
— dénombrablement compact 26
— dense 19
— de deuxième catégorie 19
— équicontinu 114
— équilibré 77
— étrangers 368
— faiblement borné 111, 286
— (*)-faiblement borné 286
— fermé 16
— filtrant supérieurement 14
— fondamental 112
— de Lebesgue 49
— linéaire 70
— majoré 13
— mesurable 49
— minoré 13
— μ-disjoints 54
— nulle part dense 19
— ordonné 13
— orthogonaux 162
— ouvert 15
— partout dense 19
— précompacts 97
— de première catégorie 19
— relativement dénombrablement compact 26
— — séquentiellement compact 26
— séparé 105
— séquentiellement compact 26
— strictement séparé 105
— totalement ordonné 14
Enveloppe
— absolument convexe 77, 90
— convexe 90
— linéaire 70
— — fermée 90
— solide 368
ε-réseau 40
Equation de fermeture 171
Espace(s)
— de Banach 121
— — fondamental 136
Espace(s)
— — idéal 136
— — réflexif 239
— complètement réticulé 369
— dénombrablement complètement réticulé 368
— dual 178
— faiblement séquentiellement complet 287
— fondamental 135
— — normé 136
— de Hilbert 160
— homéomorphes 15
— idéal 135
— — dual 248
— — normé 136
— isométriques 29
— $\mathrm{Lip}^1(K)$ 310
— localement convexes 97
— de Lorentz 153
— de Marzinkiewicz 153
— mesuré 48
— de mesure continue 55
— — discrète 55
— métrique 27
— — complet 32
— métrisable 28, 90
— normable 119
— (o)-dual 376
— (o)-réflexif 376
— d'Orlicz 147
— quasi complet 94
— quotient 72
— de Riesz 367
— s 33
— séparable 36
— de Sobolev 460
— des suites tronquées 146
— topologique 15
— — compact 22
— — relativement compact 25
— — séparable 19
— — séparé (de Hausdorff) 20
— unitaire 159
— vectoriel 68
— — complexe 68
— — réel 68
— — topologique 86
— — — complet 94
Extension maximale 372

Famille
— d'ensembles 12
— génératrice 100

Fonction(s)
— absolument continue 56
— caractéristique 13
— correcte 262
— corrigée 262
— équivalentes 54
— essentiellement bornée 142
— homogène 78
— mesurable 49, 53
— d'opérateur 347
— positivement homogène 78
— presque uniformément continue 440
— régulière 59
— semi-additive 78
— σ-additive 48
— Σ-mesurable 50
— singulière 56
— sommables 52, 53
— spectrale 352
— à variation bornée 155
Fonctionnelle
— d'appui 105
— linéaire 73, 74
— de Minkowski 79
— (o)-continue 248
— singulière 375
Fondement 368
Formule
— de Gauss 274
— d'interpolation 274
— des quadratures mécaniques 272

Homéomorphisme 19
Homomorphisme
— naturel (canonique) 128
— réticulant 371
Hyperplan 75
— d'appui 105
— réel 76

Idéal 368
— principal 368
Inégalité
— de Hölder 130
— — généralisée 131
— — intégrale 300
— de Minkowski 132
— — intégrale 133
— de Sobolev 451
— de Young 147
Infimum 14
Injection naturelle 112
Intégrale de Radon 51
Intérieur d'un ensemble 18
Isomorphisme
— linéaire 70, 73
— réticulant 371

K-complétion 370
K-espace 369
— achevé 372
— de Banach 385
KB-espace 398
K-espace 368

Lattis
— de Banach 385
— normé 385
— (o)-isomorphes 371
— vectoriel 367
— (r)-complet 371
Lemme
— de partition de l'unité 154
— de la quasi-perpendiculaire 126
Limite généralisée 85

Mesure 48
— complète 48
— finie 48
— normale 381
— séparable 63
— σ-finie 48
Méthode
— des approximations successives 210
— de sommation de Cesáro 283
— — permanente 283
Métrique 27
— induite 29
Module
— de continuité 46
— d'un élément 368
— d'un opérateur 406

N-fonction 146
— complémentaire 146
Norme(s) 78, 118, 177
— abstraite 418
— équivalentes 121
— euclidienne 120

Norme(s)
— monotone 385
— — complète 140, 391
— (o)-continue 139, 390
— (o)-semi-continue 140, 391
Noyau
— de moyennisation 320
— d'un opérateur 406
— de type potentiel 442

Opérateur
— additif 175
— adjoint 197, 331
— auto-adjoint 198
— biadjoint 334
— borné 176
— complètement continu 328
— homogène 175
— d'immersion 445
— intégral 406
— inverse 205
— — à droite 208
— — à gauche 208
— linéaire 175
— de norme abstraite 420
— (o)-continu 375
— ($o\sigma$)-continu 375
— polynomial 277
— positif 224, 374
— régulier 374, 406
(o)-continuité 391
(o)-convergence 370
($o\sigma$)-continuité 391
($o\sigma$)-convergence 370

Partie
— bornée 92
— négative 368
— positive 368
— totale 107
— totalement bornée 92
Partition
— d'un ensemble 12
— de l'unité 360
Point
— d'adhérence 18
— extrémal 106
— intérieur 16
— limite 18, 22
Polaire 111
Polynôme(s)
— opératoriel 225, 345
— d'Hermite 169

Polynome(s)
— de Jacobi 168
— de Laguerre 168
— de Legendre 168
— orthogonaux 168
— de Tchébychev 168
Principe
— de condensation des singularités 270
— de conservation des relations 372
— de fixation des singularités 269
Problème
— de déplacement de la masse 298
— des moments généralisé 263
— des moments puissance 263
Produit
— direct 12
— d'espaces 57
— de mesures 57
— d'opérateurs 201
Projecteur(s) 129, 199
— orthogonaux 230
Projection 164
Prolongement 80, 241
Propriété
— réalisée p.p. 54
— de somme directe 66

Régulateur de convergence 371
Représentation intégrale 359
Résidu 39
Réunion d'une famille 12

Semi-norme 78
Série
— convergente 122
— de Neumann 219
σ-algèbre 47
Somme
— algébrique directe 72
— génératrice 283
— orthogonale 231, 234
Sous-algèbre 153
Sous-ensemble solide 368
Sous-espace
— complémentable 129
— propre 337
— vectoriel 70
Sous-lattis vectoriel 368
Sous-norme 78

Spectre 348
Suite(s)
— de Cauchy 32, 94
— croissante 50
— équivalentes 33
— faiblement convergente 223
— généralisée 14
— (o)-convergente 370
— ($o\sigma$)-convergente 370
— partielle 14
— (r)-convergente 370
— (r)-fondamentale 371
Support d'un élément 134
Suprémum 13
Système
— biorthogonal 107
— complet 164
— complètement régulier 218
— déterminant 461
— enchaîné 244
— fondamental 16
— orthogonal 164
— — fermé 171
— de Rademacher 165

Théorème
— d'Alaoglu-Bourbaki 115
— d'Amémia 387
— d'Arzelá-Ascoli 44
— de Banach 209
— de Banach-Steinhaus 271
— de décomposition de Hahn 49
— d'Egorov 55
— de Faber 280
— de Fatou 56
— de Fréchet 59
— de Fubini 58
— de Grothendieck 241, 388
— de Guelfand 326
— de Hahn-Banach 80, 102, 234
— de Hausdorff 43, 264
— de Hilbert-Schmidt 187
— de Kolmogorov 119, 324
— de Krein-Milman 107
— de Krein-Smulian 241
— de Lebesgue 55
— de Lévi 56
— de Lozinski-Harchiladzé 280
— de Lusin 59

Théorème
— de Mackey-Arens 116
— de Nakano-Amémia-Mori 254, 397
— d'Ogasawara 400
— d'orthogonalisation 165
— de prolongement en continuité 243
— de Radon-Nikodym 57
— du régulateur de convergence 55
— de Riesz M. 325
— de Riesz-Fisher 162
— de Sobolev-Kondrachev 456
— de stabilité de la convergence 55
— de Stone-Weierstrass 153
— de Szegö 272
— de Toeplitz 283
— de Tonelli 58
— de Yosida-Huitt 390
Topologie
— compatible avec une dualité 107
— de convergence uniforme 114
— faible 107, 237
— (*)-faible 237
— forte 114
— de Mackey 116
— de la norme 118
Tribu 47
— borélienne 59

Unité
— faible 368
— forte 368
U-norme 386

Valeur(s)
— caractéristiques 344
— régulière 351
Variation
— négative 49
— positive 49
— totale 49, 155
Vecteurs 72
Voisinage d'un point 16

INDEX DES SYMBOLES *)

Espaces

$\mathbf{R}^n$	27
$\mathbf{C}^n$	27
$\mathbf{C}(K)$	29
$\mathbf{C}[a, b]$	30
$\mathbf{s}$	30
$\mathbf{C}^{(l)}[a, b]$	31
$\mathbf{l}^\infty(T)$	37
Lip α	46, 438
$\mathbf{S}(T, \Sigma, \mu)$	60
$\mathbf{S}(a, b)$	63
$\mathbf{S}(D)$	64
$\mathbf{K}^n$	69
$\mathbf{s}(T)$	91
$\mathbf{C}(R^1)$	91
$\mathbf{D}[a, b]$	92
$\mathbf{L}_\omega$	92
$\mathbf{L}^p(T, \Sigma, \mu)$	142, 143
$\mathbf{L}^p(D)$	143
$\mathbf{L}^p(a, b)$	143
$\mathbf{l}^p$	145
$\mathbf{c}_0$	145
$\mathbf{c}$	145
φ	146
$\mathbf{l}_n^p$	146
$\mathbf{L}_M^0$	147
$\mathbf{L}_M$	147
$\mathbf{E}_M$	152
$\mathbf{M}(\psi)$	153
$\Lambda(\psi)$	153
$\mathbf{V}$	156
$\mathbf{H}^p$	157

*) Les notations sont données dans l'ordre de leur apparition

BeatriceGloria_personal library

$\mathbf{C}(D)$	157
$\mathbf{C}^{(l)}(D)$	157
$\mathbf{H}$	158
$\mathbf{ba}(\Sigma, \mu)$	256
$\mathbf{rca}(K)$	260
$\mathbf{Lip}^1(K)$	310
$\mathbf{C}_\infty(Q)$	371
$\widetilde{\mathbf{W}}_p^{(l)}$	455, 457
$\mathbf{W}_p^{(l)}$	460
$\mathring{\mathbf{W}}_p^{(l)}$	463

Autres notations

$\mathbf{N}$	ensembles des entiers 11
$\mathbf{R}$	ensembles des réels 11
$\mathbf{C}$	ensemble des complexes 11
$\in$	signe d'appartenance 11
$\notin$	signe de non appartenance 11
$\subset$	signe d'inclusion 11
$\varnothing$	ensemble vide 11
$\{a : (P)\ a\}$	11
$f : A \to B$	application 12
$f(X)$	image de X par f 12
$f^{-1}(Y)$	image réciproque 12
f^{-1}	application inverse 12
$\cup$	réunion 12
$\cap$	intersection 12
Π, $\times$	produit d'ensembles 12
$\Leftrightarrow$	signe d'équivalence 13
$\Rightarrow$	signe d'implication 13
$\setminus$	différence d'ensembles 13
$\triangle$	différence symétrique 13
χ_A	fonction caractéristique de l'ensemble A 13
$\succcurlyeq$, $>$	relation d'ordre 13
sup, $\vee$	suprémum 13
inf, $\wedge$	infimum 14
$\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, $\{x_\alpha\}$	suite généralisée 14
$\{x_n\}$, $\{x_m\}$, $\{x_k\}$, ...	suite 14
$\mathfrak{B}_x$	base de voisinages du point x 16
$\overline{E}$	adhérence de E 18
$\mathring{E}$	intérieur de E 18
$x_\alpha \xrightarrow[A]{} x$, $x_\alpha \to x$, $x = \lim x_\alpha$	convergence d'une suite généralisée dans un espace topologique 20

$\rho(x, y)$	métrique 27
$K_\varepsilon(x_0)$	boule ouverte de rayon ε et de centre x_0 27
$B_\varepsilon(x_0)$	boule fermée de rayon ε et de centre x_0 27
$\rho(x_0, E]$	distance du point x_0 à l'ensemble E 28
Σ	algèbre ou σ-algèbre d'ensembles 47
(T, Σ, μ)	espace mesuré 48
$\varphi_+, \varphi_-, \lvert\varphi\rvert$	variation positive, négative, totale d'une fonction additive d'ensemble 49
$x_n\uparrow, x_n\uparrow x$; $x_n\downarrow, x_n\downarrow x$	50, 135
$[x]_n$	coupe d'une fonction 51
$\int_T x(t)\,d\varphi(t), \int_T x\,d\varphi$	intégrale (de Radon) 51
(mod. μ)	54
$x_n \to x$ p.p.	convergence presque partout 54
$x_\alpha \to x\ (\mu)$, $x_n \to x\ (\mu)$	convergence en mesure 54
$\nu \times \mu$	produit de mesures 57
$\mathscr{B}$	tribu borélienne 59
mes (A)	mesure de Lebesgue d'un ensemble A 59
$\mathbb{K}$	corps des scalaires 68
0	élément nul d'un espace vectoriel 68
$L(E)$	enveloppe linéaire 70
$x + E, E_1 + E_2, \lambda E$	72
X/X_0	espace quotient 72
$L(X, Y)$	espace des opérateurs linéaires 73
Ker U	noyau d'une application 73
X^+	dual algébrique 74
$X_{\mathbb{R}}$	espace vectoriel réel associé à un espace vectoriel complexe 74
co (A)	enveloppe convexe 77
abs co (E)	enveloppe absolument convexe 77
p_U	fonctionnelle de Minkowski de l'ensemble U 79
sign μ	signe de μ 79
$\overline{\mathscr{L}}(E)$	enveloppe linéaire fermée 90
$\overline{\text{co}}(E)$	enveloppe convexe fermée 90
$\overline{\text{abs co}}(E)$	enveloppe absolument convexe fermée 90
X^*	dual topologique 104
$\langle X, Y\rangle$	couple dual 107
$\sigma(X, Y)$	topologie faible 107
E°	polaire 111
$E^\perp$	annulateur 114
π_Y	injection canonique de X dans Y^+ 112
$E^{\circ\circ}$	bipolaire 112

$\| \times \|$	norme 118
$\hat{\mathbf{X}}$	complétion 122
supp x	support de la fonction x 134
supp E	support de l'ensemble E 134
x_+, x_-, $\| x \|$	135, 368
Re x, Im x	135
(A)	(o)-continuité de la norme 139, 390
(C)	(o)-semi-continuité de la norme 140, 391
(B)	complétude monotone de la norme 140, 391
vrai sup	142-143
$\bigvee_a^b (x)$	variation totale de la fonction x 155
(x, y)	produit scalaire 158
$B(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	espace des opérateurs linéaires continus 177
U^*	opérateur adjoint 197, 331
U^{-1}	opérateur inverse 205
U_g^{-1}	opérateur inverse à gauche 208
U_d^{-1}	opérateur inverse à droite 208
$\sqrt{U}$	racine carrée de l'opérateur U 226
$\oplus$	somme orthogonale 231
$\ominus$	orthocomplément 232
$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$	topologie faible 237
$\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$	topologie $(*)$-faible 237
$B_{\mathbf{X}}$	boule unité fermée de centre 0 238
π	injection canonique de X dans X** 239
$\mathbf{X}_n^{\sim}$	espace vectoriel des fonctionnelles (o)-continues 250
$\mathbf{X}'$	espace dual 250
$/x'$	250
$\mathbf{X}^{\times}$	251
$\Phi_0(\mathscr{B})$	304
$\| \varphi \|_\tau$	305
x_h	moyennisation au sens de Stéklov 320
m, M	bornes d'un opérateur auto-adjoint 345
$\varphi(U)$	fonction d'opérateur 347
S_U	spectre d'un opérateur 348
$[x_1, x_2]$	intervalle 368
e	étranger 368
E^e	complément étranger 368
sol (E)	enveloppe solide 368
$\mathbf{X}(u)$	u-idéal 368
$[\mathbf{Y}]$	projecteur sur une bande 369
$\mathbf{X}_u$	bande principale 369
$[u]$	projecteur sur une bande principale 369

$x_\alpha\uparrow$, $x_\alpha\uparrow x$, $x_\alpha\downarrow$, $x_\alpha\downarrow x$	370
$k\mathrm{X}$	K-complétion 370
$x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$, $x = (o)\text{-}\lim x_\alpha$	(o)-convergence 370
$x_n \xrightarrow{(o\sigma)} x$, $x = (o\sigma)\text{-}\lim x_n$	$(o\sigma)$-convergence 370
$(o)\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$	série (o)-convergente 370
$x_n \xrightarrow{(r)} x$	(r)-convergence 370
$\mathfrak{M}(\mathrm{X})$	extension maximale 372
$L^{\sim}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$	espace des opérateurs réguliers 374,
U_+, U_-, $\lvert U \rvert$	375
$L_n^{\sim}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$	espace des opérateurs (o)-continus 375
$L_{n\sigma}^{\sim}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$	espace des opérateurs $(o\sigma)$-continus 375
$\mathrm{X}^{\sim}$	espace des fonctionnelles régulières 375
$\mathrm{X}_n^{\sim}$	espace des fonctionnelles (o)-continues, espace (o)-dual 376
$\mathrm{X}_{n\sigma}^{\sim}$	espaces des fonctionnelles $(o\sigma)$-continues 375
$\mathrm{X}_s^{\sim}$	espaces des fonctionnelles singulières 375
$\varkappa$	injection canonique de X dans $(\mathrm{X}_n^{\sim})_n^{\sim}$ 376
C_f	bande de positivité stricte 378
$\mathcal{E}_Q$	famille d'ensembles ouverts-fermés 380
$\mathcal{N}_Q$	famille d'ensembles de première catégorie 380,
$\mathfrak{B}_Q$	381
(A), (B), (C)	390, 391
(A_σ), (B_σ), (C_σ)	391
$\lvert \sigma \rvert(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$	401
$\lvert U \rvert$	module d'un opérateur 406
$\mathrm{X}[\mathrm{Y}]$, $\mathrm{Y}[\mathrm{X}]$	espaces de norme mixte 416
L^{p_1, p_2}	416
$\lvert U \rvert$	norme abstraite d'un opérateur 418
$L_A(\mathrm{X}, \mathrm{S})$	espace des opérateurs de normes abstraites 418

INDEX DES ABRÉVIATIONS

e.i.	espace idéal 135
e.f.	espace fondamental 135
e.l.c.	espace localement convexe 97
e.i.n.	espace idéal normé 136
e.f.n.	espace fondamental normé 136
(o)	ordre 139
p.p.	presque partout 54
e.v.t.	espace vectoriel topologique 86
l.v.	lattis vectoriel 367
l.n.	lattis normé 385